陈陆君 梁昌洪 著

国家自然科学基金资助

孤立子理论及其应用

——光孤子理论及光孤子通信

西安电子科技大学出版社

孤立子理论及其应用

——光孤子理论及光孤子通信

陈陆君　梁昌洪　著

西安电子科技大学出版社

1997

(陕)新登字 010 号

孤立子理论及其应用

——光孤子理论及光孤子通信

陈陆君　梁昌洪　著

责任编辑　李纪澄　李惠萍

西安电子科技大学出版社出版发行

西安电子科技大学印刷厂印刷

开本 787× 1092 1／16 印张 21 14／16 字数 513 千字

1997 年 7 月第 1 版　1997 年 7 月第 1 次印刷　印数 1-1000

ISBN 7-5606-0479-X／O· 0030　　定价：32.80 元

内容提要

本书系统地论述了孤立子理论及其应用方面所取得的一部分成果。全书共12章，分三个部分，研究内容横跨孤立子基础理论和孤子细胞自动机、流体孤子和光学孤子与光纤孤子通信三个领域。

第一部分，概述了孤子基础理论中的各种解析方法和数值方法，包括行波分析、孤子逆散射理论、KdV方程和NLS方程的逆散射求解、Hirota方法等；论述了一般孤子方程的(作为一种微扰方法)等价粒子一般理论，并以KdV和NLS方程为例给出了等价粒子分析实例；最后，论述了一种双参量、可变速孤子细胞自动机和暗孤子细胞自动机及其“内禀孤子”概念。

第二部分，首先概述了流体孤子，特别是水槽中参数激励流体孤子的背景和发展概况及流体孤子方程的建立；论述了水槽中双孤波相互作用的微扰变分分析及双非传播孤波解；论述了倾斜水槽中孤波移动的能量分析、传输方程和等价粒子分析；论述了以一种近似的尺度假设和小功率因数尺度假设为基础的参量激励分析和各种微扰分析等；最后，讲述了流体耦合孤子实验及理论。

第三部分，首先概述了光学中的所有孤子现象及各种类型的孤波方程的建立，光纤中孤子的基本特性及物理解释，以及光纤孤子通信应用及其发展动态；论述了普通光纤及饱和光纤中二阶孤子、二阶一阶混合孤子、反相孤子、暗孤子及其序列的传输特性和相互作用规律的数值模拟结果以及通信应用问题；论述了各种高阶效应所支持的小幅孤波解；论述了孤子在突变界面的反射透射问题的孤波耦合方程和两种情况下的边界条件近似，以及对皮秒孤子和亚皮秒孤子反射问题的数值模拟结果；论述了光孤子相互作用的等价粒子理论；系统地论述了耦合NLS方程的建立和求解，及其在双折射光纤、双模耦合、双信道耦合和反向传输模耦合以及全光孤子开关方面的应用。

本书可用作物理、光学、数学、力学、流体力学、等离子体物理、光通信、光电子学、非线性电磁学、通信与电子系统等有关专业的高年级大学生和研究生的教材或参考读物，也可供上述有关领域的科技工作者和工程技术人员参考。

前　言

世纪之交正是现代科学进入了历史性大变动时期。科学分类正经历着从分化到综合，从封闭到开放，从平衡到非平衡，从线性到非线性，从低层次到高层次的演化。学科正在渗透、交叉，新兴学科层出不穷，猛烈地震撼着横亘在思维科学、自然科学和社会科学之间的森严壁垒。在所有这些新学科中，非线性是一个十分诱人的课题。可以说非线性现象既是思维科学、自然科学及社会科学的共同特征，或者说非线性是一般存在的普遍现象；同时，对非线性的描述——非线性理论又是研究这些问题的重要工具。我国已把非线性科学列为远期发展八个重大课题之一。一般广义而言，非线性理论包括了浩瀚的领域，如控制论、信息论、耗散结构、协同学、突变论、混沌、生命系统、宇宙学、分形、思维科学、生态学、神经网络、符号动力学、社会动力学、进化论、音乐与艺术、非平衡系统经济学、生物学、化学、地质学、孤子理论等等。因此，孤立子理论及其应用作为非线性问题的重要分支，就显得特别重要。本书主要论述作者在孤立子理论及其应用方面的研究成果，并简要介绍前人所取得的研究进展，包括孤立子理论、流体孤子、光孤子和孤子细胞自动机等。

孤子理论在 1965 年孤子被命名之后，取得了突飞猛进的发展。各个领域中的各种孤子方程相继被建立、发展和完善，求解非线性孤波方程的各种解析法和数值解法及非线性方程的各种性质相继被发现、发展和成熟，如逆散射方法、Hirota 双线性法(包括被推广的三线性法)、Darboux 变换法(包括亚纯矩阵变换法)、Backlund 变换法和各种微扰法等。作者提出将等价粒子理论作为微扰法用于研究一些近似可积系统，也可算作是一种微扰新方法。

本书分为三部分，即孤子基本理论(包括孤子细胞自动机和数值方法)、流体孤子和光孤子。这里所说的流体孤子，更确切地说是水槽中参数激励下的孤子或孤波现象，这是一个非常诱人的研究领域。这一现象在 1984 年被发现，国内外许多学者都倾心对其作了有益的研究，我们对此也作了系统的研究。在光孤子方面的研究更是前程似锦，光孤子概念自 1973 年被提出，1980 年在实验中被发现，现在光孤子已被无形变地传输到 14 000 km 和 1 000 000 km(后者需经过再生)。它为光纤通信提供了最优信息载体，即以光电为媒介的通信手段的最优信息载体，其通信容量可高出普通光纤通信容量 100 倍，因此有着广阔的应用前景。对光孤子的研究，已取得了蓬勃的发展，美国光学学会会刊 Opt. Lett. 从 1985 年至今，发表的光孤子论文逐年递增，以其复印件的厚度计，在 1987 年只不过一个订书钉所能订的厚度；到 1991 年，达到四个订书钉的厚度。作者对此也作了广泛的研究，并在这一方面已申请国家自然基金和陕西省自然基金的资助，本书的绝大部分内容都是关于这方面的研究。

自动机本来是研究复杂系统的一种方法，即用离散化的简单模型，定义其时间演化规

则和与近邻相互作用的规则，来模拟复杂系统(如晶体生长、生命现象、凝聚态等)演化的一种方法，因此，它实质上是一种布尔(Boole)化的离散动力系统。后来，Park 等人发现，有一种演化系统的行为非常类似于孤子的行为，于是日本学者 Satsuma 提出了孤子细胞自动机。在本书中介绍了作者提出的一种可变速双参量孤子细胞自动机和暗孤子细胞自动机。

非线性的重要性已为人们所认识，非线性可以产生本质上全新的一些现象，而这些现象不可能从线性化方程出发的微扰理论得到，很多非线性方程组可以用一些具有孤子解的非线性演化方程逼近。我们认为，在很多情况下，这些方程只是提供了一个比线性化方程更好的起点，或者说更好的零级近似，然后，在孤子解的框架下，再用微扰方法去处理真实系统对这些特殊方程的偏离。因此，人们不能用对待目前非常成熟的线性理论如电磁理论(线性电磁理论)的思维方式及要求来对待非线性问题。最简单的例子是，对流体孤子问题的理论解释，不可能像电磁领域那样，理论对实验的解释能够达到一位、二位甚至更高位的有效数字的吻合；对流体问题，往往只能达到数量级的符合。

本书在表述上非常注重理论的统一性、简单性、直观性和易读性。如果本书能成为理论工作者与实验工作者之间的一座桥梁，或者能为实验工作者了解他所关心的有关理论问题提供一条捷径，那么作者也就如愿以偿了。书中错误和不当之处在所难免，作者恳请批评指正。

作　者
1995 年 3 月
于西安电子科技大学

目　　录

第一部分　孤立子基础理论

第二部分 流体孤子理论

第三部分 光孤子理论

参 考 文 献

第 一 部 分

孤立子基础理论

"…it has usually been thought that in a relativistic field theory, in order to have stationary bound states, quantum mechanics must be crucial. As we shall see, this turns out not to be the case. In a nonlinear field theory, with an appropriate amount of nonlinearity, stable bound states can exist on a classical, as well as quantum mechanical, level. Such bound states are called solitons."

——T. D. Lee

第 1 章

孤立子基本概念及孤子行波解

1.1　孤立子理论研究背景及其发展

孤立子理论自 1965 年由 Zabusky 和 Kruskal[1] 对孤立子(soliton，简称孤子)命名之后，得到了迅猛的发展。究其原因是孤波现象无所不在，从天上涡旋星系的密度波、海上冲击波、等离子体、分子系统、生物系统、光纤中光的传输、激光传播、非线性传输线、超流氦—3、超导 Josephson 结、磁学、结构相变、液晶、流体动力学以及基本粒子等，都与孤子有关。早期的专著[2~5]、会议录[6~9]、综述[10~18]和科普[19~21]文章等把有关孤子概念及知识介绍给各个领域的学者，使得孤子理论及其在各个领域的应用研究取得了突飞猛进的发展。其发展大致可分为三个阶段。

第一阶段，主要是在上世纪。最早讨论孤立子问题的是 Scott Russell，他在 1844 年 9 月英国科学促进会第 14 次会议上作了如下的《论波动》报告(1854 年出版)：

ON WAVES.　311

Report on Wavcs. By J.SCOTT RUSSELL, *Esq., M.A., F.R.S.Edin., made to the Meetings in* 1842 *and* 1843.

Members of Committee { Sir JOHN ROBISON*, *Sec.R.S.Edin.*; J.SCUTT RUSSELL, *F.R.S.Edin.* }

I believe I shall best introduce this phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well—defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradu–

> ally diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of the sea, which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores.

报告中讲述了 1834 年 8 月，他在运河里发现了一个波形不变的单个凸起的水团，这个水团运动一二英里之后在河流拐弯处消失了。他以物理学家的敏锐注意到这个现象绝非一般水波，因为在一般情况下，人们所观察到的水波总是由一串具有周期特点的波列组成的，如把石子投入水面的一个短暂的冲击所激发的圆形圈不是一个而是一串，数学上可由一个波动方程描述，其解是周期性的波列。Russell 以不同寻常的敏锐注意到，他所观察到的那个波绝对不可能是波动方程的解。随后 Russell 进一步提出，他所碰到的孤立的对象实际上是流体力学的一个稳定解，他那时已命名它为"孤立波"(solitory wave)(注意：前面所说的命名(1965 年)是"孤立子"(soliton))，可以说孤波现象的发现是"观察机遇+敏锐思维"的结果。它与冲击波(其波前有奇异性)不同，"孤立波"到处正则，没有奇异性，而且它不扩散，因此同普通的波包不同，后者是要弥散的。10 年之后(1844 年)Russell 在浅水槽中做了一些实验，用多种方法激发，看到了相同的现象。但是，Russell 的学说并未能成功地使当时的物理学家信服，从 Lord Rayleigh 1876 年发表的论文可以看到，孤立波的问题在当时许多物理学家中间引起了热烈争论，直到 1895 年才告一段落，即 60 年之后，Korteweg 和 de Vries 导出了著名的 KdV 方程，解释了 Russell 的浅水波。与此同时，在 1876～1882 年发现了 Backlund 变换，成为后来发展孤子理论的重要基础。

第二阶段大致可划在 1955～1975 年。1955 年，Fermi, Pasta, Ulam(FPU)用计算机计算了一维非线性晶格在各个振动模之间的转换，发现在时间足够长时能量又似乎回到了开始的分布，这与经典理论是背道而驰的，即：只要有非线性效应存在，能量就会均分，各态经历的现象就会出现。或者说，任何微弱的非线性作用，可导致系统由非平衡态向平衡态过渡。由于 FPU 问题是在频域考察的，因此未能发现孤波解。后来，Toda 研究了这种模式的非线性振动，得到了孤波解，使 FPU 问题得到正确的解答，从而激发起人们对孤立波的研究兴趣。

1962 年，Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordon 方程用于基本粒子研究；1965 年，Zabusky 和 Kruskal[1] 命名 Soliton；1967 年 Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura[22] 发明了求解 KdV 方程的逆散射方法，同年，McCall 和 Hahm 做出了激光自感应透明的孤子实验；1973 年，Scott, Chu, McLaughlin 发表综述文章[11]，在电子、光学界普及了孤子知识；同年 Hasegawa 和 Tappert 预言光纤孤子的存在；1975 年，Krumhansl 和 Schieffer[23] 开始研究了孤波的统计力学。

第三阶段(1973～)，把孤子概念及理论广泛应用于物理学、生物学、天文学等各个领域，如在文献〔15, 16, 18, 24～26〕中，将孤子应用于场论模型和基本粒子，等等。同时，开展了高维孤子的研究[14]。1980 年非线性效应专刊 Physica D 问世，与此同时，

光纤中的孤子已在实验中产生出来[27]。此后的发展更是突飞猛进，文献数不胜数，各种专著及述评琳琅满目。据作者所知，有关专著及述评已有 12 种之多[28~39]。

1.2　孤子方程与孤子分类

孤立子理论在近 20 年间得到了迅速发展，现在，描述孤波现象的方程包括各种修正型方程，少则也有数十种。下面列出几种最为常见的方程:

描写浅水波的 KdV 方程

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

KdV 方程也是其它许多领域中孤波现象的模型: 如在长波小振幅近似下，可描写冷等离子体的磁流体波的运动; 非谐振晶格的振动; 等离子体离子声波; 弹性杆中纵向色散波; 液、气两种混合态的压力波; 管底下部流体的转动; 低温下非线性晶格的声子波包的热激发等。此外还有:

修正 KdV(MKdV)方程

$$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.2}$$

Benjamain 方程(也叫 RLW——正则化长波方程)

$$u_t + u_x + \lambda uu_x - \beta y_{xxt} = 0 \tag{1.3}$$

Burges方程

$$u_t + uu_x + \mu u_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

Boussinesq方程

$$u_{tt} = u_{xx} + (3u^2)_{xx} + u_{xxxx} \tag{1.5}$$

KP方程

$$(u_t + \lambda uu_x + \mu u_{xxx})_x + \nu u_{yy} = 0 \tag{1.6}$$

Fisher方程($n = 1$)

$$u_t - \lambda u_{xx} - \mu u^n (1 - u) = 0 \tag{1.7}$$

对任意 n，这一方程称为反应—扩散方程。Fisher 方程可用以描述流体力学、等离子体物理、热核反应和人口增殖等问题中的非线性现象。

描述流体短波和小振幅极限的方程、描述光纤中孤子传输的方程和描述光波自聚焦的方程，都可归结为非线性 Schrodinger(NLS)方程，即

$$\mathrm{i}u_z + u_{tt} + 2|u|^2 u = 0 \tag{1.8a}$$

如果作变换 $2z \to z$，则上式还可写成

$$\mathrm{i}u_z + \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = 0 \tag{1.8b}$$

这两种形式分别在不同文献中为不同习惯的作者所引用。因此，在本书中，也将根据具体问题的方便或传统习惯，选择其中之一。如果上述方程中再加入 αu 项，即可描述水槽中的非传播孤波。在相变问题、晶体缺陷、自感应透明、自旋的传播、铁磁体的 Bloch 墙、

超导 Josephson 结、超离子导体、电荷密度、表面外延等方面，都可归结为 Sine-Gordon 方程

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0 \tag{1.9a}$$

或

$$u_{tx}=\sin u \tag{1.9b}$$

描写非线性晶格振动和非线性传输线中波动的是 Toda 方程

$$\frac{\partial^2 Q_n(t)}{\partial t^2}=\mathrm{e}^{-[Q_n-Q_{n-1}]}-\mathrm{e}^{-[Q_{n+1}-Q_n]} \tag{1.10}$$

在小振幅和连续极限下，上式可导出 KdV 方程。此外，还有 Sinh-Gordon 方程、非线性 Klein-Gordon 方程、Hirota 方程，等等。

上述方程都给出孤波解。那么确切地说，什么是孤波解？孤立子是什么？目前，对孤立子还没有一个确切的定义。李政道认为[40]：在一个场论系统中，如果有一个经典解，它在任何时间都束缚于空间的一个有限区域内，那么，这样的解就叫做经典孤立子解。可以注意到，这里并没有给出孤子的明确定义。因此，比较恰当的做法是把如下三点作为孤子的工作定义，即：

(1) 孤立子(孤波)是波动问题中的一种能量有限局域解；

(2) 能在空间给定区域稳定存在；

(3) 相互作用不改变各自的特性。

孤波可分为拓扑性孤子和非拓扑性孤子。前者稳定存在的必要条件是有简并真空态，即在无穷远处存在不同的真空态，或者说有不同的边界条件；有孤立子解时，无穷远处的边界条件就与没有孤立子解时的不同。非拓扑孤立子不需要简并真空态，无论有无孤立子，在无穷远处都有同样的边界条件。一般地说，钟型分布的正、负(暗)孤波及其序列都是非拓扑的，但是 kink 孤波(其模方或其导数却是钟型的，如光纤中基本暗孤子就是例子之一)是拓扑孤子。

前面已对孤子从方程角度和拓扑性质上进行了分类，同一方程可能支持两类不同拓扑性质的孤波解，如 NLS 方程支持明孤子解和小振幅明暗孤子解(非拓扑)及基本暗孤子解(拓扑)。

1.3　非线性方程行波解的一般论述

对于各类非线性方程的行波解，北京大学唐世敏在文献〔41〕中通过 Poincare 相平面轨线分析，系统地讨论了行波解。本书将用作者引入的极限零点及非极限零点分析法来讨论各类非线性方程的行波解。对于一给定的非线性方程

$$u_t=F(u,\ u_x,\ u_{xx},\ \cdots)$$

或

$$u_{tt}=F(u,\ u_x,\ u_{xx},\ \cdots)$$

求其行波解的一般方法是，令

$$u(x,\ t)=u(\xi)\qquad \xi=x-Dt \tag{1.11}$$

式中，D 是标志行波速度的待定参量，代入非线性方程上式通过适当的积分，可能会得到

$$u_\xi^2 = P_1(u) \tag{1.12}$$

或

$$u_\xi = P(u) \tag{1.13}$$

对于式 (1.13)，暂讨论 $P(u)$ 为实函数的情况；对于式 (1.12)，暂在 $P_1(u)\geqslant 0$ 的 u 值区域内讨论，这时，式 (1.12) 立即化为式 (1.13) 且

$$P(u) = \pm\sqrt{P_1(u)} \tag{1.14}$$

式 (1.12) 与式 (1.13) 还是有很大区别的，即式 (1.12) 总是给出对称或反对称解，但式 (1.13) 则不一定。使 $u_\xi = 0$ 的 $u(\xi)$ 值，即 $P(u) = 0$ 的根，或者是 $u(\xi)$ 的极值点，如钟型波峰值、周期波峰值等，这时称为非极限零点；或者是 $u(\xi)$ 的极根值，即 $\xi \to \pm\infty$ 时 $u(\xi)$ 的极值，这时称为极限零点。下面给出两类零点的判据，设 u_0 是 $P(u)$ 的某一零点，如果存在某一 s 使

$$0 < \left|\lim_{u\to u_0}\left[\frac{P(u)}{(u-u_0)^s}\right]\right| < \infty \tag{1.15}$$

则当 $s<1$ 时，u_0 为非极限零点；若 $s\geqslant 1$，则为极限零点。式 (1.15) 意味着在 $u=u_0$ 附近，可以把 $P(u)$ 写成

$$P(u) = (u-u_0)^s Q(u) \tag{1.16}$$

式中:

$$Q(u_0)\neq 0 \qquad |Q(u_0)| < \infty \tag{1.17}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}P(u)}{\mathrm{d}u} = s(u-u_0)^{s-1}Q(u) + (u-u_0)^s Q'(u) \tag{1.18}$$

由于在式(1.17)条件下，$Q(u)$在u_0点总可展开成$(u-u_0)$的正幂次多项式(不可能包含负幂项，因为如果这样，则式(1.17)不能满足)。因此，$|Q'(u_0)|<\infty$，由式(1.18)：当 $s<1$ 时，在 poincare 相平面上(即以u_ξ为纵坐标，以 u 为横坐标所描绘的曲线)的$u=u_0$点，$|P'(u)|\to\infty$，这时对应于图 1-1 同宿(homoclinic)轨线的一个端点 B(孤波峰、谷处)，或闭合轨线的两个端点(周期解的峰、谷)；当$s\geqslant 1$时，$|P'(u)|<\infty$，这对应于同宿轨线的另一个端点(非拓扑孤波的真空态)或异宿(heterocline)轨线的两个端点(拓扑孤波的两个简并真空态)。

下面更直观地分析其意义。

当$s\geqslant 1$时，由于$|P'(u)|<\infty$，因而$P'(u)$也可在$u=u_0$展开成$(u-u_0)$的正幂次多项式，因此，在$u=u_0$

$$u''(\xi) = P'(u)u' \to 0$$

$$u'''(\xi) = P''(u)u'^2 + P'(u)u'' \to 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$u^{(n)}(\xi) \to 0$$

这就直观地说明，当$s\geqslant 1$时，u_0是$P(u)$的极限零点或是$u(\xi)$的极限值。因为，只有u_0为u的极限值时，才可能使各阶导数$u^{(n)}(\xi)(n\geqslant 1)$为零，证明是简单的。事实上，在$s\geqslant 1$时，式(1.13)的解在$u=u_0$附近的渐近行为是(由式(1.16))

$$\xi-\xi_0=\int_u^{u_0}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)} \quad \propto \quad \begin{cases}\ln|u-u_0| & (s=1)\\ \dfrac{1}{(u-u_0)^{s-1}} & (s>1)\end{cases} \tag{1.19}$$

显然，$u\to u_0$对应于$\xi\to\infty$，或者说，当$\xi\to\infty$时，$u\to u_0$，这再次说明了u_0是$u(\xi)$的极限值。

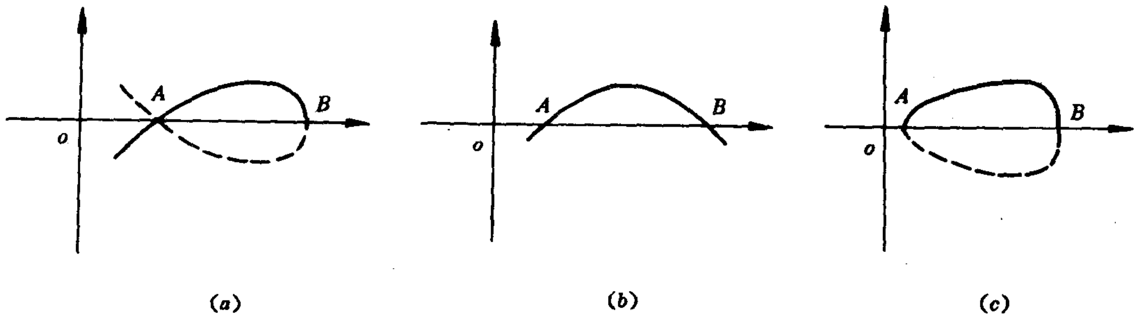


图 1-1

(*a*) 同宿轨线，*A* 为极限零点，*B* 为非极限零点，对应钟型孤波解；

(*b*) 异宿轨线，*A*，*B* 均为极限零点，对应 kink 解；

(*c*) 闭合轨线，*A*，*B* 均为非极限零点，对应周期解

当$s<1$时，由于$|P'(u)|\to\infty$，故用上面方法分析不方便，因在取极限过程有一些不确定性，但这时在$u=u_0$的渐近行为是

$$\xi-\xi_0=\int_u^{u_0}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)} \quad \propto \quad (u-u_0)^{1-s} \tag{1.20}$$

由于$s<1$，故当$u=u_0$对应于$\xi=\xi_0$；或者说$\xi=\xi_0$是$u(\xi)$极值点，极值是u_0。如果$u''(\xi_0)\neq 0$，$u'''(\xi_0)=0$，$u^{(4)}(\xi_0)\neq 0$，…，则u_0就是钟型极值。但若$u''(\xi_0)=0$，$u'''(\xi_0)\neq 0$，…，则u_0可能是$u(\xi)$的过渡态，而$u(\xi)$由两个同向 kink 首尾相接构成，$\xi=\xi_0$即为相接处的切点。其它情况，可作类似的讨论。

综上所述，在讨论式(1.12)、式(1.13)解的性质时应：

(1) 首先找到$P_1(u)$或$P(u)$的所有零点，对于式(1.12)，需要去掉使$P_1(u)<0$的区间；

(2) 判断各零点的阶数s，对于$s<1$的零点称为非极限零点，$s\geqslant 1$的称为极限点；

(3) 如果相邻两个零点u_1、u_2都是非极限零点，则在$u_1\leqslant u(\xi)\leqslant u_2$区间内存在周期解(这时轨线是闭合的)。这时有

$$\xi-\xi_0=\int_{u_1}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)}\qquad(u_1\leqslant u\leqslant u_2)$$

令

$$H(u)=\int_{u_1}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)}\tag{1.21}$$

则

$$u(\xi)=H^{-1}(\xi-\xi_0)\tag{1.22}$$

(4) 如果 u_1、u_2 都是极限零点，则在 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ 内存在 kink(扭结) 解。这时

$$H(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)}\qquad(u_0\leqslant u\leqslant u_2)\tag{1.23}$$

$$H(u)=\int_{u}^{u_0}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)}\qquad(u_1\leqslant u\leqslant u_0)\tag{1.24}$$

u_0 是 $\xi=\xi_0$ 时 $u(\xi)$ 的取值。基本暗孤子就属于这一类，这时轨线是异宿的；

(5) 如果 u_1 是极限零点，而 u_2 是非极限零点，则在 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ 时存在钟型孤波解。这时

$$H(u)=\int_{u}^{u_2}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)}\qquad(u_1\leqslant u\leqslant u_2)\tag{1.25}$$

当 $u_1\geqslant 0$ 时是明孤波解，当 $u_2\leqslant 0$ 时是暗钟型孤波解。如果 u_2 是极限零点，而 u_1 是非极限零点，则在 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ 时也存在钟型孤波解。这时

$$H(u)=\int_{u_1}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{P(u)}\qquad(u_1\leqslant u\leqslant u_2)\tag{1.26}$$

$u_1\geqslant 0$ 和 $u_2\leqslant 0$ 分别对应暗、明钟型孤波；在两种情况下，轨线都是同宿的。

现在讨论 $P(u)$ 为虚函数的情况。对于式 (1.12)，$P_1(u)<0$ 也属此类情况。这时，$P(u)=\pm\,\mathrm{i}\sqrt{|P_1(u)|}$，一般可设 $P(u)=\mathrm{i}G(u)$，$G(u)$ 是实函数。这时定义

$$R(u)=\int\frac{\mathrm{d}u}{G(u)}\tag{1.27}$$

则

$$u(\xi)=R^{-1}[\mathrm{i}(\xi-\xi_0)]\tag{1.28}$$

式中，$R(u)$ 积分的上、下限由上面所述几种情况分别给出，即对 $G(u)$ 的零点应如同上面对 $P(u)$ 的零点分析一样进行分析。

一般地说，如

$$w(\xi)=R^{-1}(\xi-\xi_0)\tag{1.29}$$

给出钟型孤波解，则 $u(\xi)$ 将是周期解，如钟型解 $\operatorname{sech}\xi\to\operatorname{sech}(\mathrm{i}\xi)=1/(\cos\xi)$(变成周期

解）；如果 $w(\xi)$ 是 kink，则 $u(\xi)$ 也可能是周期解；如果 $w(\xi)$ 是周期解，则 $u(\xi)$ 可能是钟型解或 kink 解。尤其，当 $w(\xi)$ 是无界周期时，对应 $u(\xi)$ 可能是有界孤波解，这种情况，在求解时，注意不要漏掉。

1.4 KdV 方程和 RLW 方程的行孤波解

令 $u(x, t)=u(\xi)$，$\xi=x-Dt$，则代入式(1.1)后，积分两次可得：

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=P_1(u) \tag{1.30}$$

$$P_1(u)=\frac{1}{3\mu}[-u^3+3Du^2+6Au+6B]$$

这是一个三次方程，一般有三个零点 $c_1<c_2<c_3$，可设

$$P_1(u)=\frac{-(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)}{3\mu} \tag{1.31}$$

则当 $u<c_1$ 时，$P_1(u)>0$；当 $c_1<u<c_2$ 时，$P_1(u)<0$；当 $c_1<u<c_3$ 时，$P_1(u)>0$；当 $u>c_3$ 时，$P_1(u)<0$。可见在 $c_2<u<c_3$ 内 $(P_1(u)>0)$ 存在周期解，因为 c_2、c_3 零点的阶 $s=1/2$, 因此为非极限零点；在 $c_1<u<c_2$ 内 $(P_1(u)<0)$ 存在周期解。即一般地讲，在 $c_1<u<c_3$ 内都是周期解。在 $u<c_1$ 或 $u>c_3$ 时有无界解（可能是非周期的，也可能是周期的）。但是，当 $c_2\to c_1$ 时，在 c_2（或 c_1）点零点阶数由 $s=1/2$ 退化为 $s=1$（两个零点合并）时，c_1（或 c_2）为极限零点，c_3 仍是非极限零点。于是有

$$\sqrt{3\mu}\,H(u)=\int_u^{c_3}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{P_1(u)}}=\int_u^{c_3}\frac{\mathrm{d}u}{(u-c_1)\sqrt{u-c_3}} \tag{1.32}$$

积分后求出逆函数得

$$u(\xi)=u_\infty+a\cdot\operatorname{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{a}{12\mu}}\left[x-\left(\mu_\infty+\frac{a}{3}\right)t\right]\right\} \tag{1.33}$$

式中，$u_\infty=c_1$，$a=c_3-c_1$ 分别是无穷远处的均匀态和孤波振幅。

若 $u_\infty=0$，$\mu=1$，则

$$u(x, t)=3D\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{D}{2}}(x-Dt) \tag{1.34}$$

可见波速与波幅成正比。同样，当 $c_2\to c_1$ 时，也可作类似的讨论。对于周期解，这里从略。

对式(1.3)即 RLW 方程积分两次有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=P_1(u)=\frac{1}{\beta D}\left[(D-1)u^2-\frac{1}{3}\lambda u^3+Au+B\right]$$

$P_1(u)$ 是一个三次多项式，因此它的解的性质及其具体求解过程完全与 KdV 方程的相同，这里不再详述。

1.5　Burgers 方程和 KP 方程的行孤波解

对式(1.3)积分可得

$$u_{\xi}=\frac{1}{2\mu}[u^{2}-2Du+C]\equiv P(u) \tag{1.35}$$

由此，令 $P'(u)=0$，可得 $u=u_{1,2}$，即为 $P(u)$ 的极值点，式(1.35)的零点是

$$u_{1,2}=D\pm\sqrt{D^{2}-C}\qquad(D^{2}>C)$$

只要积分常数 $C<D^{2}$，$P(u)$ 有两个实零点，其阶数都是 $s=1$，因此，都是极限零点。在 $u_1<u<u_2$ 之间存在 kink 解

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left\{(u_{1}+u_{2})-(u_{2}-u_{1})\tanh\left[\frac{u_{2}-u_{1}}{4\mu}(x-Dt)\right]\right\} \tag{1.36}$$

式中:

$$D=\frac{u_{2}+u_{1}}{2} \tag{1.37}$$

显然，$u(-\infty)=u_1$，$u(+\infty)=u_2$，这是一个激波（例如冲激波的扩散前锋等），μ 越小，激波越陡峭。

在式(1.6)中，取 $\mu=1$，$\lambda=\nu=12$，则对于 KP 方程有:

$$P(u)=4\left[-u^{3}-\frac{1}{4}(12p^{2}-q)u^{2}+\frac{B}{2}u+\frac{C}{2}\right] \tag{1.38}$$

$$u_{\xi}^{2}=P(u)$$

式中:

$$\xi=[x+py-qt]$$

同 KdV 一样，这是积分两次后得到的，而且一般情况(见图 1-2)也同样有三个零点(考虑都为实根的情况)$u_1<u_2<u_3$。三个零点把$(u_1,\ u_3)$区间分成两部分: 在其中之一上，$P(u)>0$; 在另一部分上$P(u)<0$。选择参数 p、q、C 使零点u_2移动，移动方向是使$p(u)<0$区域缩小，使u_2与u_1、u_3中的一个重合，在这时，这一点处的零点阶数由 $s=1/2$ 变成 $s=1$，因而成为极限零点，另一非重根零点仍是非极限零点($s=1/2$)，故在这区间存在明钟型孤波

$$\begin{gathered}u(\xi)=\alpha\operatorname{sech}^{2}\{\sqrt{\alpha}\,\xi\}\\ \alpha=\frac{1}{4}q-3p^{2}\end{gathered} \tag{1.39}$$

令

$$\alpha=k_{1}^{2}\qquad\sqrt{\alpha}\,p=k_{2}\qquad\sqrt{\alpha}\,q=\omega$$

则

$$u(x,\ t)=k_{1}^{2}\operatorname{sech}^{2}(k_{1}x+k_{2}y-\omega t) \tag{1.40}$$

式 (1.39) 成为

$$k_1\omega = 4(k_1^4 + 3k_2^2) \tag{1.41}$$

上式联系了k_1、k_2和 ω 三者之间的关系。

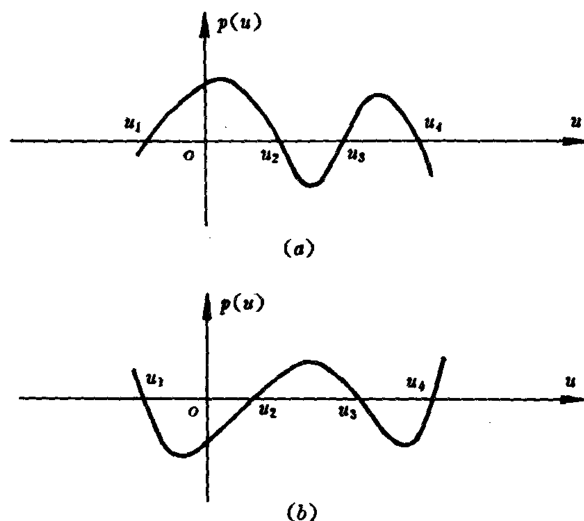


图 1-2

1.6 MKdV 方程的行孤波解

将式(1.2)积分两次可得

$$P(u) = -u^4 + Du^2 + Au + B \tag{1.42}$$

求根方程是四次实方程，一般有四个零点。由于复根是成对出现的，因此，就实根而言，或者四个(包括重根)，或者两个，或者没有。如果只有两个实根，则这两个零点是非极限零点且 $s=1/2$，若在这两零点之间 $P(u)>0$，则只有周期解。如果有四个实零点，则在 $P(u)$的正值区间(如图 1-2(a)的$u_1<u<u_2$，以及$u_3<u<u_4$和图 1-2(b)中的$u_2<u<u_3$)存在周期解，因四个零点都是非极限零点。

在图 1-2(a)中，$u_2\to u_3$时，则在$u_1<u<u_2$和$u_3<u<u_4$分别存在负钟型孤波解和正钟型孤波解，因这时u_2或u_3重根变成极限零点($s=1$)。

在图 1-2(b)中，当$u_2\to u_1$，$u_3\to u_4$时，则在$u_1<u<u_4$区间存在 kink(扭结)解，这时u_1、u_4都变成极限零点。如果$u_2\to u_1$，则在$u_1<u_3$区间存在正钟型孤波解；当$u_2\to u_4$时，则在$u_2<u<u_4$区间存在负孤波解。

对于图 1-2(a)的情况(如式(1.2)中取“+”号时且 $D>0$)，则:

在$u_2\to u_3$在$u_3\leqslant u\leqslant u_4$区间，有正孤波解

$$u(\xi) = \frac{u_4(u_3-u_1) + u_1(u_4-u_3)\tanh^2\left(\dfrac{k}{2}\xi\right)}{(u_3-u_1) + (u_4-u_3)\tanh^2\left(\dfrac{k}{2}\xi\right)} \tag{1.43}$$

在 $u_1 \leqslant u \leqslant {}_2$(或 u_3)区间，有负孤波解

$$u(\xi)=\frac{u_1(u_4-u_3)+u_4(u_3-u_1)\tanh^2\left(\frac{k}{2}\xi\right)}{(u_4-u_3)+(u_3-u_1)\tanh^2\left(\frac{k}{2}\xi\right)} \tag{1.44}$$

式中:

$$k=\sqrt{(u_4-u_2)(u_3-u_1)}$$

当式(1.42)中 $A=0$ 时，$u_1=-u_4$，$u_2=-u_3$，因此在极限 $u_2\to u_3$ 条件，只能有 $u_2\approx 0$，$u_3=0$，这时，式(1.43)、式(1.44)分别化为

$$u(\xi)=\pm u_1 \operatorname{sech} u_1\xi \tag{1.45}$$

对于图 1-2(*b*)的情况(如式(1.2)中取“−”号且 $D<0$ 时)，则:

当 $u_2\to u_1$，$u_3\to u_4$ 时($A=0$ 时有这种情况)，u_1、u_4 均为极限零点，这时有 kink 解

$$u(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-D}{2}}\tanh\left[\sqrt{\frac{-D}{2}}(x-Dt)\right] \tag{1.46}$$

当 $u_2\to u_1$ 时，有正孤波解 ($u_1\leqslant u\leqslant u_3$)

$$u(\xi)=\frac{u_3(u_4-u_1)-u_4(u_3-u_1)\tanh^2\left(\frac{k}{2}\xi\right)}{(u_4-u_1)-(u_3-u_1)\tanh^2\left(\frac{k}{2}\xi\right)} \tag{1.47}$$

当 $u_3\to u_4$ 时，$u_2\leqslant u\leqslant u_3$ 有负孤波解

$$u(\xi)=\frac{u_2(u_3-u_1)-u_1(u_3-u_2)\tanh^2\left(\frac{k}{2}\xi\right)}{-(u_3-u_1)+(u_3-u_2)\tanh^2\left(\frac{k}{2}\xi\right)} \tag{1.48}$$

1.7　NLS 方程和 Sine−Gordon 方程的行孤波解

对于式(1.8)，作变换

$$u=\Phi(x,\ t)e^{i\theta(x,\ t)} \tag{1.49}$$

代入式(1.8)并分离实部与虚部，则:

$$\Phi_{xx}-\Phi\theta_t-\Phi\theta_x^2-2\Phi^3=0$$
$$\Phi\theta_{xx}+2\Phi_x\theta_x+\Phi_t=0$$

设 $\xi_2=x-D_2t$，$\xi_1=x-D_1t$，$\theta=\theta(\xi_1)$，$\Phi=\Phi(\xi_2)$，则可以看到

$$\frac{\partial}{\partial t}=-D_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}=-D_2\frac{\partial}{\partial\xi_2},$$

于是:

$$\Phi_{\xi_2\xi_2}+D_1\Phi\theta_{\xi_1}-\Phi(\theta_{\xi_1})^2+2\Phi^3=0 \tag{1.50}$$

$$\Phi\theta_{\xi_1\xi_1}+2\Phi_{\xi_2}\theta_{\xi_1}-D_2\Phi_{\xi_2}=0 \tag{1.51}$$

考虑到 $\partial/\partial x=\partial/\partial\xi_1=\partial/\partial\xi_2$，式 (1.51) 可改写成

$$\Phi^2\theta_{xx}+2\Phi\Phi_x\theta_x-D_2\Phi\Phi_x=0$$

对上式积分

$$\Phi^2(2\theta_x-D_2)=\varphi(t)$$

可取 $\varphi(t)=0$，于是 $\theta_x=D_2/2$，代入式 (1.50)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\xi_2}\right)^2=P_1(\Phi)=-\Phi^4+\frac{1}{4}(D_2^2-2D_1D_2)\Phi^2+C$$

$P_1(\Phi)$的四个零点是：$\Phi_{1,2}=\pm\left[b+\sqrt{b^2+4C}\right]/2$；$\Phi_{2,4}=\pm\left[b-\sqrt{b^2+4C}\right]/2$。式中，$b=(D_2^2-2D_1D_2)/4$。一般情况下(即无重根时)，它们都是非极限零点，且 $s=1/2$。当 C 为不同值时：

当C＞0时，则$\Phi_2<\Phi_3<0<\Phi_4<\Phi_1$，则在$\Phi_2\leqslant\Phi\leqslant\Phi_3$和$\Phi_4\leqslant\Phi\leqslant\Phi_1$两区域中都存在着周期解。

当$-b^2/4<C<0$时，$\Phi_2<\Phi_4<0<\Phi_3<\Phi_1$，于是在$\Phi_2\leqslant\Phi\leqslant\Phi_4$和$\Phi_3\leqslant\Phi\leqslant\Phi_1$两区域内也是周期解。

当 $C=0$ 时，$\Phi_3=\Phi_4=0$，$\Phi_1=-\Phi_2$，这时有在孤波解

$$\Phi=\Phi_1\mathrm{sech}[\mathrm{j}\Phi_1(x-D_2t)] \tag{1.52}$$

对于 Sine-Gordon 方程，设 $u=u(\xi)$，$\xi=x-Dt$，代入式(1.9)

$$(D^2-1)u_{\xi\xi}=-\sin u$$

可解出

$$u(x,\ t)=\pm\arctan\left[\pm\frac{(1-D^2)^{1/2}}{x-Dt}\right] \tag{1.53}$$

在上式中，内、外取同号时表示 $0\leqslant|u|\leqslant 2\pi$ 之间的正扭结解；且取负时，$u<0$；取正时，$u>0$。当内、外取异号时，表示反扭结解。

第 2 章

孤子方程的解析解法

如上所述，孤立子现象存在于大量非线性物理中，从而得出了描述孤波演化的各种非线性方程。第一章中的孤波行波解只是这些方程的最简单的解。孤立子的性质及其理论研究还远不止如此。这些具有孤立子解的非线性方程有一系列重要的共同特征：它们具有无穷个守恒律；有化为线性方程求解的方法，即逆散射方法；存在 Backlund 变换；完全可积性等。此外，还出现了许多独特的支分：Lax 和 AKNS 推广逆散射法、Darboux 变换法、Hirota 方法、变分法和不变量方法、各种微扰法。本章将介绍其中一些方法。

2.1　逆散射方法——KdV 方程

2.1.1　逆散射方法的一般论述

现以 KdV 方程为例，说明单分量方程的逆散射求解过程。对于 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

令

$$u = v^2 + v_x + \lambda \tag{2.2}$$

代入式(2.1)，并作变换

$$v = \frac{\psi_x}{\psi} \tag{2.3}$$

于是有

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \tag{2.4}$$

这就是以 $u(x, t)$ 为势函数的 Schrodinger 方程。这个方程的求解（正、逆问题）是量子力学中非常成熟的问题，因此，如果能从式 (2.4) 中反演出 $u(x, t)$，则式 (2.1) 的求解即告结束。

于是，设想从 $u(x, t)$ 的初值 $u(x, 0)$ 出发，由式 (2.4) 求解出式 (2.4) 中的谱参数 λ。一般情况下，λ 是随时间演化的；但后面的一个定理说明，λ 是与时间无关的；这使得以上求解框架能够实现。由量子力学知道，当 $|x| \to \infty$ 时 $|u| \to \infty$，对应于量子力学无穷远处为零势点的情况，于是在无穷远处对应于自由态，因此，在 $\lambda = k^2 > 0$ 时，

式 (2.4) 有平面波解，即有边界条件:

$$\left.\begin{aligned} \psi(z, k, t) &\sim e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx} \quad (x\to +\infty) \\ \psi(x, k, t) &\sim a(k, t)e^{-ikx} \quad (x\to -\infty) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

在 $u(x, 0)$ 为势阱的情况下，对"能量"(即谱参量)$\lambda=-k_m^2<0\ (m=1, 2, \cdots, N)$ 有有限个 (N 个) 束缚态，其本征值是离散的。对束缚态，在无穷远处"粒子"(即量子力学中的粒子) 出现的几率为零，因它被束缚在有限空间中，因此有边界条件:

$$\left.\begin{aligned} \psi_m(x, k_m, t) &\sim c_m(t)e^{-k_m x} \quad (x\to +\infty) \\ \psi_m(x, k_m, t) &\sim e^{k_m x} \quad (x\to -\infty) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中，$b(k, t)$ 为反射系数；$a(k, t)$ 为透射系数；$c_m(t)=c(k_m, t)$ 是标志衰减的因子。由量子力学的归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m|^2 dx = 1 \qquad |a|^2+|b|^2=1$$

式(2.5)、式(2.6)中的$a(k, t)$、$b(k, t)$、$c_m(t)$的计算步骤是：首先由势 $u(x, 0)$所对应的 Schrödinger 方程式(2.4)，分 $\lambda>0$ 和 $\lambda<0$ 两种情况，求解出波函数 $\psi(x, t)$。$\lambda<0$ 时是本征值问题，这在量子力学中是一个简单过程(但步骤往往很繁)，求解出 $\psi(x, k, t)$和各个$\psi_m(x, k_m, t)$之后，取极限即可得到其渐近式(2.5)、式(2.6)，于是 $b(k, 0)$、$a(k, 0)$ 和$c_m(0)$在取极限过程即可得到。但这些系数只是 $t=0$ 时的值；对在任意 t 的值，需由下面定理得到。得到各个系数后，再由散射数据求出式(2.4)中的 $u(x, t)$，这是逆散射问题，具体过程是由以下 Gel′fand–Levitan–Marchenko(G–L–M)方程求解:

$$K(x, y, t)+B(x+y,t)+\int_x^{\infty} B(y+z,t)K(x, z, t)dz=0 \tag{2.7}$$

$$y>x \quad K(x, z, t)\to 0 \quad (当 z\to\infty)$$

令

$$\hat{K}(x, t)=K(x, x, t)$$

可求出

$$u(x, t)=-2\frac{\partial}{\partial x}\hat{K}(x, t) \tag{2.8}$$

式中:

$$B(x, t)=\sum_{m=1}^{N} c_m^2(t)e^{-k_m x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k, t)e^{ikx}dx$$

关于怎样由式(2.4)及渐近式(2.5)、式(2.6)，得到式(2.7)，可参考葛德彪《电磁逆散射原理》(西北电讯工程学院出版社)。下面给出谱参数时间无关及散射系演化的定理[39,40]。

定理 1　考虑 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx}+(\lambda-u)\psi=0 \qquad -\infty<x<+\infty \tag{2.9}$$

如果 $u(x, t)$ 是 KdV 方程式 (2.1) 的解，且当 $|x|\to\infty$ 时急剧趋于零，则式 (2.9) 的离散特

征值 λ_1，λ_2，…，λ_N 为时间无关常数。

证　由式(2.9)解出 $u=(\psi_{xx}/\psi)+\lambda$，代入 KdV 方程并乘以 ψ^2 得:

$$\lambda_t\psi^2+[\psi R_x-\psi_x R]_x=0 \tag{2.10}$$

$$R\equiv\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x \tag{2.11}$$

当 $|x|\to\infty$ 时，λ_n 的特征函数及其导数趋于 0。对式 (2.10) 积分有

$$\lambda_{nt}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x=\lambda_{nt}=0 \tag{2.12}$$

其中用到波函数的归一化条件，上式即为

$$\lambda_n=\text{常数} \tag{2.13}$$

证　毕

定理 2　在定理 1 的条件下，式(2.9)的离散数据的演化由下面给出:

$$c_n(t)=c_n(0)\mathrm{e}^{4k_n^3t}\quad b(k,\ t)=b(k,\ 0)\mathrm{e}^{8ik^3t}\quad a(k,\ t)=a(k,\ 0) \tag{2.14}$$

式中，$c_n(0)$、$b(k,\ 0)$、$a(k,\ 0)$ 为 KdV 方程的初始值 $u(x,\ 0)$ 所决定的散射数据。

证　由式(2.13)即 $\lambda_t=0$，式(2.10)变成

$$\psi R_{xx}-R\psi_{xx}=0$$

即

$$R_{xx}+(\lambda-u)R=0$$

因此与式 (2.9) 有完全相同的形式，即 R 的解可由 ψ 的解的线性组合表示，即

$$R=C(t)\psi+D(t)\varphi \tag{2.15}$$

φ 是与 ψ 线性无关的解，可取为

$$\varphi=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\psi^2} \tag{2.16}$$

对于离散谱 λ_n 的本征函数，则是

$$\varphi_n=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\psi_n^2} \tag{2.17}$$

由于当 $|x|\to\infty$ 时，$|\psi_n|$ 是指数衰减的，故 φ_n 是无界函数，因此式(2.15)右端 $D(t)=0$，把式(2.15)代入式(2.11)，并乘以 ψ_n 后积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\psi_n^2\right)_t\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\psi_n\psi_{nxx}-\frac{3}{2}\psi_{nx}^2-3\lambda\psi_n^2\right)_x\mathrm{d}x=C(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x \tag{2.18}$$

由归一化条件及边界条件，上式左端为零。因此 $C(t)=0$，又因 $x\to+\infty$ 时 $\psi\sim c_n(t)\mathrm{e}^{-k_nx}$，由式(2.15)及式(2.11)可得

$$\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t}=4k_n^3c_n(t)$$

即

$$c_n(t)=c_n(0)e^{4k_n^3 t}$$

对于连续谱，可以认为 λ 与 t 无关，当 $x\to-\infty$ 时 $\psi\sim a(k,\ t)e^{-ikx}$，注意到，对于连续谱式 (2.15) 中的 $C(t)\neq 0$，$D(t)\neq 0$，代入式 (2.11) 及式 (2.15) 可得

$$(at+ik^3a+3k^3a)e^{-ikx}=C(t)a(k,\ t)e^{-ikx}+\frac{D(t)}{a}e^{-ikx}\int_0^x e^{2ikx}dx$$

即

$$a_t+4ik^3a=C(t)a+\frac{D(t)}{a}\int_0^x e^{2ikx}dx$$

因此$D(t)=0$，且

$$a_t+(4ik^3-C(t))a=0 \tag{2.19}$$

当 $X\to+\infty$ 时，$\psi\sim e^{-ikx}+b(k,\ t)e^{ikx}$ 代入式 (2.11) 及式 (2.15) 可得:

$$\begin{aligned}&C(t)=4ik^3\\&b_t=8^{ik^3}b\end{aligned} \tag{2.20}$$

即

$$\begin{aligned}&b(k,\ t)=b(k,\ 0)e^{8ik^3t}\\&a(k,\ t)=a(k,\ 0)\end{aligned}$$

证　毕

2.1.2　KdV 方程解的几点性质

KdV 方程解具有如下几点性质:

(1) 只有那些使 $b(k,\ 0)=0$(对任意 k)的初始注入 $u(x,\ 0)$，即无反射势 $u(x,\ 0)$，才支持纯正孤波解。在 $b(k,\ 0)\neq 0$ 的情况下，一般是孤波解与色散波并存。

(2) 即使是以 $\mathrm{sech}^2(x)$方式注入，也只在特定幅值时才支持纯正孤波。设

$$u(x,\ 0)=-U_0\mathrm{sech}^2x$$

则作变换 $T=\tanh x$，Schrödinger 方程变为 associated–Legendre 方程

$$\frac{d}{dT}\left[(1-T^2)\frac{d\psi}{dT}\right]+\left[U_0+\frac{\lambda}{(1-T^2)}\right]\psi=0$$

当 $\lambda=k^2>0$ 时，只有连续谱，且本征函数是

$$\hat{\psi}(x,\ k)=a(k)2^{ik}(\mathrm{sech}\,x)^{-ik}F[\bar{a},\ \bar{b};\ \bar{c},\ z] \tag{2.21}$$

式中:

$$\bar{a}=\frac{1}{2}-ik+\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}$$

$$\bar{b}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}k-\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}$$

$$\bar{c}=1-\mathrm{i}k \qquad z=\frac{1}{2}(1+T)$$

$F[\bar{a},\ \bar{b};\ \bar{c},\ z]$是合流超几何函数(hypergemetric function)，且$z\to 0^+ \Rightarrow x\to -\infty$，$z\to 1^- \Rightarrow x\to +\infty$，于是当$x\to\pm\infty$时，有渐近式:

$$\hat{\psi}(x,\ k)\to a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad x\to-\infty$$

$$\hat{\psi}(x,\ k)\to \frac{a(k)\Gamma(\bar{c})\Gamma(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})}{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+\frac{a(k)\Gamma(\bar{c})\Gamma(\bar{c}-\bar{a}-\bar{b})}{\Gamma(\bar{c}-\bar{a})\Gamma(\bar{c}-\bar{b})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad x\to+\infty$$

于是:

$$\begin{aligned} a(k)&=\frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})\Gamma(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})}\\ b(k)&=\frac{a(k)\Gamma(\bar{c})\Gamma(\bar{c}-\bar{a}-\bar{b})}{\Gamma(\bar{c}-\bar{a})\Gamma(\bar{c}-\bar{b})}\end{aligned} \tag{2.22}$$

当 $b(k)\neq 0$ 时，G–L–M 方程的解难以用封闭形式给出，一般要借助渐近分析和数值分析，因此这里只讨论 $b(k)=0$ 的情况。由 Γ 函数的性质

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)=\frac{\pi}{\cos \pi z}$$

于是，在式(2.22)中$b(k)$的分母

$$\Gamma(\bar{c}-\bar{a})\Gamma(\bar{c}-\bar{b})=\Gamma\left[\frac{1}{2}-\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}+\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\cos\left[\pi\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]}$$

因此，$b(k)=0$的条件是

$$\pi\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}=\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow U_0=N(N+1) \tag{2.23}$$

N是任意正整数。也就是，当U_0以式(2.23)形式注入时，才有纯正孤子解。

(3) 束缚态本征值数目可通过 $a(k)$、$b(k)$ 的奇点数目得到，若式 (2.23) 中 $a(k)$、$b(k)$ 有确定有限值，则代表连续谱及其波函数是确定的。但当 $a(k)$、$b(k)$ 变成奇异（如无限值）时，标志用连续谱（自由态）方式对波函数描述失效，此时必定对应于束缚态（离散谱），因此，$a(k)$ 及 $b(k)$ 的奇异点数目必定对应于束缚态的数目，即本征值和本征函数的数目，并且这些奇异点同时给出了本征值。由于函数 $\Gamma(\bar{b})$ 在 $\bar{b}$ 为负整数时变为无穷，故在上半平面上，这些奇异点是使 $\bar{b}=-m(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 的 k 值，即

$$k=\mathrm{i}\left[\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.24}$$

于是，只要$\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}>\frac{1}{2}$，即 $\infty>U_0>0$，就有有限个离散本征值，本征值数目应是使

$$\left[\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\right]>m$$

的所有 m 取值（保证 k 在上半平面，即 $k=+\mathrm{i}|k|\Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\rightarrow \mathrm{e}^{-|k|x}$ 是衰减的）。

于是，本征值数目是

$$N_{\mathrm{Eng}}=\mathrm{int}\left[\left(U_0+\frac{1}{4}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\right]+1 \tag{2.25}$$

上式(仅在上式)中int[・]代表取整运算，当[・]中的值是整数时，式(2.25)后的+1 取消。特别是，当$U_0=N(N+1)$时，式(2.24)有 $k=\mathrm{i}(N-m)=\mathrm{i}\,n(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，即$k=\mathrm{i}\kappa_n=\mathrm{i}\,n$为束缚态 N 个本征值。一个本征值对应一个孤子态，其孤子的速度是$-4\kappa_n^2$，其幅值正比速度。

(4) 上面已看到束缚态本征值可由式(2.24)给出，即当$U_0=N(N+1)$时，$\kappa_n=n$。事实上,本征值还可通过直接求解 Legendre 方程得到。只要令$\lambda=-\kappa_n^2$，$U_0=N(N+1)$代入，也可求解得$\kappa_n=n(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)(k=\mathrm{i}\kappa)$，相应的本征值函数是$P_N^n(T)$，即 associated Legendre 函数，

$$P_N^n(T)=(-1)^n\frac{1}{N!\ 2^n}(1-T^2)^{n/2}\frac{\mathrm{d}^{n+N}}{\mathrm{d}T^{n+N}}[(T^2-1)^n] \tag{2.26}$$

2.1.3 KdV 方程解的初值问题

前面已讨论了在 $U_0=N(+1)$的情况下，$b(k)=0$，这时 G–L–M 方程有封闭形式的解，且本征值为 $\lambda_n=-\kappa_n^2$，$\kappa_n=n\,(n=1,2,\cdots,N)(k=\mathrm{i}\kappa)$相应的本征函数是 $P_N^n(T)$。下面，给出两个具体例子，以对整个逆散射方法的步骤作一说明。

1. $N=1$ 的单孤子情形

当 $N=1$ 时，$U=2$，$t=0$ 时 Sturm–Liouville 本征值方程是

$$\psi_{xx}+(\lambda+2\,\mathrm{sech}^2x)\psi=0$$

变换后

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left\{(1-T^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}T}\right\}+\left(2+\frac{\lambda}{1-T^2}\right)\psi=0$$

式中，$T=\tanh x$，这时只有当 $\lambda=-\kappa^2\,(<0)$且 $\kappa=\kappa_1=1$ 时才有束缚解，相应的离散本征函数是

$$\psi_1(x)\propto P_1^1(\tanh x)=-\,\mathrm{sech}\,x$$

归一化以后

$$\psi_1(x)=2^{-1/2}\mathrm{sech}\,x$$

式中用到 sech^2x 的无穷积分为 2，$\psi_1(x)$的符号也是无关紧要的，这个解的渐近行为是

$$\psi_1(x)\sim 2^{1/2}\mathrm{e}^{-x}\qquad x\rightarrow\infty$$

因此，$c_1(0)=2^{1/2}$，于是在任意时间，由 $c(t)$ 的演化方程有

$$c_1(t)=2^{1/2}e^{4t}$$

对于重建 $u(x,t)$ 来说，因为我们已经选择了这样一个使 $b(k)=0$ 的初始剖面，上面这个变换式足够用了。于是 G－L－M 方程中的

$$B(x;\ t)=2^{8t-x}$$

于是G－L－M方程是

$$K(x,z;t)+2^{8t-(x+z)}+2\int_x^{+\infty}K(x,y;\ t)e^{8t-(y+z)}dy=0$$

这意味着可取

$$K(x,z;\ t)=L(x,t)e^{-z}$$

代入上面方程有

$$L+2e^{8t-x}+2Le^{8t}\int_x^{+\infty}e^{-2y}dy=0$$

解之得

$$L(x,t)=-\frac{2e^{8t-x}}{1+e^{8t-2x}}$$

于是可得

$$u(x,t)=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2e^{8t-2x}}{1+e^{8t-2x}}\right)=-2\,\mathrm{sech}^2(x-4t)$$

这就是一个幅值为 2，速度为 4 的孤波。

2. $N=2$ 的双孤子的情形

当 $N=2$ 时，$U=N(N+1)=6$，于是 sturm－Liouville 方程是

$$\frac{d}{d\tau}\left\{(1-T^2)\frac{d\psi}{dT}\right\}+\left(6+\frac{\lambda}{1-T^2}\right)\psi=0$$

这个方程在 $\lambda=-\kappa^2(<0)$ 时，有两个束缚解，即 $\kappa=\kappa_1=1$ 和 $\kappa=\kappa_1=2$。相应的归一化本征函数是:

$$\psi_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\tanh x\cdot\ \mathrm{sech}\,x$$

$$\psi_2(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sech}^2x$$

这些解的渐近行为是:

$$\psi_1(x)\sim\sqrt{6}e^{-x}$$

$$\psi_2(x)\sim2\sqrt{3}e^{-2x}\qquad x\to+\infty$$

因此:

$$c_1(0)=\sqrt{6}\qquad c_2(0)=2\sqrt{3}$$

$$c_1(t)=\sqrt{6}e^{4t}\qquad c_2(t)=2\sqrt{3}e^{32t}$$

在前面已选择 $b(k)=0$（对任意 k），因此对任意 t，也有 $b(k,t)=0$，于是函数

$$B(x,t)=6\mathrm{e}^{8t-x}+12\mathrm{e}^{64t-2x}$$

由于在级数中有两项，因此G－L－M方程是

$$K(x,z;t)+6\mathrm{e}^{8t-(x+z)}+12\mathrm{e}^{64t-2(x+z)}+\int_x^{+\infty}K(x,y;t)\{6\mathrm{e}^{8t-(y+z)}+12\mathrm{e}^{64t-2(y+z)}\}\mathrm{d}y=0$$

容易看出，$K(x,z;t)$的解可写成下面形式:

$$K(x,z;t)=L_1(x,t)\mathrm{e}^{-z}+L_2(x,t)\mathrm{e}^{-2z}$$

这是由于 $B(x,t)$ 是分离变量型函数，代入 G－L－M 方程并合并 e^{-z} 和 e^{-2z} 的系数，可得两个方程:

$$L_1+6\mathrm{e}^{8t-x}+6\mathrm{e}^{8t}\left(L_1\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y+L_2\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y\right)=0$$

$$L_2+12\mathrm{e}^{64t-2x}+12\mathrm{e}^{64t}\left(L_1\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y+L_2\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y\right)=0$$

这是一个关于 L_1、L_2 的非齐次线性方程组，化简后是:

$$L_1+6\mathrm{e}^{8t-x}+3L_1\mathrm{e}^{8t-2x}+2L_2\mathrm{e}^{8t-3x}=0$$

$$L_2+12\mathrm{e}^{64t-2x}+4L_1\mathrm{e}^{64t-3x}+3L_2\mathrm{e}^{64t-4x}=0$$

于是有解:

$$L_1=\frac{6(\mathrm{e}^{72t-5x}-\mathrm{e}^{8t-x})}{D}$$

$$L_2=\frac{-12(\mathrm{e}^{64t-2x}+\mathrm{e}^{72t-4x})}{D}$$

式中:

$$D=1+3\mathrm{e}^{8t-2x}+3\mathrm{e}^{64t-4x}+\mathrm{e}^{72t-6x}$$

因此，KdV方程的解可写成

$$u(x,t)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x,x;\ t)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{L_1\mathrm{e}^{-x}+L_2\mathrm{e}^{-2x}\right\}$$

$$=12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\mathrm{e}^{8t-2x}+\mathrm{e}^{72t-6x}-2\mathrm{e}^{64t-4x}}{D}\right\}$$

化简后可得

$$u(x,t)=-12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)]^2}$$

为了说明上式是双孤子解，作代换 $\xi=x-16t$，上式变成

$$u(x,t)=-12\frac{3+4\cosh(2\xi+24t)+\cosh(4\xi)}{[3\cosh(\xi-12t)+\cos(3\xi+12t)]^2}$$

把 ξ 固定（即在速度为 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=16$ 的坐标系中观察），在 $t\to\pm\infty$ 时，

$$u(x,t) \to -8\,\mathrm{sech}^2\left(2\xi \mp \frac{1}{2}\ln 3\right)$$

若作代换 $\eta = x - 4t$，并把 η 固定，由当 $t \to \pm\infty$ 时

$$u(x,t) \to -2\,\mathrm{sech}^2\left(\eta \pm \frac{1}{2}\ln 3\right)$$

也就是说在 $t \to \pm\infty$ 时（即充分的过去和充分的将来）都能观察到两种以不同速度运动的孤波。

由于远离孤波处，$u(x,t)$为零，故$t \to \pm\infty$的渐近解可表示为

$$u(x,t) \to -8\,\mathrm{sech}^2\left(2\xi \mp \frac{1}{2}\ln 3\right) - 2\,\mathrm{sech}^2\left(\eta \pm \frac{1}{2}\ln 3\right)$$

可以看到：小孤波幅值为 2，速度为 4；大孤波幅值为 8，速度为 16。小孤波从$-\infty$运动到$+\infty$要产生相移$-\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 = -\ln 3$，而大孤波则产生相移$\frac{1}{2}\ln 3 - \left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = \ln 3$。

3. N-孤子解

当$U = N(N+1)$时，只有 N 个离散谱，没有连续谱(即对任意 k，$b(k)=0$)。离散本征值是$\lambda = -\kappa^2$，$\kappa = \kappa_n = n\ (n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$。这时，本征方程的解是

$$\psi_n(x) \propto P_N^n(\tanh x)$$

其渐近解是

$$\psi_n(x) \to c_n(0)\mathrm{e}^{-nx} \qquad x \to +\infty$$

式中，$c_n(0)$应由归一化条件确定，于是

$$c_n(t) = c_n(0)\mathrm{e}^{4n^3 t}$$

这时 G-L-M 方程中的

$$B(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0)\mathrm{e}^{8n^3 t - nx}$$

因此 G-L-M 方程是

$$K(x,z;t) + \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0)\mathrm{e}^{8n^3 t - 12(x+z)} + \int_x^{+\infty} K(x,y;t)\sum_{n=1}^{N} c_n^2(0)\mathrm{e}^{8n^3 t - n(y+z)}\mathrm{d}y = 0$$

由于$B(x,t)$仍是分离变量型函数

$$B(x+z,t) = \sum_{n=1}^{N} X_n(x,t)Z_n(z,t)$$

显然，式中 $Z_n(z,t) = \mathrm{e}^{-k_n z} = \mathrm{e}^{-nz}$，于是 $K(x,z;t)$ 可选为

$$K(x,z;t) = \sum_{n=1}^{N} L_n(x,t)Z_n(z,t)$$

代入 G-L-M 方程并比较$Z_n(z,t)$的系数可得

$$L_n(x,t) + X_n(x,t) + \sum_{m=1}^{N} L_m(x,t)\int_x^{+\infty} Z_m(y,t)X_n(y,t)\mathrm{d}y = 0 \qquad (n = 1,2,\cdots,N)$$

这是一个关于各个 L_n 的 N 元非齐次线性方程，因此有确定的唯一解，写成矩阵形式是

$$[A]\,[L]=[B]$$

式中，$[L]$、$[B]$是列矢量(矩阵)，其元素是L_n和B_n、A_{mn}。其中:

$$B_n=c_n^2(t)\mathrm{e}^{-\kappa_n x}=c_n^2(0)\mathrm{e}^{8n^3t-nx}$$

$$A_{mn}=\delta_{mn}+c_m^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-(\kappa_m+\kappa_n)x}}{\kappa_m+\kappa_n}$$

于是

$$[L]=-[A]^{-1}[B]$$

由于$K(x,x)=[E]^T[L]$，这里的列矢量矩阵$[E]$的元素$E_n=\mathrm{e}^{-\kappa_n x}$。注意到下面关系有用的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_{mn}=-c_n^2\mathrm{e}^{-(\kappa_m+\kappa_n)x}=-B_mE_n$$

因此

$$K(x,x)=[E]^T[L]=\sum_{m=1}^{N}E_mL_m=-E_mA_{mn}^{-1}B_n=A_{mn}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_{mn}$$

$$=\mathrm{tr}\left(A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{1}{|A|}\frac{\mathrm{d}|A|}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|A|$$

于是

$$u(x,t)=-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln|A|$$

这里$|A|=\mathrm{Det}[A]$，现在把 $C_n(t)$ 及

$$X_n(x,t)=c_n^2(0)\mathrm{e}^{8n^3t-nx}$$

$$Z_n(x,t)=\mathrm{e}^{-nz}$$

代入可得 $u(x,t)$，如果令 $\xi_n=x-4\kappa_n^2t=x-4n^2t$ 并取极限，在 ξ_n 固定情况下

$$u(x,t)\to-2n^2\mathrm{sech}^2[n(x-4n^2t)\mp x_n]\qquad(n=1,2,\cdots,N)$$

而x_n则由

$$\mathrm{e}^{+2x_n}=\prod_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\left|\frac{n-m}{n+m}\right|^{\mathrm{sgn}(n-m)}\qquad(n=1,2,\cdots,N)$$

确定。于是，当$t\to\pm\infty$时

$$u(x,t)\to-2\sum_{n=1}^{N}n^2\mathrm{sech}^2[n(x-4n^2t)\mp x_n]$$

因此，$u(x,t)$ 代表 N–孤子解。

以上求解的前提是无反射势,对于有反射势的情况,即 $b(k)\neq0$，许多文献(如〔2〕，〔28〕等)对一些较简单问题作了讨论，有兴趣的读者可以进一步参考这些文献。

2.2 Lax 算子与 AKNS 推广

2.2.1 单分量情形

借鉴量子力学，引入 Lax 算子，AKNS 以此为基础，把前面求解 KdV 方程的方法推广成一般形式。量子力学中的 Schrödinger 方程(见曾谨言《量子力学》上册)为:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=\hat{H}\psi(t)\\
&\hat{H}=\frac{2\pi}{h}\left[-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

对上式作形式积分可得 (设 $\hat{H}$ 不显含 t)

$$
\psi(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\psi(0)
\tag{2.28}
$$

引入么正变换:

$$
\begin{aligned}
&\hat{U}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\\
&\hat{U}^{+}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

则:

$$
\begin{aligned}
&\hat{U}(0)=1\\
&\hat{U}^{+}\hat{U}=\hat{U}\hat{U}^{+}=1\Rightarrow\hat{U}^{-1}=\hat{U}^{+}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

式 (2.29) 用到 $\hat{H}$ 厄米 (Hermite) 性，即 $\hat{H}^{+}=\hat{H}$，式 (2.28) 变成:

$$
\begin{aligned}
&\psi(t)=\hat{U}(t)\psi(0)\\
&\psi^{*}(t)=\hat{U}^{+}\psi^{*}(0)
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

代表 $\hat{U}(t)$ 把 $t=0$ 时的波函数变换成 t 时刻的波函数，如果存在一力学量 $\hat{A}$ 满足

$$
\hat{A}\psi(0)=\lambda\psi(0)
\tag{2.32}
$$

则把 $\hat{U}(t)$ 作用其上并利用式 (2.30)，有

$$
(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{+})[\hat{U}\psi(0)]=\lambda\hat{U}\psi(0)
\tag{2.33}
$$

引入:

$$
\begin{aligned}
&\hat{A}(t)=\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{+}\\
&\psi(t)=\hat{U}\psi(0)
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

式(2.33)成为

$$
\hat{A}(t)\psi(t)=\lambda\psi(t)
\tag{2.35}
$$

式(2.34)代表 $\hat{U}(t)$将 $t=0$ 时的算符及波函数变换成 t 时刻的对应量。同时，这也说明了

$\hat{A}(t)$与$\hat{A}$有相同的本征值，但本征值函数各不相同。或者说，如果 Schrödinger 算符给定，则 λ 单值决定；反过来则不然，即使给定 λ，Schrödinger 算符不能单值决定，即其中的势$u(x, t)$不能决定，以式(2.34)、式(2.35) 中的么正变换移动的系统给出了所有相同的本征值。$\hat{U}(t)$随时间变化是

$$\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t}=\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right)\hat{A}\hat{U}+\hat{U}\hat{A}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}=\mathrm{i}\left[\hat{A}(t), \hat{H}(t)\right] \tag{2.36}$$

式中:

$$\left[\hat{A}(t), \hat{H}(t)\right]=\hat{A}(t)\hat{H}(t)-\hat{H}(t)\hat{A}(t) \tag{2.37}$$

这里，$\hat{H}(t)=\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{+}$，并用到式 (2.29)。有了这些关系式，可证明本征值 λ 不随时间变化，由式 (2.35),

$$\mathrm{i}\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t}\psi(t)+\mathrm{i}\hat{A}(t)\frac{\partial \psi(t)}{\partial t}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi(\mathrm{t})+\lambda\mathrm{i}\frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$$

将式(2.27)，式(2.29)，式(2.36)，式(2.37)代入上式

$$-\hat{A}(t)\hat{H}(t)\psi(t)+\hat{H}(t)\hat{A}(t)\psi(t)+\hat{A}(t)\hat{H}\psi(t)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi(\mathrm{t})+\lambda\hat{\mathrm{H}}\psi(\mathrm{t}) \tag{2.38}$$

由于 $\hat{A}(t)\hat{H}(t)\psi(t)=\hat{A}(t)\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{+}U\psi(0)=\hat{U}\hat{A}\hat{H}\psi(0)$，$\hat{A}(t)\hat{H}\psi(t)=\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{+}\hat{H}\hat{U}\psi(0)=\hat{U}\hat{A}\hat{H}\hat{U}^{+}\hat{U}\psi(0)=\hat{U}\hat{A}\hat{H}\psi(0)$，这里已用到$\hat{U}^{+}$、$\hat{U}$与$\hat{H}$是对易的性质，这一点可由式(2.29)看出，$\hat{H}$的任何次幂都与自身对易。因此式(2.38)最后给出

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0$$

即本征值不随时间变化。现在回到一般非线性方程

$$u_t=N(u) \tag{2.39}$$

定理 3 如果能从式(2.39)出发找到(如通过某种变换)一个依赖于$u(x, t)$的线性算子$\hat{L}$和一个线性厄米算子(即自伴算子)$\hat{H}$，满足

$$\mathrm{i}\frac{\partial \hat{L}}{\partial t}=\left[\hat{H}, \hat{L}\right]=\hat{H}\hat{L}-\hat{L}\hat{H} \tag{2.40}$$

和

$$\hat{L}\psi=\lambda\psi \tag{2.41}$$

则本征值 λ 不随时间变化，且 ψ 的时间演化由

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \tag{2.42}$$

给出。于是，如果这样的$\hat{L}$、$\hat{H}$ 一旦找到，则可由式 (2.41) 确定$\hat{L}[u(x, 0)]$的本征值，这也是任意时刻$\hat{L}[u(x, t)]$的本征值，再由式 (2.42) 确定散射参数的时间演化。

证明 由于已限定$\hat{H}$是厄米的，可通过

$$i\hat{U}_t = \hat{H}\hat{U} \qquad \hat{U}(0) = I \tag{2.43}$$

即

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}$$

来构造算符 $\hat{U}(t)$。显然，$\hat{U}^+\hat{U} = I = \hat{U}\hat{U}^+$，即是么正算符（因为 $\hat{H}^+ = \hat{H}$）。于是，当 $t = 0$ 时

$$\hat{L}(0)\psi(0) = \lambda\psi(0) \tag{2.44}$$

在任意时刻构造算符及波函数:

$$\begin{aligned} \hat{L}(t) &= \hat{U}\hat{L}(0)\hat{U}^+ \\ \psi(t) &= \hat{U}(t)\psi(0) \end{aligned} \tag{2.45}$$

于是如同证明式 (2.36) 一样，可得到

$$i\frac{\partial\hat{L}}{\partial t} = -[\hat{L},\ \hat{H}] \tag{2.46}$$

这意味着，由式 (2.45) 所构造的 $\hat{L}$ 满足式 (2.40)。于是式 (2.44) 可变换成

$$\hat{L}(t)\psi(t) = \lambda\psi(t)$$

类似于得到式 (2.38)，可证 $d\lambda / dt = 0$，同时式 (2.45) 中对 $\psi(t)$ 求导

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \frac{\partial\hat{U}(t)}{\partial t}\psi(0)$$

利用式 (2.43)

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\hat{U}\psi(0) = \hat{H}\psi(t)$$

此即式(2.42)。

证　毕

2.2.2　双分量情形

现在把 Lax 推广成一般形式，以二分量情况为例，设对式 (2.39)，可以找到依赖于 $u(x,\ t)$ 的线性算子 $\hat{L}$ 和线性厄米算子 $\hat{H}$，满足:

$$\hat{L}v = \lambda v \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \hat{H}v \tag{2.48}$$

式中:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} i\frac{d}{dx} & -iq(x,\ t) \\ ir(x,\ t) & -i\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

$$\hat{H}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}$$

式中，A，B，C 依赖于 q，r 和 x，t，λ，将式(2.49)代入式(2.47)、式(2.48)，并消去 v_{1x}，v_{2x}，v_{1t}，v_{2t}，然后比较v_1、v_2的系数可得：

$$A_x = qC - rB \tag{2.50}$$

$$B_x + \mathrm{i}2\lambda B = q_t - 2Aq \tag{2.51}$$

$$C_x - 2\mathrm{i}\lambda C = r_t + 2Ar \tag{2.52}$$

到此，由初始值 $r(x, 0)$、$q(x, 0)$ 代入式 (2.74) 确定本征值和初值时的波函数 $v_1(x, 0)$，$v_2(x, 0)$，取极限$|x|\to\infty$，可得散射数据。对于任意时刻的 r，q，r_t 和 q_t，则由式 (2.50~ 2.52) 可解出 A，B，C 对 r，q 及 λ 的依赖关系，代入式 (2.48)，可计算 v_1，v_2 渐近态（散射参数）随时间的演化。不同的 r, q, A, B, C, u 对应于不同非线性方程式 (2.39)。下面考虑式 (2.50)～ 式 (2.51) 的某些简单的解，可把解的形式设为：

$$A=\sum_{n=0}^{N} A^{(n)}\lambda^n$$

$$B=\sum_{n=0}^{N-1} B^{(n)}\lambda^n \tag{2.53}$$

$$C=\sum_{n=0}^{N-1} C^{(n)}\lambda^n$$

先令 $A^{(N)}=a_N(t)$，代入式(2.50)求出 $A^{(N-1)}$，再从式(2.51)、式(2.52)求出 $B^{(N-1)}$和 $C^{(N-1)}$，以后按这样过程依次求解 $A^{(N-2)}\to B^{(N-2)}$，$C^{(N-2)}\to A^{(N-3)}\to B^{(N-3)}$，$C^{(N-3)}$，…，$\to A^{(1)}\to B^{(1)}$，$C^{(1)}\to A^{(0)}\to B^{(0)}$，$C^{(0)}$。

以 $N=3$ 为例，可求得：

$$\left.\begin{aligned} A&= a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}a_3qr + a_1\right)\lambda + \frac{1}{2}a_2qr - \frac{\mathrm{i}}{4}a_3(qr_x - q_xr) + a_0 \\ B&= \mathrm{i}a_3\lambda^2 + \left(\mathrm{i}a_2q - \frac{1}{2}a_3q_x\right)\lambda + \mathrm{i}a_1q + \frac{1}{2}a_3q^2r - \frac{1}{2}a_2q_x - \frac{\mathrm{i}}{4}a_3q_{xx} \\ C&= \mathrm{i}a_3r\lambda^2 + \left(\mathrm{i}a_2r + \frac{1}{2}a_3r_x\right)\lambda + \mathrm{i}a_1r + \frac{\mathrm{i}}{2}a_3qr^2 + \frac{1}{2}a_2r_x - \frac{\mathrm{i}}{4}a_3r_{xx} \end{aligned}\right\} \tag{2.54}$$

同时，还可得到(最后两个方程)：

$$\left.\begin{aligned} q_t&= 2A^{(0)}q + B_x^{(0)} \\ r_t&= -2A^{(0)}r + C_x^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

成为：

$$\left.\begin{aligned} q_t&= -\frac{\mathrm{i}}{4}a_3(q_{xxx} - 6qrq_x) - \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2q^2r) + \mathrm{i}a_1q_x + 2a_0q \\ r_t&= -\frac{\mathrm{i}}{4}a_3(r_{xxx} - 6qrr_x) + \frac{1}{2}a_2(r_{xx} - 2qr^2) + \mathrm{i}a_1r_x - 2a_0r \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

于是:

KdV方程

$$q_t \mp 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

对应于 $r=\pm 1$，$a_0=a_1=a_2=0$，$a_3=-4\mathrm{i}$;

MKdV方程

$$q_t \pm 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0$$

对应于 $r=\mp q$，$a_0=a_1=a_2=0$，$a_3=-4\mathrm{i}$;

NLS方程

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} \pm 2q^2 q^* = 0$$

对应于 $a_0=a_1=a_3=0$，$a_2=-2\mathrm{i}$，$r=\mp q^*$。

如果式(2.53)改写成负幂次展开式，A、B、C分别取为:

$$A=\frac{a(x,\ t)}{\lambda}$$

$$B=\frac{b(x,\ t)}{\lambda}$$

$$C=\frac{c(x,\ t)}{\lambda}$$

可得

$$a_x=\frac{\mathrm{i}}{2}(qr)_t$$

$$q_{xx}=-4\mathrm{i}aq$$

$$r_{xt}=-4\mathrm{i}ar$$

几种特殊情况是:

Sine－Gordon方程

$$u_{xt}=\sin u$$

对应于 $a=\frac{\mathrm{i}}{4}\cos u$，$b=c=\frac{\mathrm{i}}{4}\sin u$，$r=-q=\frac{1}{2}u_x$。

Sinh－Gordon方程

$$u_{xt}=\sinh u$$

对应于 $a=\frac{\mathrm{i}}{4}\cosh u$，$-b=c=\frac{\mathrm{i}}{4}\sinh u$，$r=q=\frac{1}{2}u_x$。

2.3 二分量方程的逆散射方法——NLS方程

2.3.1 Lax对

本节以 NLS 方程为例，来说明二分量方程的逆散射方法。由于 NLS 方程是光纤孤子理论的基础，因此这里将对 NLS 方程的求解过程作较详细的介绍。由上节结论，对应

于 NLS 方程

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0$$

的 $\hat{L}$ 和 $\hat{H}$ 分别是 ($r = -q^*$, $q = u$):

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & -\mathrm{i}q \\ -\mathrm{i}q^* & -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} -2\mathrm{i}\lambda^2 + \mathrm{i}|q|^2 & 2\lambda q + \mathrm{i}q_x \\ -2q^*\lambda + \mathrm{i}q_x^* & 2\mathrm{i}\lambda^2 - \mathrm{i}|q|^2 \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

式(2.47)即为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}q \\ -\mathrm{i}q^* & 0 \end{bmatrix} v = \lambda v$$

可改写成

$$\mathrm{i}\sigma_3 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & -q \\ -q^* & 0 \end{bmatrix} v = \lambda v$$

用 $\mathrm{i}\sigma_3$ 乘各项并化简

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \left[-\sigma_3 \begin{bmatrix} 0 & -q \\ -q^* & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{i}\lambda\sigma_3 \right] v = \left[-\mathrm{i}\lambda\sigma_3 + \hat{U}(x, t) \right] v$$

式中:

$$\hat{U}(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & u(x, t) \\ -u^*(x, t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

这时式(2.47)及式(2.48)可写成:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \hat{L}_1 v \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \hat{M} v \tag{2.60}$$

$$\hat{L}_1 = -\mathrm{i}\lambda\sigma_3 + \hat{U}(x, t) \tag{2.61}$$

$$\hat{M} = -\mathrm{i}\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda\hat{U} - \mathrm{i}\left[\hat{U}^2 + \hat{U}_x \right]\sigma_3 \tag{2.62}$$

2.3.2　Jost 解与散射矩阵

在二分量的情况下(参考文献〔37〕), 也可以仿照单分量情况证明 $\lambda_t = 0$, 即 λ 不随时间变化。我们注意到式(2.57)中 $\hat{L}^+ \neq \hat{L}$, 即 $\hat{L}$ 是非厄米的, 因此式(2.47)的本征值 λ 不

是实数。在$|u|\to 0(|x|\to\infty)$的条件下，式(2.61)中$\hat{L}_1\to -\mathrm{i}\lambda\sigma_3$，因由式(2.59)可知$\hat{U}\to 0$，这时式(2.60)为

$$\begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\lambda & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

即

$$\left.\begin{aligned} v_1 x &= -\mathrm{i}\lambda v_1 \\ v_2 x &= +\mathrm{i}\lambda v_2 \end{aligned}\right\}$$

有解:

$$v_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$$

$$v_2 = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda x}$$

在一般情况，v 的渐近解设为 φ，$\overline{\varphi}$ 和 ψ，$\overline{\psi}$(φ 与 ψ 是同一解，$\overline{\varphi}$ 与$\overline{\psi}$ 也是同一解，只是分别代表 $x\to +\infty$ 和 $x\to -\infty$ 的极限)，其中:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \qquad \overline{\varphi} = \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \qquad \overline{\psi} = \begin{bmatrix} \overline{\psi}_1 \\ \overline{\psi}_2 \end{bmatrix}$$

分别描述 $x\to -\infty$ 和 $x\to +\infty$ 时的行为，方程式 (2.60) 的解也可用矩阵形式表示，即:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\varphi,\ \overline{\varphi}] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \overline{\varphi}_1 \\ \varphi_1 & \overline{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi,\ \overline{\psi}] = \begin{bmatrix} \psi_1 & \overline{\psi}_1 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_2 \end{bmatrix}$$

$\overline{\varphi}$，$\overline{\psi}$ 可用 φ，ψ 表示，因为在 λ 为实数时 [由式 (2.61)]

$$\sigma_2 \hat{L}_1^* \sigma_2 = \hat{L}_1$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{i}$$

于是式(2.60)对于$\boldsymbol{\Phi}^*$，有(利用$\sigma_2\sigma_2 = \boldsymbol{I}$)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}^*}{\mathrm{d}x} = \hat{L}_1^* \boldsymbol{\Phi}^* \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sigma_2 \boldsymbol{\Phi}^* \sigma_2\right] = \left[\sigma_2 \hat{L}_1^* \sigma_2\right]\left[\sigma_2 \boldsymbol{\Phi}^* \sigma_2\right]$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sigma_2 \boldsymbol{\Phi}^* \sigma_2\right] = \hat{L}_1\left[\sigma^2 \boldsymbol{\Phi}^* \sigma_2\right]$$

也就是说，$\sigma_2 \boldsymbol{\Phi}^* \sigma_2^2$ 与 $\boldsymbol{\Phi}$ 同样都是式 (2.60) 的解，故二者相等，即

$$\sigma_2\boldsymbol{\Phi}^*\sigma_2=-\begin{bmatrix}\overline{\varphi}_2 & \varphi_2\\ \overline{\varphi}_1 & -\varphi_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \overline{\varphi}_1\\ \varphi_2 & \overline{\varphi}_2\end{bmatrix}$$

即$\overline{\varphi}_1^*=-\varphi_2^*$，$\overline{\varphi}_2=\varphi_1$，因此结合上面 $x\to\pm\infty$ 的渐近式，式 (2.60) 的四个解 φ，$\overline{\varphi}$ 或 ψ，$\overline{\psi}$ 满足下列关系和渐近式:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\\ \overline{\varphi}&=\begin{bmatrix}\overline{\varphi}_1\\ \overline{\varphi}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\varphi_2^*\\ \varphi_1^*\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda x}\end{aligned}\quad x\to-\infty\right\}\tag{2.63}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda x}\\ \overline{\psi}&=\begin{bmatrix}\overline{\psi}_1\\ \overline{\psi}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_2^*\\ -\psi_1^*\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\end{aligned}\quad x\to+\infty\right\}\tag{2.64}$$

四个解 φ，$\overline{\varphi}$，ψ，$\overline{\psi}$ 中只有可能两个是独立的，故其中两个必能用另外两个线性表示出来 (因是线性方程)，比如说用 ψ，$\overline{\psi}$ 表示 φ，$\overline{\varphi}$，即为:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=a\overline{\psi}+b\psi\ \xrightarrow{x\to+\infty}\ \begin{bmatrix}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\\ b\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda x}\end{bmatrix}\\ \overline{\varphi}&=-\overline{b}\,\overline{\psi}+\overline{a}\psi\ \xrightarrow{x\to+\infty}\ \begin{bmatrix}-\overline{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\\ +\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{2.65}$$

式(2.63)给出 φ，$\overline{\varphi}$在 $x\to-\infty$ 的渐近式；而式(2.65)却给出了它们在 $x\to+\infty$ 的渐近式。从式(2.65)中可解出:

$$\left.\begin{aligned}a&=\psi_2\varphi_1-\psi_1\varphi_2\\ b&=-\overline{\psi}_2\varphi_1+\overline{\psi}_1\varphi_2\end{aligned}\right\}\tag{2.66}$$

式(2.65)中第一式可改写为:

$$a^{-1}\varphi=\overline{\psi}+r(t,\ \lambda)\psi\qquad r(t,\ \lambda)=\frac{b(t,\lambda)}{a(t,\lambda)}\tag{2.67}$$

式 (2.67) 的渐近式是：

$x\to+\infty$ 时，右端 (由式 (2.64))

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}+r\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\tag{2.68}$$

$x\to-\infty$时，左端

$$\longrightarrow a^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\tag{2.69}$$

由于式(2.67)是恒等式，故当 $x\to+\infty$时，左、右端都应趋于式(2.68)；当 $x\to-\infty$时，左、右端都应趋于式(2.69)。因此，式(2.67)的物理意义是：左行波在右方入射(式(2.68)第一项)，经过势$\hat{U}(x, t)$的作用，一部分透射到左方(式(2.69))，另一部分反射回右方(式(2.68)第二项)。式(2.60)式的渐近解式(2.63)、式(2.64)可写成矩阵形式，即：

$$\Phi=(\varphi, \bar{\varphi}) \xrightarrow{x\to+\infty} \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda x} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

$$\psi=(\psi, \bar{\psi}) \xrightarrow{x\to+\infty} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\lambda x} \\ e^{i\lambda x} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

于是式(2.65)变成($\bar{a}=a^*$，$\bar{b}=b^*$)

$$\Phi=\psi T=\psi \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \xrightarrow{x\to+\infty} \begin{bmatrix} ae^{-i\lambda x} & -b^*e^{-i\lambda x} \\ -be^{i\lambda x} & a^*e^{i\lambda x} \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

容易验证式 (2.70)、式 (2.71) 是式 (2.60) 在$|x|\to\pm\infty$ 的解，由于当$|x|\to\pm\infty$，$u(x, t)\to 0$ (kink 解不满足此条件，应另行处理)，即$\hat{U}\to 0$，于是

$$v=e^{-i\sigma_3 x}=1+(-i\lambda x)\sigma_3+\frac{1}{2!}(-i\lambda x)^2\sigma_3^2+\frac{1}{3!}(-i\lambda x)^3\sigma_3^3+\cdots$$

由于 $\sigma_3^2=1$，$\sigma_3^3=\sigma_3$，$\sigma_3^4=1$，…，因此上式可写成

$$v=\begin{bmatrix} 1+(-i\lambda x)+\frac{1}{2!}(-i\lambda x)^2+\frac{1}{3!}(-i\lambda x)^3+\cdots & 0 \\ 0 & 1-(-i\lambda x)+\frac{1}{2!}(-i\lambda x)^2-\frac{1}{3!}(-i\lambda x)^3+\cdots \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda x} \end{bmatrix}$$

上式正是式 (2.70)，在一般情况下，由于 Φ 是式 (2.60) 的解，因此满足

$$\Phi_x=\hat{L}_1\Phi$$

由于 $T_r(\hat{L}_1)=0$ (由式 (2.61) 及式 (2.59))，因此

$$\frac{d}{dx}\det(\Phi)=T_r\hat{L}_1\cdot\det(\Phi)=0$$

即 $\det(\Phi)$ 不依赖于 x，故可取为 $x\to-\infty$ 时的值；由式 (2.70) 有 $\det(\Phi)=1$，同理可得 $\det(\psi)=1$，即

$$\det(\Phi)=\det(T)\cdot\det(\Phi) \quad\to\quad \det(T)=1$$

亦即

$$|a(t, \lambda)|^2+|b(t, \lambda)|^2=1 \tag{2.73}$$

由式(2.67)可得到

$$1=|a^{-1}(t, \lambda)|^2-|r(t, \lambda)|^2 \tag{2.74}$$

上式是透射系数与反射系数平方差为 1，与量子力学中的平方和为 1 不同是由于$\hat{L}$不是自伴子(即厄米算子)，可以证明(见附录)：φ，ψ 在上半平面(即 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$)，解析；$\overline{\varphi}$，$\overline{\psi}$在下半平面($\mathrm{Im}\,\lambda<0$)解析。这一点也可通过渐近式(2.63)、式(2.64)或式(2.70)、式(2.71)看出，因在上半平面 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}|\lambda|)x}=\mathrm{e}^{|\lambda|x}\to 0(x<0,\ |\lambda|\to\infty)$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}|\lambda|)x}=\mathrm{e}^{-|\lambda|x}\to 0\ \ (x>0,\ |\lambda|\to\infty)$。对于 $\overline{\varphi}$，$\overline{\psi}$也一样。于是由式(2.66)可知 $a(t,\ \lambda)$在上半平面($\mathrm{Im}\,\lambda>0$)解析，但 $b(t,\ \lambda)$中出现了 $\overline{\psi}$ 和 φ，他们分别在下半和上半平面解析，故它只能在二者交界处即实轴上解析，在上半平面是不解析的。由于 $a(t,\ \lambda)$在上半平面解析，故在 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ 的区域不会有奇异性，但可以有零点，一般情况下，它可能有高阶零点，但这里只**假定它有 N 个一阶零点**λ_1，λ_2，…，λ_N，即：

$$a(t,\ \lambda_n)=0 \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.75}$$

$$\left.\frac{\partial a(t,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}\neq 0 \qquad (\text{一阶零点})$$

由于式 (2.67) 是描写连续谱的自由态的关系式，因此对于连续谱 a^{-1}、r 是确定且有限的，但当 a^{-1}、r 发生奇异时，代表式 (2.67) 对连续谱的自由态的描写失效，因此这时必对应于非连续谱的非自由态。即对应于离散谱的束缚态。因此，$a(t,\ \lambda)$ 的关于 λ 的零点值即为束缚态的本征值。既然 $a(t,\ \lambda_n)=0$，则由式 (2.66) 在 $\lambda=\lambda_n$ 处 $\psi_2\varphi_1=\psi_1\varphi_2$，必有 $\varphi_1\propto\psi_1$，$\varphi_2\propto\psi_2$，或 $\varphi\propto\psi$，用比例系数联系起来，

$$\varphi(x,\ t,\ \lambda_n)=b_n(t)\psi(x,\ t,\ \lambda_n) \tag{2.76}$$

注意：$b_n(t)$不等于式(2.65)中的$b(t,\ \lambda)$在$\lambda=\lambda_n$的取值，尽管在$a(t,\ \lambda_n)=0$ 时式(2.65)变成 $\varphi=b\psi$。这是因为式(2.76)中的 $b_n(t)$与 λ 无关，而且式(2.76)定义在 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ 的上半平面内的一些离散点上，只是比例系数；而式(2.65)中的$b(t,\ \lambda)$(按照式(2.66))只定义在实轴上($\mathrm{Im}\,\lambda=0$)，但仍与 λ 有关。

2.3.3 Jost 解对谱参数的渐近行为和无穷个守恒律

在讨论逆散射方程时要用到波函数相对谱参数的渐近行为，现在研究$|\lambda|\to\infty$时，式(2.60)的解：

$$\left.\begin{aligned} v_{1x}&=-\mathrm{i}\lambda v_1+uv_2\\ v_{2x}&=\mathrm{i}\lambda v_2-u^*v_1\end{aligned}\right\} \qquad v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \tag{2.77}$$

消去v_2，v_{2x}，可得

$$(v_{1x}+\mathrm{i}\lambda v_1)_x-\frac{u_x}{u}(v_{1x}+\mathrm{i}\lambda v_1)=\mathrm{i}\lambda(v_{1x}+\mathrm{i}\lambda v_1)-|u|^2v_1 \tag{2.78}$$

当$|\lambda|\to\infty$ 时，式 (2.77) $v_{1x}=-\mathrm{i}\lambda v_1(uv_2$ 项忽略)，这时 $v_1\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$；但当 uv_2 不可忽略时，即势 $u(x,\ t)$ 较大时，对 v_1 的影响用下面的 β 来表示，即

$$v_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x+\beta} \tag{2.79}$$

代入式(2.78)可得 β 的方程

$$\beta_x^2+\beta_{xx}-\mathrm{i}2\lambda\beta_x-\frac{u_x}{u}\beta_x+|u|^2=0 \tag{2.80}$$

或用 $\alpha=\beta_x$ 代之，上式成为

$$\mathrm{i}2\lambda\alpha=\alpha^2+u\left(\frac{\alpha}{u}\right)_x+|u|^2 \tag{2.81}$$

由于当 $|\lambda|\to\infty$ 时，$v_1\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$，因此，由式 (2.79)，$\beta\to 0$，因而 $\alpha=\beta_x\to 0$，于是 α 可用 λ 的负幂级数展开，且常数项为 0，即

$$\alpha=\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(\mathrm{i}2\lambda)^k} \tag{2.82}$$

代入式(2.81)并展开，比较系数可得:

$$\begin{aligned}\alpha_0&=|u|^2\\ \alpha_1&=uu_x^*\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\alpha_{k+1}=u\left(\frac{\alpha_k}{u}\right)_x+\sum_{i+j=k-1}\alpha_j\alpha_i \tag{2.84}$$

因此

$$\beta=\beta_0+\int_{-\infty}^{x}\alpha\mathrm{d}x=\beta_0+\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}\int_{-\infty}^{x}\alpha_0\mathrm{d}x+O(\lambda^{-2})$$

$$=\beta_0+\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}\int_{-\infty}^{x}|u|^2\mathrm{d}x+O(\lambda^{-2})$$

取 $\beta_0=\beta(-\infty)=0$，则由式(2.79)

$$v_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}=\mathrm{e}^{\beta}\approx 1+\beta=1+\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}\int_{-\infty}^{x}|u|^2\mathrm{d}x+O(\lambda^{-2}) \tag{2.85}$$

将上式代回式(2.77)的第二式，可得

$$v_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}=\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}u^*(x,\ t)+O(\lambda^{-2}) \tag{2.86}$$

这一组解即为 φ 中的两个分量 φ_1，φ_2。同理，可得另一组即 ψ 的两个分量 ψ_1，ψ_2:

$$\psi_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}=\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}u+O(\lambda^{-2}) \tag{2.87}$$

$$\psi_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}=1+\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}\int_{x}^{+\infty}|u|^2\mathrm{d}x+O(\lambda^{-2}) \tag{2.88}$$

上述 φ，ψ 都是上半平面($\mathrm{Im}\,\lambda>0$)的渐近式；同理，在下半平面($\mathrm{Im}\,\lambda<0$)可得:

$$\bar{\varphi}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}=\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}u+O(\lambda^{-2}) \tag{2.89}$$

$$\bar{\varphi}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}=1-\frac{1}{\mathrm{i}2\lambda}\int_{-\infty}^{x}|\mathrm{u}|^2\mathrm{d}x+O(\lambda^{-2}) \tag{2.90}$$

$$\bar{\psi}_1 e^{i\lambda x} = 1 - \frac{1}{i2\lambda}\int_x^{+\infty} |u|^2 dx + O(\lambda^{-2}) \tag{2.91}$$

$$\bar{\psi}_2 e^{i\lambda x} = \frac{1}{i2\lambda} u^* + O(\lambda^{-2}) \tag{2.92}$$

式(2.85)～式(2.92)给出了 NLS 方程的解$u(x, t)$与 Jost 解的关系，利用式(2.66)及式(2.85)～式(2.88)，在上半平面($\mathrm{Im}\,\lambda>0$)，当 $\lambda\to\infty$时

$$\begin{aligned}
a(t, \lambda) &= \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 \\
&= \left(1+\frac{1}{i2\lambda}\int_{-\infty}^{x} |u|^2 dx\right) + \frac{1}{i2\lambda}\int_x^{+\infty} |u|^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{1}{i2\lambda}\int_{-\infty}^{x} |u|^2 dx\right)\left(\frac{1}{i2\lambda}\int_x^{+\infty} |u|^2 dx\right) - \psi_1\varphi_2 + O(\lambda^{-2}) \\
&= 1 + \frac{1}{i2\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx + O(\lambda^{-2})
\end{aligned} \tag{2.93}$$

同理得(在实 λ 轴上，$\lambda\to\infty$):

$$b(t, \lambda) = O(\lambda^{-1}) \tag{2.94}$$

$$r(t, \lambda) = O(\lambda^{-1}) \tag{2.95}$$

后面要证明，散射数据 $a(t, \lambda)$ 与 t 无关。因此，若能使 $u(x, t)$ 及 λ 与 $a(t, \lambda)$ 联系起来，可得到一系列守恒量。由式 (2.66) 和边界条件式 (2.64)，

$$a(t, \lambda) = \lim_{x\to+\infty} e^{i\lambda x}\varphi_1(x, t, \lambda)$$

这是由于在式 (2.64) 中，$x\to+\infty$ 时，$\psi\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}$ 即 $\psi_1\to 0$, $\psi_2\to e^{i\lambda x}$，而式 (2.63) 只是 $x\to-\infty$ 的极限。对 $x\to+\infty$，式 (2.63) 不能用，因此有上式。再应用式 (2.79)(v_1 即 φ_1)，

$$a(t, \lambda) = \lim_{x\to+\infty} e^{+i\lambda x}(e^{-i\lambda x}e^{\beta}) = \lim_{x\to+\infty} e^{\beta}$$

即

$$\ln a(t, \lambda) = \beta(\infty, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha dx \tag{2.96}$$

由式 (2.82) 及式 (2.83～2.84)，α 及各个 $\alpha_k (k=1, 2, \cdots)$ 与 $u(t, x)$ 有关，于是式 (2.96) 右端是

$$\frac{1}{i2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(i2\lambda)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_k(x, t)dx$$

与时间无关。

因为左端$a(t, \lambda)$与时间无关，因此

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k(x, t)\mathrm{d}x \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{2.97}$$

是守恒量，上式给出了 NLS 方程的无穷多个守恒量，前四个是:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 \mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u u_x^* \mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u u_{xx}^* + |u|^4)\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u u_{xxx}^* + 4|u|^2 u u_x^* + |u|^2 u_x u^*)\mathrm{d}x$$

式中：I_0 代表粒子数，I_1，I_2 分别代表动量及哈密顿量。这一点在等价粒子理论分析中也可看出。

2.3.4　逆散射方程

定义函数

$$\theta(x, t, \lambda) = \begin{cases} a^{-1}(t, \lambda)\varphi(x, t, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} & \mathrm{Im}\,\lambda > 0 \\ \overline{\psi}(x, t, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} & \mathrm{Im}\,\lambda < 0 \end{cases} \tag{2.98}$$

这个函数在 $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$的下半平面解析；在上半平面，除 $a^{-1}(t, \lambda)$的一阶极点 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_N 处外，也是解析的，在实轴上存在跳跃(由式(2.67))。

$$r(t, \lambda)\psi(x, t, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.99}$$

将 φ 及 ψ 的渐近式(2.85)～式(2.92)代入式(2.98)，在上、下半平面都有

$$\theta(x, t, \lambda) \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}) \tag{2.100}$$

这里已考虑到 $a^{-1}(t, \lambda) \to 1 + O(\lambda^{-1})$(由式 (2.93) 考虑)。Cauchy 积分公式

$$\theta(x, t, \lambda) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\oint \mathrm{d}\lambda' \left[\theta(x, t, \lambda') - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] / (\lambda' - \lambda)\right\} \tag{2.101}$$

积分回路如图 2-1 所示。其中，复 λ 的上半平面的小圆各绕$a^{-1}(t, \lambda)$的极点λ_n ($n = 1$, 2, $\cdots$, N)。由式(2.100)，$\left[\theta(x, t, \lambda') - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = O(\lambda^{-1})$，因此沿大圆的积分当$|\lambda| \to \infty$时趋于零。于是式(2.101)的右端只剩下两部分：其一是沿 λ 的实轴积分，即 $I(x, t, \lambda)$；其二是绕各极点积分，即$a^{-1}(t, \lambda)$在极点λ_n 处的留数之和 $R(x, t, \lambda)$，它们分别是:

$$I(x,\ t,\ \lambda)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^{-1}(t,\ \lambda')\varphi(x,\ t,\ \lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' x}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{\lambda'-\lambda}\mathrm{d}\lambda'\right.$$

$$\left.+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\bar{\psi}(x,\ t,\ \lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' x}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{\lambda'-\lambda}\mathrm{d}\lambda'\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r(t,\ \lambda')\psi(x,\ t,\ \lambda')}{\lambda'-\lambda}\mathrm{d}\lambda'\ (\text{由式2.67}) \tag{2.102}$$

$$R(x,\ t,\ \lambda)=-\sum_{n=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\lambda'=\lambda_n}\left(\frac{\theta(x,\ t,\ \lambda')}{\lambda'-\lambda}\right)$$

$$=\frac{-\sum_{n=1}^{N}\varphi(x,\ t,\ \lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}}{(\lambda_n-\lambda)\left.\frac{\partial a(t,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}} \tag{2.103}$$

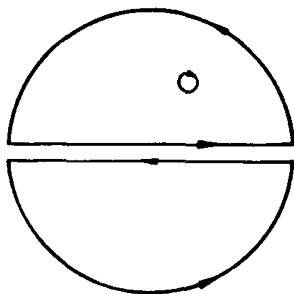


图　2-1

在式(2.102)中的第一项为上半圆的实轴积分，第二项为下半圆的实轴积分。在得到式(2.103)时，已考虑到小圆路径的方向是顺时针的，因此右边有一负号；由于 $a(t,\ \lambda)$的零点λ_n是一阶的，因式(2.103)$a'_\lambda(t,\ \lambda_n)=\partial a/\partial\lambda\neq 0$，将式(2.76)代入式(2.103)，并令

$$c(t,\ \lambda_n)=\frac{b_n(t)}{a'_\lambda(t,\ \lambda_n)} \tag{2.104}$$

则有

$$R(x,\ t,\ \lambda)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}c(t,\ \lambda_n)\psi(x,\ t,\ \lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x} \tag{2.105}$$

式 (2.105) 与式 (2.102) 之和即为式 (2.101) 的左端，并且其中 λ 在整个复平面上取值。特别地，当 λ 的值取到下平面时，式 (2.101) 的右端可用$\bar{\psi}(x,\ t,\ \lambda)$ 表示，也就是利用式 (2.98)，取 $\mathrm{Im}\,\lambda<0$ 时的表达式，即 $\bar{\psi}(x,\ t,\ \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$，它与右端相等，因此

$$\bar{\psi}(x,\ t,\ \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=I(x,\ t,\ \lambda)+R(x,\ t,\ \lambda)$$

亦即

$$\bar{\psi}(x,\ t,\ \lambda)=\left[\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+I(x,\ t,\ \lambda)+R(x,\ t,\ \lambda)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.106}$$

此式中的 λ 在下半平面。当 λ 以 $\lambda-\mathrm{i}\varepsilon(\varepsilon>0$为实数且 $\varepsilon\to0)$方式趋近于实轴时，利用 $\bar{\psi}=\begin{bmatrix}\bar{\psi}_1\\ \bar{\psi}_2\end{bmatrix}$即式(2.64)和式(2.106)，可得

$$\begin{bmatrix}\psi_2^*(x,\ t,\ \lambda)\\ -\psi_1^*(x,\ t,\ \lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}c(t,\ \lambda)\begin{bmatrix}\psi_1(x,\ t,\ \lambda_n)\\ \psi_2(x,\ t,\ \lambda_n)\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n}$$

$$+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r(t,\ \lambda')}{\lambda'-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon}\begin{bmatrix}\psi_1(x,\ t,\ \lambda')\\ \psi_2(x,\ t,\ \lambda')\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' x}\mathrm{d}\lambda'\Bigg]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.107}$$

当取下半平面的 λ_n^* $(\mathrm{Im}\ \lambda_n>0\Rightarrow\mathrm{Im}\ \lambda_n^*<0,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，同样方法，利用式 (2.64) 的第二式及式 (2.106) 可得

$$\begin{bmatrix}\psi_2^*(x,\ t,\ \lambda_n)\\ -\psi_1^*(x,\ t,\ \lambda_n)\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n^*-\lambda_m}c(t,\ \lambda_m)\begin{bmatrix}\psi_1(x,\ t,\ \lambda_m)\\ \psi_2(x,\ t,\ \lambda_m)\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m x}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r(t,\ \lambda')}{\lambda'-\lambda_n^*}\begin{bmatrix}\psi_1(x,\ t,\ \lambda')\\ \psi_2(x,\ t,\ \lambda')\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' x}\mathrm{d}\lambda'\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n^* x} \tag{2.108}$$

式(2.107)及式(2.108)中的$\psi_1(x,\ t,\ \lambda_n)$，$\psi_2(x,\ t,\ \lambda_n)$及$\psi_1(x,\ t,\ \lambda)$，$\psi_2(x,\ t,\ \lambda)$($\lambda$为实数)($n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$)是待定量。只要已知 $c(t,\ \lambda_n)$，$r(t,\ \lambda)$随 t 的演化就可确定它们，因此，它们就是 NLS 方程的 Zakharov–Shabat 逆散射方程。需要的散射数据有λ_n，$c(t,\ \lambda_n)$，$r(t,\ \lambda)(\mathrm{Im}\lambda=0)$，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。如果从式(2.107)和式(2.108)是解出了ψ_2，则可利用(2.92)式解出 $u(x,\ t)$，即

$$u^*=2\mathrm{i}\lambda\bar{\psi}_2(x,\ t,\ \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}-2\mathrm{i}\lambda O(\lambda^{-2})\qquad \lambda\to\infty$$

利用式 (2.64) 式，$\bar{\psi}_2=-\psi_1^*$，于是

$$u(x,\ t)=-2\mathrm{i}\lambda\left[-\psi_1(x,\ t,\ \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right]+2\mathrm{i}\lambda O(\lambda^{-2})\qquad \lambda\to\infty$$

由式 (2.107) 和式 (2.108) 联立解出 $\psi_1^*(x,t,\lambda)$，$\psi_1^*(x,t,\lambda_n)$，$\psi_2^*(x,t,\lambda)$，$\psi_2^*(x,t,\lambda_n)$，如式 (2.107) 是：

$$-\psi_1^*=\left[0+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}c(t,\ \lambda_n)\psi_2(x,\ t,\ \lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r(t,\ \lambda')}{\lambda'-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon}\psi_2(x,\ t,\ \lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' x}\mathrm{d}\lambda'\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$$

$$\psi_2^*=\left[1+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}c(t,\ \lambda_n)\psi_1(x,\ t,\ \lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r(t,\lambda')}{\lambda'-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon}\psi_1(x,t,\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' x}\mathrm{d}\lambda'\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$$

由于当$\lambda\to\infty$时，$\lambda/(\lambda-\lambda_n)\to 1$，$\lambda/(\lambda'-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon)\to -1$，因此

$$u=\left[-2\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}c^*(t,\lambda_n)\psi_2^*(x,t,\lambda_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n x}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r^*(t,\lambda')\psi_2^*(x,t,\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda' x}\mathrm{d}\lambda'\right] \tag{2.109}$$

当无反射时，$r(t,\lambda)=0$，这时式(2.109)中的$\psi_2^*(x,t,\lambda_n)$仅需由式(2.108)解出，式(2.108)变成:

$$\psi_2^*(x,t,\lambda_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m^* x}=1+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_m^*-\lambda_n}c(t,\lambda_n)\psi_1(x,t,\lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x} \tag{2.110}$$

$$-\psi_1(x,t,\lambda_m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_m x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_m-\lambda_n^*}c^*(t,\lambda_n)\psi_2^*(x,t,\lambda_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n^* x} \tag{2.111}$$

$$u_N(x,t)=-\mathrm{i}2\sum_{n=1}^{N}c^*(t,\lambda_n)\psi_2^*(x,t,\lambda_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n^* x} \tag{2.112}$$

式(2.110)、式(2.112)构成$2N$个线性方程组，可以确定$2N$个未知数$\psi_2^*(x,t,\lambda_n)$，$\psi_1(x,t,\lambda_n)$，$(n=1,2,\cdots,N)$，式(2.112)给出了无反射时的孤子解。

2.3.5 散射数据的时间演化

以上只考虑了式(2.60)中的第一式，现在来考虑第二式，研究散射数据的时间演化。在前面分析中，把t只作为参数，因此前面的Jost解φ和ψ(即式(2.63)，式(2.64))虽然满足式(2.60)的第一式，但不可能满足它的第二式，因此引入一个待定函数$h(t,\lambda)$，使$h(t,\lambda)\varphi(x,t,\lambda)$满足第二式，由于$h(t,\lambda)$独立于$x$，因此$h\varphi$仍满足第一式，于是式(2.65)修改为

$$h(t,\lambda)\varphi(x,t,\lambda)=h(t,\lambda)[a(t,\lambda)\overline{\psi}(x,t,\lambda)+b(t,\lambda)\psi(x,t,\lambda)] \tag{2.113}$$

代入式(2.60)式，即用$(\partial/\partial t-\hat{M})$作用上式，应为0，由于$|x|\to\infty$时，$\hat{M}\to -\mathrm{i}2\lambda^2\sigma_3$，而且式(2.113)的两端都是方程的式(2.60)的解，即同一波数的两种表述，左端$\varphi(x,t,\lambda)$在$x\to-\infty$时的极限及右端ψ，$\overline{\psi}$在$x\to+\infty$时的极限都是已知的(式(2.63)、式(2.64))，由此(通过等号)也就知道了φ在$x\to+\infty$的极限值和式(2.113)右端在$x\to-\infty$时的极限值。$(\partial/\partial t-\hat{M})$分别作用于式(2.113)的左、右端都应为零(同波函数的两种表达)，
对于左端，在$x\to-\infty$时

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\lambda^2\sigma_3\right)h(t,\lambda)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}=0 \tag{2.114}$$

即

$$\frac{\partial h(t,\ \lambda)}{\partial t}+\mathrm{i}2\lambda^2 h(t,\ \lambda)=0$$

于是

$$h(t,\ \lambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda^2 t} \tag{2.115}$$

对于右端，当$x\to+\infty$时

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}2\lambda^2\sigma_3\right]\left\{h(t,\lambda)\left[a(t,\ \lambda)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}+b(t,\ \lambda)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\right]\right\}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}[h(t,\ \lambda)a(t,\ \lambda)]+\mathrm{i}2\lambda^2[h(t,\ \lambda)a(t,\ \lambda)]=0 \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[h(t,\ \lambda)b(t,\ \lambda)]-\mathrm{i}2\lambda^2[h(t,\ \lambda)a(t,\ \lambda)]=0 \tag{2.117}$$

将式(2.115)代入式(2.116)得出

$$\frac{\partial a(t,\ \lambda)}{\partial t}=0\Rightarrow a(t,\lambda)=a(0,\lambda) \tag{2.118}$$

即 $a(t,\ \lambda)$ 不随时间变化，式 (2.115) 代入式 (2.117) 得

$$\frac{\partial b}{\partial t}-\mathrm{i}4\lambda^2 b(t,\ \lambda)=0$$

即

$$b(t,\ \lambda)=b(0,\ \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\lambda^2 t}\qquad(\mathrm{Im}\,\lambda=0) \tag{2.119}$$

以上是连续谱的情况，即 λ 定义在实轴上。

对离散谱，当$\lambda=\lambda_n$时，式(2.76)修改为

$$h(t,\ \lambda_n)\varphi(x,\ t,\ \lambda_n)=h(t,\ \lambda_n)b_n(t)\psi(x,\ t,\ \lambda_n) \tag{2.120}$$

与上相同，把$(\partial/\partial t\ -\ \hat{M})$作用于式(2.120)，并注意$\hat{M}\to-\mathrm{i}2\lambda_n^2\sigma_3$，由左端，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}2\lambda_n^2\sigma_3\right)h(t,\ \lambda_n)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}=0$$

即

$$h(t,\ \lambda_n)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda_n^2 t} \tag{2.121}$$

由右端，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}2\lambda_n^2\sigma_3\right)h(t,\ \lambda_n)b_n(t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}=0$$

将式(2.112)代入上式，可得

$$b_n(t)=b_n(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\lambda_n^2 t}=0 \tag{2.122}$$

式中，由于 λ_n 是确定的，故 b_n 与 λ 无关，只与 t 有关，这一点应与式 (2.119) 相区别。事实上，$b_n(t)$ 对 λ_n 的依赖已体现在下标 n 上。再由式 (2.67)、式 (2.118) 和式 (2.119)

$$r(t,\ \lambda)=\frac{b(t,\lambda)}{a(t,\lambda)}=r(0,\ \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\lambda^2 t} \tag{2.123}$$

式中:

$$r(0,\ \lambda)=\frac{b(0,\ \lambda)}{a(0,\ \lambda)}$$

由式(2.104)

$$c(t,\ \lambda_n)=\frac{b_n(t)}{\left.\dfrac{\partial a}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}}=c(0,\ \lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\lambda_n^2 t} \tag{2.124}$$

式中:

$$c(0,\ \lambda_n)=\frac{b_n(0)}{\left.\dfrac{\partial a(0,\ \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}}$$

前面已说明 $a(0,\ \lambda)$ 在上半平面解析，且有 N 个零点 λ_n。由式 (2.93) 可知当 $\lambda\to\infty$ 时，$a(0,\ \lambda)\to 1$。因此，在 $r(t,\ \lambda)=0$ 即无反射时，它必有下列形式:

$$a(\lambda)=\prod_{n=1}^{N}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\lambda_n^*}$$

式中，λ_n 需要由初始条件确定；再由初始条件确定 $b(0,\ \lambda)$。于是，由式 (2.122)，式 (2.124) 可确定 $b(t,\ \lambda_n)$ 和 $c(t,\ \lambda_n)$；再由式 (2.110)，式 (2.111) 求解 Jost 解 $\psi_2(x,\ t,\ \lambda_n)$；最后，从式 (2.112) 即可得到 N－ 孤子解 $u_N(x,\ t)$。

2.3.6　NLS 方程的 N-孤子特解

寻求孤子特解的步骤是:

① 假定无反射，即 $r(t,\ \lambda)=0$ (即 $b(t,\lambda)=0$)；假定 $a(\lambda)$只有一阶零点，即具有式(2.125)的形式；· 假定式(2.122)中的 $b_n(0)=\mathrm{e}^{\theta'_n+\mathrm{i}\theta''_n}$，但为了合并方便设 $\theta'_n=2\lambda''_n x_n$，$\lambda''_n=\mathrm{Im}(\lambda_n)$，$x_n$ 任意。(注：在线性方程组式(2.110)和式(2.111)中，只需要散射数据 $c(t,\ \lambda_n)$及 λ_n，因此，只要给出 $b_n(0)$及 $a(0,\ \lambda)$，由式(2.124)可确定 $c(t,\ \lambda_n)$，在这里，式(2.123)给出的 $b(t,\ \lambda)$，即连续谱 λ 的 $b(t,\ \lambda)$是不需要的。)

② 由式(2.110)和式(2.111)解出线性代数方程的解 ψ_2^* 和 ψ_1。

③ 代入式(2.112)，求出 N-孤子解。

④ 对于有反射情形，至今还未严格解出线性积分方程式(2.107)和式(2.108)。

下面给出无反射情形的具体求解过程，为了从式(2.110)～式(2.111)解出ψ_1和ψ_2^*，作下面代换:

$$C_n=[c(t,\lambda_n)]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}=\left[\frac{b_n(t)}{\left|\dfrac{\partial a}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}}\right]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}$$

$$A_n=C_n\psi_1(x,t,\lambda_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n x}$$

$$B_n = C_n^* \psi_2^*(x, t, \lambda_n) e^{+i\lambda_n^* x}$$

于是式(2.110)~ 式(2.111)变成:

$$B_n = C_n^* - \sum_{n=1}^{N} S_{mn}^* A_n$$

$$A_n = \sum_{n=1}^{N} S_{mn} B_n$$

式中:

$$S_{mn} = \frac{C_n^* C_m}{\lambda_n^* - \lambda_m}$$

显然，$S_{mn}^* = -S_{nm}$，即$S^* = -S^T$。因此，$B_n = C_n^* + \sum_{n=1}^{N} (S^T)_{mn} A_n$

写成矩阵形式有:

$$B = C^* + S^T A$$

$$A = SB$$

消去矢量矩阵A有

$$B = C^* + S^T SB$$

即

$$B = [I - S^T S] C^*$$

于是N－孤子解是

$$u_N(x,t) = -i2 \sum_{n=1}^{N} C_n^* B_n = -i2(C^T)^* B = -2i(C^T)^* [I - S^T S]^{-1} C^*$$

(1) $N = 1$ 时的单孤子解情形

当 $N = 1$ 时，即 $a^{-1}(t, \lambda) = a^{-1}(\lambda)$ 有一个一阶极点时，如前所述，$a(\lambda)$ 可写成如下形式:

$$a(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_1^*}$$

因此

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_1^*}$$

这时:

$$C_1 = [(\lambda_1 - \lambda_1^*) b_1(t)]^{1/2} e^{i\lambda_1 x}$$

$$S_{11} = \frac{|b_1(t)|}{|\lambda - \lambda_1^*|} e^{i(\lambda_1 - \lambda_1^*)x}$$

解上述代数方程得

$$B_1=\frac{(\lambda_1-\lambda_1^*)^2[(\lambda_1-\lambda_1^*)b_1(t)]^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_1^* x}}{(\lambda_1-\lambda_1^*)^2-\left|(\lambda_1-\lambda_1^*)b_1(t)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(\lambda_1-\lambda_1^*)x}}$$

于是

$$u_1(x,t)=-\frac{2\mathrm{i}(\lambda_1^*-\lambda_1)b_1^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda_1^* x}}{1+\left|b_1(t)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(\lambda_1-\lambda_1^*)x}}$$

设$\lambda_1=\lambda_{1r}+\mathrm{i}\lambda_{1i}$，则由式(2.122)

$$b_1(t)=b_1(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\lambda_1^2 t}$$

式中，$b_1(0)$是待定复常数，可设置成

$$b_1(0)=\mathrm{e}^{2\lambda_{1i}x_1+\mathrm{i}2\varphi_1}$$

以便合并，x_1和φ_1是任意的，于是

$$\begin{aligned}b_1(t)&=\exp[\mathrm{i}4(\lambda_{1r}^2-\lambda_{1i}^2+2\mathrm{i}\lambda_{1r}\lambda_{1i})t+2\lambda_{1i}x_1+\mathrm{i}2\varphi_1]\\&=\mathrm{e}^{2\lambda_{1i}(x_1-4\lambda_{1r}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2[2(\lambda_{1r}^2-\lambda_{1i}^2)t+\varphi_1]}\end{aligned}$$

代入$u_1(x,t)$有:

$$u_1(x,t)=-4\lambda_{1i}\frac{\mathrm{e}^{-Z}}{1+\mathrm{e}^{-2Z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Y}$$

式中:

$$Z=2\lambda_{1i}(x-x_1+4\lambda_{1r}t)$$

$$Y=2[\lambda_{1r}x+2(\lambda_{1r}^2-\lambda_{1i}^2)t+\varphi_1]$$

$u_1(x,t)$可进一步写成

$$u_1(x,t)=-2\lambda_{1i}\frac{2}{\mathrm{e}^Z+\mathrm{e}^{-Z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Y}=-2\lambda_{1i}(\mathrm{sech}\,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Y}$$

可见 NLS 孤子与 KdV 孤子类似，其幅值及其宽度与本征值虚部相联系，但依赖关系不同。在前者中，幅值与宽度是反比关系；而在后者中是平方反比关系。由于 KdV 孤子系统中，束缚态对应的本征值只有虚部，因而其速度也与虚部相联系且与幅值成正比。但在 NLS 系统中，束缚态本征值是一个复数，其实部决定了速度大小，虚部决定了幅值及宽度倒数，孤子速度 $v_1=-4\lambda_{1r}$。

(2) $N=2$ 时的双孤子情形

与前面步骤相同，这时 $a(\lambda)$ 有两个极零点 λ_1，λ_2，因此

$$a(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda-\lambda_1^*)(\lambda-\lambda_2^*)}$$

于是:

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1}=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2^*)(\lambda_1-\lambda_2^*)}$$

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_2}=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1^*)(\lambda_2-\lambda_2^*)}$$

令

$$\lambda_n=\lambda_{nr}+\mathrm{i}\lambda_{ni}$$

$$b_n(0)=\mathrm{e}^{2\lambda_{ni}x_n+\mathrm{i}2\varphi_n}\ (n=1,\ 2)$$

则

$$b_n(t)=\mathrm{e}^{2\lambda_{ni}(x_n-4\lambda_{nr}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2[2(\lambda_{nr}^2-\lambda_{ni}^2)t+\varphi_n]}$$

将

$$c_1=\left[\frac{(\lambda_1-\lambda_2^*)(\lambda_1-\lambda_1^*)}{\lambda_1-\lambda_2}b_1(t)\right]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 x}$$

$$c_2=\left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1^*)(\lambda_2-\lambda_2^*)}{\lambda_2-\lambda_1}b_2(t)\right]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2 x}$$

$$S_{11}=\frac{C_1C_1^*}{\lambda_1^*-\lambda_1}\quad S_{22}=\frac{C_2C_2^*}{\lambda_2^*-\lambda_2}\quad S_{12}=\frac{C_2^*C_1}{\lambda_2^*-\lambda_1}\quad S_{21}=-S_{12}^*$$

代入代数方程，并引入:

$$\left.\begin{aligned}Z_n&=2\lambda_{ni}(x-x_n+4\lambda_{nr}t)\\Y_n&=\lambda_{nr}x+2(\lambda_{nr}^2-\lambda_{ni}^2)t+\varphi_n\end{aligned}\right\}\ (n=1,\ 2)$$

可解出

$$u_2(x,t)=-2\frac{\lambda_{1i}[D_1-\mathrm{i}E_1\tanh Z_2]\operatorname{sech}Z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2Y_1}+\lambda_{2i}[D_2+\mathrm{i}E_2\tanh Z_1]\operatorname{sech}Z_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2Y_2}}{D_3-2\lambda_{1i}\lambda_{2i}[\tanh Z_1\cdot\tanh Z_2+\operatorname{sech}Z_2\cdot\cos(Y_1-Y_2)]}$$

式中:

$$D_1=(\lambda_{1r}-\lambda_{2r})^2+\lambda_{1i}^2-\lambda_{2i}^2$$

$$D_2=(\lambda_{1r}-\lambda_{2r})^2-\lambda_{1i}^2+\lambda_{2i}^2$$

$$D_3=(\lambda_{1r}-\lambda_{2r})^2+\lambda_{1i}^2+\lambda_{2i}^2$$

$$E_1=2\lambda_{2i}(\lambda_{1r}-\lambda_{2r})$$

$$E_2=2\lambda_{1i}(\lambda_{1r}-\lambda_{2r})$$

可见，当 $t\to+\infty$ 且维持 Z_1 不变，即 $x=x_n-4\lambda_{nr}t$ 时，$Y_n=\lambda_{nr}x_n-2[\lambda_{nr}^2+\lambda_{ni}^2]t+\varphi_n$，因此，$Y_n\to-\infty$；如果设 $\lambda_{1r}<\lambda_{2r}$，则 $Z_2\to+\infty$，于是，$\operatorname{sech}Z_2\to0$，$\tanh Z_2\to+1$，$\tanh Y_n\to-1$，因此

$$u_2(x,t)\to\frac{-2\lambda_{1i}[D_1-iE_1]\operatorname{sech}Z_1 e^{-i2Y_1}}{D_3-2\lambda_{1i}\lambda_{2i}\cdot\tanh Z_1}$$

$$=-2\lambda_{1i}\cdot\frac{(D_1-iE_1)e^{-i2Y_1}}{(D_3-2\lambda_{1i}\lambda_{2i})e^{Z_1}+e^{-Z_1}(D_3+2\lambda_{1i}\lambda_{2i})}$$

$$=-2\lambda_{1i}\frac{(D_1-iE_1)e^{-2\lambda_{1i}\Delta_1}e^{-i2Y_1}}{D_3-2\lambda_{1i}\lambda_{2i}}\operatorname{sech}[Z-2\lambda_{1i}\Delta_1]$$

式中:

$$e^{2(2\lambda_{1i}\Delta_1)}=\frac{D_3+2\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{D_3-2\lambda_{1i}\lambda_{2i}}$$

令

$$\frac{(D_1-iE_1)e^{-2\lambda_{1i}\Delta_1}}{D_3-2\lambda_{1i}\lambda_{2i}}=\rho_1 e^{-i2\delta_1}$$

则

$$u_2(x,t)\to-2\lambda_{1i}\rho_1\operatorname{sech}[Z_1-2\lambda_{1i}\Delta_1]e^{-i2Y_1-i2\delta_1}$$

上式右端 ($\rho_1=1$) 即为发生了位移 Δ_1 和相移 $2\delta_1$ 的单孤子解。同理可知，当 $t\to+\infty$ 且 Z_2 维持不变时，将趋近另一个单孤解。还可证明当 $t\to-\infty$ 且维持 Z_1 或 Z_2 不变时，仍然是分别趋近两个相应的单孤子解，只是位移及相移不同而已，这说明在遥远的过去或在和时间之后，将产生净余位移和相移。

(3) N−孤子情形

对于多孤子(N≥ 3)，原则上，按上面方法可解出线性方程，从而得 N−孤子解，而且当 $t\to\pm\infty$ 并固定$Z_n(n=1,2,\cdots,N)$不变可以得到$u_N(x,t)$的渐近解[37]：

$$u_N^{(+)}(x,t)\to-2\lambda_{ni}\operatorname{sech}[Z_n-2\lambda_{ni}\Delta_n]e^{-i2Y_n-i2\delta_n}\qquad(\text{当}t\to+\infty\text{时})$$

$$u_N^{(-)}(x,t)\to-2\lambda_{ni}\operatorname{sech}[Z_n+2\lambda_{ni}\Delta_n]e^{-i2Y_n+i2\delta_n}\qquad(\text{当}t\to-\infty\text{时})$$

式中:

$$2\lambda_{ni}\Delta_n=\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left|\frac{\lambda_n-\lambda_j}{\lambda_n-\lambda_j^*}\right|-\sum_{j=n+1}^{N}\ln\left|\frac{\lambda_n-\lambda_j}{\lambda_n-\lambda_j^*}\right|$$

$$2\delta_n=\sum_{j=1}^{n-1}\arg\left[\frac{\lambda_n-\lambda_j}{\lambda_n-\lambda_j^*}\right]-\sum_{j=n+1}^{N}\arg\left[\frac{\lambda_n-\lambda_j}{\lambda_n-\lambda_j^*}\right]$$

可见，从 $t\to-\infty$ 到 $y\to+\infty$ 过程中发生的总位移和总相移分别是:

$$\Delta^{(n)}=2\Delta_n$$

$$\delta^{(n)}=2\delta_n$$

到此，N−孤子解在$t\to\pm\infty$时渐近行为可写成:

$$u_N^{(+)}(x,t)\approx\sum_{n=1}^{N}(-2\lambda_{ni})\operatorname{sech}[Z_n-2\lambda_{ni}\Delta_n]e^{-i2Y_n-i2\delta_n}$$

$$u_N^{(-)}(x,t)\approx\sum_{n=1}^{N}(-2\lambda_{ni})\operatorname{sech}[Z_n+2\lambda_{ni}\Delta_n]e^{-i2Y_n+i2\delta_n}$$

2.3.7　NLS 方程的初值问题

求解 NLS 方程的孤子解，有两种情况：其一是寻求孤子特解，包括多孤子解；其二是初值问题。例如，后面要介绍的 Darboux 变换法、Horita 方法只能求出孤子特解，但不便用于求解初值问题；逆散射方法既可求解孤子特解，也适应于求解初值问题。

求解初值问题的步骤是(详见文献〔43〕)：

① 由式(2.78)出发，求v_1的本征值问题，即求出本征值λ_n和相应的本征函数v_1，求出v_1后，再由式(2.77)求出v_2，于是得到 v，一般 v 有两个线性无关解φ_n和$\overline{\varphi}_n$(其中，$x\to-\infty$时的渐近解记为φ_n、$\overline{\varphi}_n$，而$x\to+\infty$时的渐近解记为ψ_n、$\overline{\psi}_n$)，例如，当 $u(x,0)=A\operatorname{sech}x$，可作变量代换 $s=(1-\tanh x)/2$，代入式(2.78)，立即化为合流超几何方程，其解可写成合流超几何函数。

② 得到 ψ_{1n}、ψ_{2n}、φ_{1n}、φ_{2n}之后，利用式(2.66)求出 $b(t,\lambda)$(λ 在实轴上)和 $a(t,\lambda)$，再求 $r(t,\lambda)$；同时，注意$\overline{\psi}_1=\overline{\psi}_2^*$，$\overline{\psi}_2=\psi_1^*$，由(2.76)式确定 $b_n(0)$。

③ 由于 $a(t,\lambda_n)=a(0,\lambda_n)$，但 $b_n(t)$用式(2.122)确定，$c(t,\lambda_n)$由式(2.124)确定。一般情况下，$r(0,\lambda)\neq0$，由式(2.123)确定 $r(t,\lambda)$。

④、⑤两步同前面 2.3.6 节的②、③两步。

对于 $r(t,\lambda)\neq0$ 时一般只能讨论一些微扰情况。

下面简略给出初值问题的本征问题求解过程，考虑到 Satsuma 等[43]所使用的算符与本节中的有所不同，引入：

$$\hat{U}=\begin{bmatrix}0 & u\\ u^*\delta & 0\end{bmatrix}$$

$$\hat{L}=-i\lambda\sigma_3+i\varepsilon\hat{U}$$

则当 $\varepsilon=-i$，$\delta=-1$ 时，即为本节符号。$\varepsilon=+1$，$\delta=+1$ 时，即 Satsuma 等所用的符号，这时，消去 v_2 之后的式 (2.78) 是

$$(v_{1x}+i\lambda v_1)_x=i\lambda(v_{1x}+i\lambda v_1)+\frac{u_x}{u}(v_{1x}+i\lambda v_1)-\varepsilon^2\delta|u|^2v_1$$

设初始值是

$$u(x,0)=A\operatorname{sech}x$$

作变换

$$s=\frac{1}{2}(1-\tanh x)$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\operatorname{sech}^2 x\cdot\tanh x\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{4}\operatorname{sech}^4 x\frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

$$\tanh x=(1-2s)\qquad \operatorname{sech}^2 x=4s(1-s)\qquad \frac{u_x}{u}=-\tanh x$$

代入方程化简可得

$$s(1-s)\frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2}+\left(\frac{1}{2}-s\right)\frac{\partial v_1}{\partial s}+\left[(\varepsilon^2\delta)A^2+\frac{\lambda^2+\mathrm{i}\lambda(1-2s)}{4s(1-s)}\right]v_1=0$$

显然，无论是 Satsuma 符号约定还是本节符号约定，都有$\varepsilon^2\delta=1$，即不改变本征方程。可以看到：$x\to+\infty$对应于$s\to 0$；$x\to-\infty$对应于$s\to 1$。进一步作变换$v_1=s^{\sigma}(1-s)^{\rho}q_1$，则本征方程可变成合流超几何方程，并且给出两个线性无关解：

$$v_1^{(1)}(s)=s^{\mathrm{i}\lambda/2}(1-s)^{-\mathrm{i}\lambda/2}F\left(-A,\ A,\ \mathrm{i}\lambda+\frac{1}{2};\ s\right)$$

$$v_1^{(2)}(s)=s^{1/2-\mathrm{i}\lambda/2}(1-s)^{-\mathrm{i}\lambda/2}F\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\lambda+A,\ \frac{1}{2}-\mathrm{i}\lambda-A,\ \frac{3}{2}-\mathrm{i}\lambda;\ s\right)$$

式中，$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ s)$是合流超几何函数。关于$v_2(s)$的两个线性无关解，可通过把上面解中$\lambda\to-\lambda$而得到，分别记作$v_2^{(1)}$，$v_2^{(2)}$。于是，$(v_1^{(1)},\ v_1^{(2)})^T$即为前面$\varphi=(\varphi_1,\ \varphi_2)^T(x\to-\infty)$或$\psi=(\psi_1,\ \psi_2)^T(x\to+\infty)$，而$(v_2^{(1)},\ v_2^{(2)})^T$代表$\overline{\varphi}=(\overline{\varphi}_1,\ \overline{\varphi}_2)^T$或$\overline{\psi}=(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2)^T$，$v_2^{(1)}$、$v_2^{(2)}$的具体形式是：

$$v_2^{(1)}(s)=s^{-\mathrm{i}\lambda/2}(1-s)^{\mathrm{i}\lambda/2}F\left(-A,\ A,\ -\mathrm{i}\lambda+\frac{1}{2};\ s\right)$$

$$v_2^{(2)}(s)=s^{1/2+\mathrm{i}\lambda/2}(1-s)^{\mathrm{i}\lambda/2}F\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\lambda+A,\ \frac{1}{2}+\mathrm{i}\lambda-A,\ \frac{3}{2}+\mathrm{i}\lambda;\ s\right)$$

下面就可以从上述本征解中构造 Jost 解了。对于连续谱λ，满足式(2.63)和式(2.64)边界条件的解$\overline{\psi}$、ψ、φ分别是：

$$\psi=\begin{bmatrix}\dfrac{A}{\lambda+\mathrm{i}/2}v_1^{(2)}\\ v_2^{(1)}\end{bmatrix}$$

$$\overline{\psi}=\begin{bmatrix}v_2^{(1)*}\\ -\dfrac{A}{\lambda-\mathrm{i}/2}v_1^{(2)*}\end{bmatrix}$$

$$\varphi=a(0,\ \lambda)\overline{\psi}+b(0,\ \lambda)\psi$$

式中：

$$a(0,\ \lambda)=\frac{|\Gamma(-\mathrm{i}\lambda+1/2)|^2}{\Gamma(-\mathrm{i}\lambda+A+1/2)\Gamma(-\mathrm{i}\lambda-A+1/2)}$$

$$b(0,\ \lambda)=\frac{\mathrm{i}|\Gamma(\mathrm{i}\lambda+1/2)|^2}{\Gamma(A)\Gamma(1-A)}=\frac{\mathrm{i}\sin(\pi A)}{\cosh(\pi\lambda)}$$

上式同时确定了由式 (2.67) 所定义的 $a(0,\ \lambda)$、$b(0,\ \lambda)$ 及 $r(0,\ \lambda)$。离散本征值是 $a(0,\ \lambda)$ 的零点，由上式，可得到

$$\lambda_m=\mathrm{i}\left(A-m+\frac{1}{2}\right)$$

式中，m 是小于 $A+1/2$的正整数，这时可保证 $\mathrm{Im}(\lambda_m)>0$，即 λ 在上半复平面。

(1) $A=N$ 时的情形

当 $A=N$ 时，则$m\leqslant N$，即 $m=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，

$$a(0,\ \lambda)=\prod_{n=1}^{N}\frac{(\lambda-\lambda_n)}{(\lambda-\lambda_n^*)}$$

$$b_n(0)=(-1)^{n-1}\mathrm{i}\qquad b(0,\ \lambda)=0$$

这时可按前面步骤求出$u_N(x,\ t)$。需要指出，由孤子正比于本征值实部，而上面本征值 $\mathrm{Re}(\lambda_m)=0$，因此，不同于前面一般解的情形(即各孤子速度不同，最终会分离)，但以 $A\cdot\operatorname{sech}x$ 为初值的演化过程，由于各个孤子速度均为零(因 $\mathrm{Re}\,\lambda_m=0$)，因此，各个孤子将在同一处相互叠加，结果形成幅度及宽度随时间周期变化的高阶孤子(有些文献称之为呼吸子)。下面给出 $N=1$，$N=2$ 时的解

$N=1$ 时：　　$u(x,t)=\operatorname{sech}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

这时 $n=1$，$\lambda=\mathrm{i}/2$ 且 v 是

$$v=\operatorname{sech}\left(\frac{x}{2}\right)\begin{bmatrix}\mathrm{i}^{-\mathrm{i}/2}\mathrm{e}^{-x/2}\\ \mathrm{i}^{1/2}\mathrm{e}^{x/2}\end{bmatrix}$$

$N=2$ 时：　　$$u(x,t)=\frac{4[\cosh(3x)+3\mathrm{e}^{+\mathrm{i}8t}\cosh x]\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\cosh(4x)+4\cosh(2x)+3\cos(8t)}$$

这时，$\lambda_1=3\mathrm{i}/2$，$\lambda_2=\mathrm{i}/2$ 且 v 分别是：

$$v^{(1)}=\left(\frac{3}{8}\right)^{1/2}\operatorname{sech}^2x\begin{bmatrix}\mathrm{i}^{-1/2}\mathrm{e}^{-x/2}\\ \mathrm{i}^{1/2}\mathrm{e}^{x/2}\end{bmatrix}$$

$$v^{(2)}=\left(\frac{1}{8}\right)^{1/2}\operatorname{sech}^2x\begin{bmatrix}\mathrm{i}^{-1/2}\mathrm{e}^{-x/2}(2\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})\\ \mathrm{i}^{1/2}\mathrm{e}^{x/2}(\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{-x})\end{bmatrix}$$

(2) $A=N+\alpha$，$|\alpha|<1/2$ 的情形

这时，$a(0,\ \lambda)$仍有 N 个零点，即 λ 有 N 个离散本征值，但 $b(0,\ \lambda)\neq0$，即 $r(0,\ \lambda)=b(0,\ \lambda)/a(0,\ \lambda)\neq0$，这时严格求解线性积分方程组是很困难的，不过可由渐近方法对其作一些分析，在文献〔43〕中作了简略讨论。非线性演化方程求解困难重重，它们大多数是无法用逆散射方法求解，也不能用现有已知的解析方法求解。在现在已知的各种方法中，也只有逆散射方法从原理上可同时求解特解及初值问题，其它方法只能求某些特解。即使对于众所周知的那几个可积方程(即可用逆散射方法严格求解的)，逆散射方法仍然只能分析某一些特解及在非常特殊的初始注入情况时的演化(初值问题)；初始注入微小偏

离于这种特殊注入，求解变得非常复杂甚至不可能(由 NLS 方程已看到这一点)，主要障碍有两点：① 本征方程可能不可求解；② 即使本征值问题能顺利解决，但一般 $r(0,\ \lambda)\neq 0$，这时，线性积分方程一般是不可求解的。

(3) 一般解析结果

基于初值问题的逆散射分析，已经确定了 $A\,\mathrm{sech}\,x$ 注入的本征值的性质，即本征值只有虚部，而且$\lambda_m=\mathrm{i}(A-m+(1/2))$，因此，我们可从看另一角度来考虑：直接以虚本征值假设作为前题，由前面所述求解特解的逆散射方法(而不是初值问题的逆散射方法)来求解本征值只有虚部这一特定情况下的特解。这时前面给出的 NLS 方程的 N-孤子特解是

$$u_N(x,\ t)=-2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^*\psi_{2j}^*$$

式中：

$$\alpha_j=\sqrt{c_j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_j x+\mathrm{i}2\lambda_j^2 t}$$

ψ_2是线性方程组

$$\psi_{1j}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_j\alpha_k^*}{\lambda_j-\lambda_j^*}\psi_{2k}^*=0$$

$$\psi_{2j}^*-\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_j^*\alpha_k}{\lambda_j^*-\lambda_k}\psi_{1k}=\alpha_j^*$$

当 $\lambda_j=\mathrm{i}\eta_j$ 时

$$\alpha_j=\sqrt{c_j}\,\mathrm{e}^{-\eta_j x-\mathrm{i}2\eta_j^2 t}$$

c_j 一般是复数，因此 c_j 和 $\eta_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 包含 $3N$ 个实常数，它们并不是独立的，当孤子关于 $x=0$ 对称时，作为留数的 c_j 与 η_j 有如下关系：

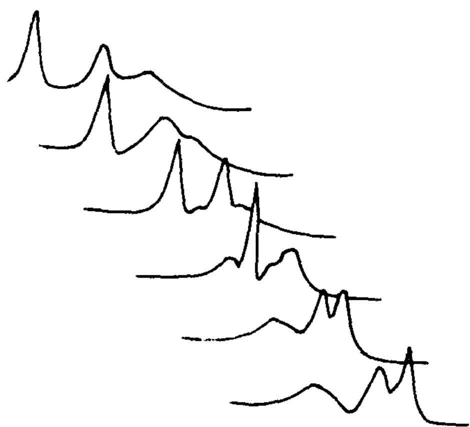
$$c_j=\frac{\prod\limits_{k=1}^{N}(\eta_j+\eta_k)}{\prod\limits_{k\neq j}^{N}|\eta_j-\eta_k|}$$

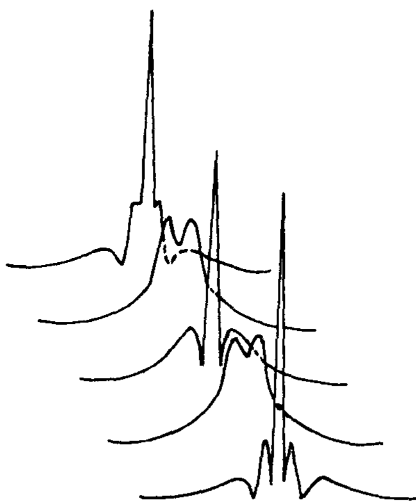
当 $\eta_j=A-j+(1/2)$ 时，正是前述两种情况的结论。

2.3.8 N-孤子解与 N 阶孤子解

NLS 方程所支持的孤子或呼吸子是双参量的，而 KdV 是单参量的，即前面幅值或宽度与速度是独立的，后者的幅值或宽度与速度不独立——幅值或宽度高者速度快。在 NLS 孤子解中，孤子幅值或宽度由本征值虚部决定；其速度由其实部决定。当实部相同或为零时，如果在初始时刻各孤子叠加在一起，则它们将永远叠加在一起，形成周期性变化的高阶孤子，如前面讨论的初值问题便是一例。如果初始时刻，各孤子虽然速度一致(如都为零)，但在位置上彼此充分地分开，孤子将永远保持它们的间距，如光纤中作为通信载体的一阶孤子序列就属于此类。图 2-2、图 2-3 中给出本征值取不同值时的演化，可

从中看到孤子的幅值或宽度及速度与本征值的关系。图 2–2 的参数是$\lambda_1=(1/2)+(i/2)$，$\lambda_2=1+i$，$\lambda_3=(3/2)+3i/2$，图 2－3 的参数是$\lambda_1=(1/2)+(i/2)$，$\lambda_2=(1/2)+(3i/2)$，$\lambda_3=(1/2)+(5i/2)$。


图　2－2


图 2－3

2.3.9　附录：Jost 解的解析性质证明

前面用到：φ，ψ 在 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ 的上半平面上解析，$\overline{\varphi}$，$\overline{\psi}$在 $\mathrm{Im}\,\lambda<0$ 的下半平面上解析；现在证明之。以 φ 为例。由式(2.60)，式(2.61)，当 $x\to-\infty$ 时，有式(2.63)渐近解，因此，利用微分方程中的变动参数法可得 Volterra 积分方程

$$\Phi=[\varphi,\ \overline{\varphi}]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\sigma_3}+\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-y)\sigma_3}\hat{U}(y,\ t)\Phi(y,\ t,\ \lambda)$$

由此可得 φ 和 $\overline{\varphi}$：

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}+\int_{-\infty}^{+x}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-y)}\sigma_3\hat{U}(y,\ t)\varphi(y,\ t,\ \lambda)$$

$$\overline{\varphi}=\begin{bmatrix}\overline{\varphi}_1\\ \overline{\varphi}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda x}+\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-y)}\sigma_3\hat{U}(y,\ t)\overline{\varphi}(y,\ t,\ \lambda)$$

只讨论 φ 即可，对$\overline{\varphi}$ 的讨论是类似的。于是，φ 的两个分量写成：

$$\varphi_1(x,\ t,\ \lambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}+\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-y)}u(y,\ t)\varphi_2(y,\ t,\ \lambda)$$

$$\varphi_2(x,\ t,\ \lambda)=-\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-y)}u^*(y,\ t)\varphi_1(y,\ t,\ \lambda)$$

从上式中消去φ_2，有

$$\varphi_1(x, t, \lambda)e^{i\lambda x} = 1 - \int_{-\infty}^{x} dy \int_{-\infty}^{y} dz u(y, t) u^*(x, t) e^{i2\lambda(y-z)} \varphi_1(x, t, \lambda) e^{i\lambda z}$$

迭代上式，即上式代入上式自身得到 Neumann 展开

$$\varphi_1(x, t, \lambda)e^{i\lambda x} = 1 - \int_{-\infty}^{x} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 u(x_1, t) u^*(x_2, t) e^{i2\lambda(x_1 - x_2)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{x_2} dx_3 \int_{-\infty}^{x} dx_4 u(x_1, t) u^*(x_2, t) e^{i2\lambda(x_1 - x_2)}$$

$$\cdot u(x_3, t) u^*(x_4, t) e^{i2\lambda(x_3 - x_4)} + \cdots$$

当 $\operatorname{Im}\lambda > 0$ 时，有

$$\left|\varphi_1(x, t, \lambda)e^{i\lambda x}\right|$$

$$\leqslant 1 + \int_{-\infty}^{x_1} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 |u(x_1, t)| \cdot |u(x_2, t)|$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{x_2} dx_3 \int_{-\infty}^{x_3} dx_4$$

$$\cdot |u(x_1, t)| \cdot |u(x_2, t)| \cdot |u(x_3, t)| \cdot |u(x_4, t)| + \cdots$$

利用不等式:

$$\int_{-\infty}^{x} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} dx_n |u(x_1, t)| \cdots |u(x_n, t)|$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{x} dx_1 |u(x_1, t)| \cdots \int_{-\infty}^{x} dx_n |u(x_n, t)|$$

$$\left|\varphi_1(x, t, \lambda)e^{i\lambda x}\right| \leqslant 1 + \frac{1}{2!} A^2(x, t) + \frac{1}{4!} A^4(x, t) + \cdots = e^{A(x, t)}$$

式中:

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{x} dy |u(y, t)|$$

若$u(x, t)$绝对可积，即

$$A(\infty, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy |u(y, t)| < \infty$$

则上面 Neumann 展开对于 $\operatorname{Im}\lambda > 0$ 是绝对、一致收敛的，因而在 $\operatorname{Im}\lambda > 0$ 的上半平面定义了一个解析函数，即$\varphi_1(x, t, \lambda)e^{i\lambda x}$；对于$\varphi_2 e^{i\lambda x}$也是如此。因而，$\varphi(x, t, \lambda)$在 $\operatorname{Im}\lambda > 0$ 上半平面解析；同理可证: $\bar{\varphi}(x, t, \lambda)$在下半平面解析；而且，另一对 Jost 解 $\psi(x, t, \lambda)$及 $\bar{\psi}(x, t, \lambda)$ 也分别在上半和下半平面解析。 证 毕

2.4 Hirota 方 法

Hirota 方法是一种直接方法。我们已看到逆散射方法是很繁的，直接方法就简单多了。Hirota 方法的基本思想是，对非线性方程

$$u_t = \hat{N}(u)$$

或

$$u_{tt} = \hat{N}(u)$$

的解进行Pada近似分析，即令

$$u = \frac{G}{F}$$

代入方程，并从中分离出两个 G、F 所满足的双线性方程，再求解双线性方程即可。

2.4.1 KdV 方程

以 KdV 方程为例(参考文献〔39，44～50〕):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

可得

$$\frac{G_tF - GF_t}{F^2} + \frac{3(G_xF - GF_x)^2}{F^4} + \frac{G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x - 3G_xF_{xx} - GF_{xxx}}{F^2} + \frac{6(FG_xF_x^2 + FGF_xF_{xx} - GF_x^3)}{F^4} = 0 \tag{2.125}$$

方程式 (2.125) 似比原来方程更复杂，而且在一个方程中含有两个未知数 F 和 G。但我们注意到式 (2.125) 可改写为

$$\frac{G_tF - GF_t + 3\lambda(G_xF - GF_x) + G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x + 3G_xF_{xx} - GF_{xxx}}{F^2} + \frac{3(G_xF - GF_x)[G_xF - GF_x - 2(FF_{xx} - F_x^2) - \lambda F^2]}{F^4} = 0 \tag{2.126}$$

引入任意参数λ，可得到两个方程:

$$G_tF - GF_t + 3\lambda(G_xF - GF_x) + G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x + 3G_xF_{xx} - GF_{xxx} = 0 \tag{2.127}$$

$$2(FF_{xx} - F_x^2) + \lambda F^2 - (G_xF - GF_x) = 0 \tag{2.128}$$

它们还可分别表示为:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) + 3\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^3\right] \cdot G(x, t)F(x', t')\big|_{x=x',\ t=t'} = 0 \tag{2.129}$$

和

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 + \lambda\right] F(x, t)F(x', t')\big|_{x=x',\ t=t'}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)G(x,\ t)F(x',\ t')|_{x=x',\ t=t'}=0 \tag{2.130}$$

为了表示方便，引入算子 D_t、D_x 以及它们的各种乘积如下：

$$D_t^nD_x^mf\cdot g=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^mf(x,\ t)g(x',\ t')|_{x=x',\ t=t'} \tag{2.131}$$

于是利用这些符号，式(2.129)、式(2.130)可简写为：

$$(D_t+3\lambda D_x+D_x^3)G\cdot F=0 \tag{2.132}$$

$$(D_x^2+\lambda)F\cdot F-D_xG\cdot F=0 \tag{2.133}$$

式(2.133)可写为

$$\lambda=\left(\frac{G}{F}\right)_x-2(\ln F)_{xx} \tag{2.134}$$

若取$\lambda=0$，可知

$$G=2F_x \tag{2.135}$$

为式(2.134)的解。于是有

$$u=\left(\frac{G}{F}\right)_x=2(\ln F)_{xx} \tag{2.136}$$

将式(2.135)代入式(2.114)可得：

$$(D_t+D_x^3)F_x\cdot F=0 \tag{2.137}$$

或

$$D_x(D_t+D_x^3)F\cdot F=0 \tag{2.138}$$

下面求解式(2.138)，将F展为小参数ε的幂级数

$$F=1+\varepsilon f_1+\varepsilon^2f_2+\cdots \tag{2.139}$$

将式(2.139)代入式(2.138)，比较ε的同次幂得到：

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_1=0 \tag{2.140}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_2=-D_x(D_t+D_x^3)f_1\cdot f_1 \tag{2.141}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_3=-D_x(D_t+D_x^3)(f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2) \tag{2.142}$$

························

下面寻求两种形式的解：多项式解和指数形式的解。

(1) 多项式解

$$f_1=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+bt-24a_4tx \tag{2.143}$$

是式 (2.140) 的一个解的条件是 $a_4=0$，$3a_1a_3=a_2^2$，$b=12a_3$ 时，可选取$f_2=0$。因此得到式 (2.138) 的一个精确解，即

$$F = 1 + \varepsilon\left[a_0 + a_1 x + (3a_1 a_3)^{\frac{1}{2}} x^2 + a_3(x^3 + 12t)\right] \tag{2.144}$$

如置边界条件$u|_{x=0} = 0$，则 $a_1 = 0$。当选取 $\varepsilon = 1$时，F 的表达式为

$$F = a_3[x^3 + 12(t + \text{const})] \tag{2.145}$$

因 $u = 2(\ln F)_{xx}$，利用解的有界性条件得到

$$u = \frac{-6x(x^3 - 24t)}{(x^3 + 12t)^2} \tag{2.146}$$

(2) 指数形式的解

从式(2.140)有

$$f_1 = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{\Omega_j t + p_j x} \tag{2.147}$$

式中，$Q_i + p_j^3 = 0$，p_j和 a_j均为常数。

将式(2.147)代入式(2.141)，利用 D 算子的性质(Ⅳ)和(Ⅳ.1)(见后面)，可得

$$f_2 = \sum_{i>j}^{N} \exp(A_{ij} + \eta_i + \eta_j) \tag{2.148}$$

式中，$\exp(\eta_j) = a_j \exp(Q_j t + p_j x)$，且

$$\exp(A_{ij}) = -\frac{(p_i - p_j)[Q_i - Q_j + (p_i - p_j)^3]}{(p_i + p_j)\left[Q_i + Q_j + (p_i + p_j)^3\right]} = \frac{(p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} \tag{2.149}$$

将式(2.148)代入式(2.142)，利用 D 算子性质(Ⅵ.4)和关系式(2.140)，可得

$$f_3 = \sum_{i>j>k}^{N} \exp(A_{ijk} + \eta_i + \eta_j + \eta_k) \tag{2.150}$$

式中:

$$\exp(A_{ijk}) = \exp(A_{ij} + A_{ik} + A_{ik}) \tag{2.151}$$

一直到求出f_N，我们得到精确解

$$F = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{i>j}^{(N)} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_j \mu_j \eta_j\right) \tag{2.152}$$

式中，$\sum\limits_{\mu=0,1}$ 表示对 $\mu_1 = 0, 1$；$\mu_2 = 0, 1$；…；$\mu_n = 0, 1$ 所有可能的组合求和；$\sum\limits_{i>j}^{(N)}$ 表示对 N 个元素所有满足条件的对进行求和。小参数 ε 已吸收到常数项 a_i 中去了。式 (2.152) 连同 $u = 2(\ln F)_{xx}$ 给出 KdV 方程的 $N-$ 孤子解公式。

2.4.2 Sine-Gordon 方程

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi$$

设$\partial\varphi / \partial x \to 0$ ($|x| \to \infty$)。令

$$\varphi(x, t) = 4\arctan\left[\frac{g(x, t)}{f(x, t)}\right] \tag{2.153}$$

式中:

$$f(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)}\sum_{N^{c}n}a(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{2n})\cdot\exp(\eta_{i_1}+\eta_{i_2}+\cdots+\eta_{i_{2n}}) \tag{2.154}$$

$$g(x,\ t)=\sum_{m=0}^{[(N-1)/2]}\sum_{N^{c}2m+1}a(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{2m+1})\cdot\exp(\eta_{j_1}+\eta_{j_2}+\cdots+\eta_{j_{2m+1}}) \tag{2.155}$$

$$a(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n)=\begin{cases}\prod\limits_{k<l}^{(n)}a(i_k,\ i_l) & n\geqslant 2\\ 1 & n=0,\ 1\end{cases}$$

$$a(i_k,\ i_l)=\frac{(p_{ik}-p_{il})^2-(Q_{ik}-Q_{il})^2}{(p_{ik}+p_{il})^2-(Q_{ik}+Q_{il})^2}=-\frac{(p_{ik}-p_{il}+Q_{ik}-Q_{il})^2}{(p_{ik}-p_{il}+Q_{ik}+Q_{il})^2}$$

$$\eta_i=p_ix-Q_it-\eta_i^0 \qquad p_i^2-Q_i^2=1$$

p_i 为任意的有限的实常数（各 p_i 相互不同），它决定第 i 个孤立子的振幅，η_i^0 为任意的有限实常数，它决定第 i 个孤立子的位相。

2.4.3 MKdV 方程

$$u_t+24u^2u_x+u_{xxx}=0$$

设 $u(x,\ t)=\partial\varphi/\partial t$，可得

$$\tan\varphi(x,\ t)=\frac{g(x,\ t)}{f(x,\ t)}$$

式中:

$$f(x,\ t)=\sum_{n=0}^{[N/2]}\sum_{N^{c}n}a(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_{2n})\cdot\exp(\xi_{i_1}+\xi_{i_2}+\cdots+\xi_{i_{2n}})$$

$$g(x,\ t)=\sum_{n=0}^{[N-1/2]}\sum_{N^{c}2m+1}a(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{2m+1})\cdot\exp(\xi_{i_1}+\xi_{i_2}+\cdots+\xi_{i_{2m+1}})$$

$$a(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n)=\begin{cases}\prod\limits_{k<l}^{(n)}a(i_k,\ i_l) & n\geqslant 2\\ 1 & n=0,\ 1\end{cases}$$

$$a(i_k,\ i_l)=-\frac{(p_{ik}-p_{il})^2}{(p_{ik}+p_{il})^2}$$

$$\xi_i=p_ix-Q_it-\xi_t^0 \qquad Q_i=p_i^3$$

2.4.4 附录：D 算子的性质[39]

$$\mathrm{D}_t^n\mathrm{D}_x^m a\cdot b=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m a(x,\ t)b(x',\ t')\Big|_{t=t',\ x=x'}$$

再引入算子 D_z 和微分算子 $\partial/\partial z$ 如下:

$$D_z = \delta D_t + \varepsilon D_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \delta\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}$$

式中，δ 和 ε 都是常数。

从 D 算子定义容易得到以下性质:

(Ⅰ)　$D_z^m a \cdot 1 = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m a$

(Ⅱ)　$D_z^m a \cdot b = (-1)^m D_z^m b \cdot a$

(Ⅱ.1)　$D_z^m a \cdot a = 0$ (m为奇数)

(Ⅲ)　$D_z^m a \cdot b = D_z^{m-1}(a_z \cdot b - a \cdot b_z)$

(Ⅲ.1)　$D_z^m a \cdot a = 2D_z^{m-1} a_z \cdot a$ (m为偶数)

(Ⅲ.2)　$D_x D_t a \cdot a = 2D_x a_t \cdot a = 2D_t a_x \cdot a$

(Ⅳ)　$D_x^m \exp(p_1 x) \cdot \exp(p_2 x) = (p_1 - p_2)^m \exp[(p_1 + p_2)x]$

设 $F(D_t, D_x)$为 D_t和 D_x的多项式，则有:

(Ⅳ.1)　$F(D_t, D_x)\exp(Q_1 t + p_1 x)\exp(Q_2 t + P_2 x)$

$$= \frac{F(Q_1 - Q_2, p_1 - p_2)}{F(Q_1 + Q_2, p_1 + p_2)} F(D_t, D_x)\exp[(Q_1 + Q_2)t + (p_1 + p_2)x]$$

(Ⅴ)　$\exp(\varepsilon D_x)a(x) \cdot b(x) = a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon)$

(Ⅵ)　$\exp(\varepsilon D_z)ab \cdot cd = [\exp(\varepsilon D_z)a \cdot c] \cdot [\exp(\varepsilon D_z)b \cdot d]$

$$= [\exp(\varepsilon D_z)a \cdot d][\exp(\varepsilon D_z)b \cdot c]$$

(Ⅵ.1)　$D_z ab \cdot c = \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)bc + a(D_z b \cdot c)$

(Ⅵ.2)　$D_z^2 ab \cdot c = \left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)bc + 2\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)D_z b \cdot c + a(D_z^2 b \cdot c)$

(Ⅵ.3)　$D_z^3 ac \cdot bc = (D_z^3 a \cdot b)c^2 + 3(D_z a \cdot b)D_z^2 b \cdot c$

(Ⅵ.4)　$D_x^m \exp(px)a \cdot \exp(px)b = \exp(2Px)D_x^m a \cdot b$

(Ⅶ)　$\exp(\delta D_t)[\exp(\varepsilon D_x)a \cdot b] \cdot [\exp(\varepsilon D_x)c \cdot d]$

$$= \exp(\delta D_x)[\exp(\delta D_t)a \cdot c] \cdot [\exp(\delta D_t)b \cdot d]$$

$$= [\exp(\delta D_t + \varepsilon D_x)a \cdot b] \cdot [\exp(-\delta D_t + \varepsilon D_x)c \cdot b]$$

以下等式对于变换非线形性微分方程为双线性式是有用的:

(Ⅷ)　$\exp\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\exp(\varepsilon D_z)a \cdot b}{\cosh(\varepsilon D_z)b \cdot b}$

(Ⅷ.1)　$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{D_x a \cdot b}{b^2}$

(Ⅷ.2)　$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{D_z^2 a \cdot b}{b^2}-\left(\frac{a}{b}\right)\frac{D_z^2 b \cdot b}{b^2}$

(Ⅷ.3)　$\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{D_z^3 a \cdot b}{b^2}-3\left[\frac{D_z a \cdot b}{b^2}\cdot\frac{D_z^2 b \cdot b}{b^2}\right]$

(Ⅸ)　$2\cosh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial z}\right)\ln f=\ln[\cosh(\varepsilon D_z)f \cdot f]$

(Ⅸ.1)　$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln f=\frac{\partial_z^2 f \cdot f}{2f^2}$

(Ⅸ.2)　$\frac{\partial^4}{\partial z^4}\ln f=\frac{D_z^4 f \cdot f}{2f^2}-6\left[\frac{D_z^2 f \cdot f}{2f^2}\right]^2$

对于把双线性微分方程变换为原来非线性方程，以下等式是有用的:

(Ⅹ)　$\exp(\varepsilon D_x)a \cdot b=\left\{\exp\left[2\cosh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln b\right]\right\}\left[\exp\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\right]$

令$\psi=a/b$，$u=2(\ln b)_{xx}$，有:

(Ⅹ.1)　$\frac{D_x a \cdot b}{b^2}=\psi_x$

(Ⅹ.2)　$\frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2}=\psi_{xx}+u\psi$

(Ⅹ.3)　$\frac{D_x^4 a \cdot b}{b^2}=\psi_{xxxx}+6u\psi_{xx}+(u_{xx}+3u^2)\psi$

(Ⅺ)　$\exp(\varepsilon D_x)a \cdot b=\exp\left[\sinh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\cosh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\ln(ab)\right]$

令$\varphi=\ln(a/b)$，$\rho=\ln(ab)$，有:

(Ⅺ.1)　$\frac{D_x a \cdot b}{ab}=\varphi_x$

(Ⅺ.2)　$\frac{D_x^2 a \cdot b}{a \cdot b}=\rho_{xx}+\varphi_x^2$

(Ⅺ.3)　$\frac{D_x^3 a \cdot b}{ab}=\varphi_{xxx}+3\varphi_x\rho_{xx}+\varphi_x^3$

(Ⅺ.4)　$\frac{D_x^4 a \cdot b}{a \cdot b}=\rho_{xxxx}+4\varphi_x\varphi_{xxx}+3(\rho_{xx})^2+6\varphi_x^2\rho_{xx}+\varphi_x^4$

2.5　其它方法简介

孤波方程求解方法除上述两种外，还有作为直接法的 Backlund 变换法、Darboux 变换法和变分法，以及作为微扰法的变分微扰法和逆散射微扰法。这些方法都在有关文献中有详细论述。

2.5.1　Backlund 变换法[51~53]

Lamb[51] 用 Backlund 变换(BT)求出了如下的 Sine–Gordon 方程(SG 方程)

$$\varphi_{\xi\eta}=\sin\varphi$$

的孤波解，Backlund 变换是一类函数变换关系式。对于上述 SG 方程，可引入:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi}&=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+2\lambda\sin\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial\eta}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{2}{\lambda}\sin\left(\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

式中，λ 为任意参数。把第一式对 η 微分，第二式对 ξ 微分，并利用 φ' 的二阶微分一致性，可证若 φ 满足 SG 方程，并可证 φ' 也满足 SG 方程。因此，上面变换给出了两个解之间的变换关系。于是，若取 $\varphi=0$(平凡解)，则可得:

$$\varphi_1=\varphi'=4\arctan\left[\exp\left(\pm\frac{x-\mathrm{D}t}{\sqrt{1-\mathrm{D}^2}}\right)\right]$$

式中，$\mathrm{D}=(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)$。

φ_1 正是 SG 方程的一个孤子解。再将 φ_1 代入变换式，即 $\varphi=\varphi_1$，则可得另一个解 φ_2。当然，利用“可换性定理”(详见文献〔39〕)，在得到多孤子解时更为方便。总之，Backlund 变换总是无中生有，从 N 孤子解变换为 N+ 1 孤子解，利用“可换性定理”可得一个非线性叠加公式

$$\tan\left(\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4}\right)=\frac{\mathrm{D}_1+\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1-\mathrm{D}_2}\tan\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{4}\right)$$

若取 $\varphi_0=0$，φ_1、φ_2 取上面的单孤子解 (φ_1 对应 $\mathrm{D}=\mathrm{D}_1$，φ_2 对应 $\mathrm{D}=\mathrm{D}_2$)，代入上式，得双孤子解:

$$\tan\frac{\varphi}{4}=\frac{\sinh\left(x/\sqrt{1-\mathrm{D}^2}\right)}{\cosh\left(\mathrm{D}t/\sqrt{1-\mathrm{D}_2}\right)}$$

和

$$\tan\frac{\varphi}{4}=\frac{\sinh\left(\mathrm{D}t/\sqrt{(1-\mathrm{D}^2}\right)}{\mathrm{D}\cosh\left(x/\sqrt{1-\mathrm{D}_2}\right)}$$

分别对应两个扭结的叠加和一对正、反扭结的碰撞。

若令 D = ib，则

$$\tan\frac{\varphi}{4} = \frac{\sinh\left(bt/\sqrt{1+b^2}\right)}{\cosh\left(x/\sqrt{1+b_2}\right)}$$

代表一个呼吸子解，即正、反扭结周期性地接近又离开。其它方程如 KdV、NLS、MKdV 方程的 Backlund 变换，可参见有关文献。

2.5.2　Darboux 变换法

Darboux 变换法是从式(2.60)出发，即：

$$v_x = \hat{L}_1 v$$

$$v_t = \hat{M} v$$

由于$u(x, t) = 0$时，$\hat{U} = 0$，这时：

$$\hat{L}_{10}(\lambda) = -\mathrm{i}\sigma_3\lambda$$

$$\hat{M}_0(\lambda) = -\mathrm{i}2\lambda^2\sigma_3$$

于是有解

$$v_0(x, t, \lambda) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda x + 2\lambda^2 t)\sigma^3}$$

当$|\lambda| \to \infty$ 时，只保留 λ 的最高次幂，这时，也有：

$$\hat{L}_1 \to \hat{L}_0 \qquad \hat{U} \to \hat{U}_0$$

因为$\hat{U}$ 中不含 λ，故 $\lambda \to \infty$ 时，$\hat{U}$ 项可忽略。于是，可以推想当$|\lambda| \to \infty$ 时，

$$v(x, t, \lambda) \to v_0(x, t, \lambda)$$

那么对于有限的 λ 值，设 v 通过一个变换

$$v(x, t, \lambda) = G(x, t, \lambda)v_0(x, t, \lambda)$$

与 $v_0(x, t, \lambda)$ 相联，因此，$G(x, t, \lambda)$ 应满足

$$G(x, t, \lambda) \to I \qquad |\lambda| \to \infty$$

再进一步假设 $G(x, t, \lambda)$ 关于 λ 只有 N 个一阶极点，于是 $G(x, t, \lambda)$ 可写成

$$G_N(x, t, \lambda) = I + \sum_{n=1}^{N}\frac{A_n(x, t)}{\lambda - \lambda_n}$$

于是与N个极点对应的解为

$$v_N(x, t, \lambda) = G_n(x, t, \lambda)v_0(x, t, \lambda)$$

把这个关系等价为：

$$v_1(x, t, \lambda) = \mathrm{D}_1(x, t, \lambda)v_0(x, t, \lambda)$$

$$v_{n+1}(x, t, \lambda) = \mathrm{D}_{n+1}(x, t, \lambda)v_n(x, t, \lambda) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots, N-1)$$

于是

$$v_N(x, t, \lambda) = D_N D_{N-1} \cdots D_2 D_1 v_0(x, t, \lambda)$$

比较可得

$$G_N(x, t, \lambda) = D_N D_{N-1} \cdots D_2 D_1$$

进一步令

$$D_n(x, t, \lambda) = I + \frac{1}{\lambda - \lambda_n} B_n(x, t) = I + \frac{\lambda_n - \lambda_n^*}{\lambda - \lambda_n} P_n(x, t)$$

式中:

$$B_n(x, t) = (\lambda_n - \lambda_n^*) P_n(x, t)$$

代入上式可得

$$A_n(x, t) = D_N(\lambda_n) \cdots D_{n+1}(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda_n^*) P_n D_{n-1}(\lambda_n) \cdots D_1(\lambda_n)$$

因此只要给出了各个$P_n(x, t)$，即可确定$A_n(x, t)$；于是可得$G_n(x, t, \lambda)$；最后得到$v_N(x, t, \lambda)$。这里$D_n(x, t, \lambda)$称为 Darboux 变换(只有极点展开形式的 Darboux 变换称为亚纯变换)，它的确定(即$P_n(x, t)$的确定)的详细论述可参见文献〔37〕。可以看到，这个方法可以从$v_0(x, t, \lambda)$出发依次得到单孤子解v_1和多孤子解v_2，v_3，…，操作路线是:

$$\begin{array}{ccccccccccc} v_0 \to & P_1 & \to v_1 \to & P_2 & \to v_2 \to & \cdots & \to v_{n-1} \to & P_N \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & \hat{U}_1 & & \hat{U}_2 & & & & \hat{U}_n \end{array}$$

$\hat{U}$为$v = v_n(x, t, \lambda)$所决定的$\hat{U}(x, t)$。根据式(2.59)，也就确定了$u(x, t)$。

2.5.3　变分法与不变量方法

变分法和不变量方法是利用非线性演化方程，建立相应的 Lagrangian 量，以及其它守恒量，如质量、动量等；然后，设定试探解，其中包含了各种变分参数(一般是随时间变化的)；将试探解代入守恒量方程，可解出各个变分参数。例如，文献〔54〕就利用不变量方法分析了 Gauss 脉冲在饱和非线性光纤中的传输特性。

2.5.4　变分微扰法

这是以变分法为基础的微扰方法。变分微扰法的具体求解步骤将在第 5 章的分析应用中作具体说明。

1991 年，Lisak，Anderson 和 Malomed(Opt.Lett., 1991，16(24)，1963)给出了方程

$$\mathrm{i}u_x + \sigma u_{tt} + 2|u|^2 u = \mathrm{i}\varepsilon R[u] \qquad \sigma = -1 \tag{2.156}$$

所支持的暗孤子微扰变分解。

当 $R[u] = 0$ 时，有

$$u(x, t) = u_0 \left\{ 1 + \frac{(\lambda + \mathrm{i}\eta)^2 - u_0^2}{u_0^2[1 + \exp(2Z)]} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2 x} \tag{2.157}$$

式中，$\lambda^2+\eta^2=u_0^2$，$Z=\eta(t+2\lambda x)$。

当 $R[u]\neq 0$ 时，设 $u(x,t)$ 仍有上述形式，但 $u_0=u_0(x)$，$\eta=\eta(x)$ 都是 x 的慢变函数，可根据：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t|u|^2=2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}tu^*R[u] \tag{2.158}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}tu_t^*u=2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}tu_t^*R[u] \tag{2.159}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t(|u_t|^2+|u|^4)=2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}tu_x^*R[u] \tag{2.160}$$

来确定 $u_0(x)$ 及 $\eta(x)$ 的演化。

把 $u(x,t)$ 的试探解代入，可得：

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}=\frac{\varepsilon}{2\lambda}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}Z(\eta+\mathrm{i}\lambda)\mathrm{sech}^2ZR[u]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \tag{2.161}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=\frac{\varepsilon\eta}{2u_0\lambda}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}Z(\eta+\mathrm{i}\lambda)\mathrm{sech}^2ZR[u]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \tag{2.162}$$

式中，$\delta=2u_0^2x$，$\lambda=(u_0^2-\eta^2)^{1/2}$。

注意到脉冲强度由 $|u|^2=u_0^2-\eta^2\mathrm{sech}^2Z$ 给出；对于 $\varepsilon R[u]=-\gamma u$（如光纤损耗），则可确定：

$$u_0(x)=u_0(0)\mathrm{e}^{-\gamma x}$$

$$\eta(x)=\eta(0)\mathrm{e}^{-\gamma x}$$

式中，$u_0^2(0)=\lambda^2(0)+\eta^2(0)$。

对照明孤子的

$$\eta(x)=\eta(0)\mathrm{e}^{-2\gamma x}$$

可见，暗孤子衰减比明孤子慢。

2.5.5 逆散射微扰法

这是以逆散射理论为基础的微扰法。对于一些近似可积系统，这是主要分析工具。在文献〔34, 37〕中给出了逆散射微扰法的详细介绍及其应用，我们也将在后面多章的分析中用到其结论。下面给出绝热近似下的参数演化。

(1) KdV 方程

对于 KdV 方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=\varepsilon R[u] \tag{2.163}$$

设

$$u(x,t) = -2\lambda^2 \mathrm{sech}^2 Z \qquad Z = \lambda(x-\xi) \tag{2.164}$$

于是有:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{4\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z R[u] \mathrm{sech}^2 Z \tag{2.165}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = 4\lambda^2 - \frac{\varepsilon}{4\lambda^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z R[u]\left[Z + \frac{1}{2}\sinh(2Z)\right]\mathrm{sech}^2 Z \tag{2.166}$$

(2) NLS 方程

对于 NLS 方程

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = \varepsilon R[u]$$

设

$$u(x,t) = 2\mathrm{i}\eta\, \mathrm{sech}\, Z \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\xi x - \mathrm{i}\varphi} \qquad Z = 2\eta(x-\xi) \tag{2.167}$$

于是有:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z \varepsilon R[u(Z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\xi x + \mathrm{i}\varphi}\mathrm{sech}\, Z \tag{2.168}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z \varepsilon R[u(Z)]\frac{\tanh Z}{\cosh Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\xi x + \mathrm{i}\varphi} \tag{2.169}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = -4\xi - \frac{1}{4\eta^2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z \frac{Z\varepsilon R[u(Z)]}{\cosh Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\xi x + \mathrm{i}\varphi} \tag{2.170}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 4(\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{2\eta}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z \frac{1 - 2\eta x \tanh Z}{\cosh Z}\varepsilon R[u(Z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\xi x + \mathrm{i}\varphi} \tag{2.171}$$

(3) Sine–Gordon 方程

对于 Sine–Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R[u] \tag{1.172}$$

设kink 解

$$u_k(x,t) = u_k(Z) = 4\arctan(\mathrm{e}^{\sigma Z}) \qquad Z = \frac{x-\xi}{\sqrt{1-V^2}} \tag{2.173}$$

式中，$\sigma = +1$ 代表 kink 解；$\sigma = -1$ 是反 kink 解，这时有:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon\sigma}{4}(1-V^2)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z \frac{R[u_k(Z)]}{\cosh Z} \tag{2.174}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = V - \frac{\varepsilon\sigma}{4}V(1-V^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Z \frac{ZR[u_k(Z)]}{\cosh Z} \tag{2.175}$$

此外，当$R[u] = 0$时，还有另一呼吸子解

$$u_b(x,t) = 4 + \arctan\left[\tan\mu \frac{\sin(\psi\cos\mu)}{\cosh(Z\sin\mu)}\right] \tag{2.176}$$

$$Z=\frac{x-\xi}{\sqrt{1-V^2}} \qquad \xi=Vt+\xi_0$$

$$\psi=\frac{t-Vx}{\sqrt{1-V^2}}+\psi_0$$

也可求出四个参数的演化。

Sine-Gordon 还有另一种形式

$$u_{tx}+\sin u=\varepsilon R[u] \tag{2.177}$$

设

$$u_k(t,x)=4\arctan[\mathrm{e}^Z] \qquad Z=2\nu(x-\xi) \tag{2.178}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}R[u_k(Z)]\mathrm{sech}\, Z\mathrm{d}Z \tag{2.179}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\nu^2}+\frac{\varepsilon}{8\nu^2}\int_{-\infty}^{+\infty}ZR[u(Z)]\mathrm{sech}\, Z\mathrm{d}Z \tag{2.180}$$

上面绝热近似中的慢变参数演化可通过修正守恒律得到，以 NLS 的微扰说明之。

微扰 NLS 方程可写成

$$u_t=+\mathrm{i}[u_{xx}+2|u|^2u]-\mathrm{i}\varepsilon R[u] \tag{2.181}$$

当 $\varepsilon R[u]=0$ 时，上面方程的守恒量由式 (2.97) 给出

$$I_k=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_k(x,t)\mathrm{d}x \qquad (k=1,2,\cdots)$$

这时守恒律是

$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2.182}$$

由泛函微分

$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\delta I_k}{\delta u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\delta I_k}{\delta u^*}\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}x$$

因此，由式(2.181)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\delta I_k}{\delta u}\mathrm{i}[u_{xx}+2|u|^2u]-\frac{\delta I_k}{\delta u^*}\mathrm{i}[u_{xx}^*+2|u|^2u^*]\right\}\mathrm{d}x=0 \tag{2.183}$$

但当 $\varepsilon R[u]\neq 0$ 时，式(2.182)修改为

$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\delta I_k}{\delta u}\mathrm{i}[u_{xx}+2|u|^2u]-\frac{\delta I_k}{\delta u^*}\mathrm{i}[u_{xx}^*+2|u|^2u^*]\right\}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\delta I_k}{\delta u}(-\mathrm{i}\varepsilon R[u])+\frac{\delta I_k}{\delta u^*}(\mathrm{i}\varepsilon R^*[u])\right\}\mathrm{d}x$$

由式(2.183)，上式右端第一部分近似为零。因此，上式变成

$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}2\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta I_k}{\delta u}\varepsilon R[u]\mathrm{d}x \tag{2.184}$$

这就是修正守恒律。由此可确定绝热近似中的慢变参数演化。例如，$k=0$ 时，

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} uu^* \mathrm{d}x$$

因此，$\delta I_0/\delta u = u^*$，$\delta I_0/\delta u^* = u$，将式(2.167)代入式(2.184)，即可得到式(2.168)。同理，再用I_1、I_2等的修正守恒律，可得到其它参数演化。

在孤立子理论及其解析解法方面，发展很快，文献数不胜数，由于篇幅限制，这里只作简要讲述，若需了解细节，可参考有关文献。值得一提的是，我国学者在孤子数学理论研究方面已取得了可喜的成就，见文献〔55～64〕。

2.6　孤子的等价粒子理论

2.6.1　引言

“孤波(孤子)之所以这样称呼是因为它通常作为一个单的实体出现并是局域分布的”，而且，通常把单孤子解称作孤波；但多个孤波出现在一解中时，则称他们为孤子(见文献〔28〕，p7，p15)。事实上，从 1834 年 Russell 对孤子在科学意义上的发现到 1965 年 Zabusky 和 Kruskal[1] 对孤波碰撞性质的数值研究，孤波都表现出了粒子方面的性质。因此，根据英文构字法，才创造了 soliton[1] 即把 Russell 称之为 Solitary Wave 的东西命名为具有“子”属性的 soliton，即孤立子(简称孤子)。尽管如此，人们对孤子的研究，几乎都是从波的角度进行的，从粒子角度进行研究的甚少，本章就是介绍作者在这方面的研究。下面首先研究作为 Lagrange 场论的非线性方程。

2.6.2　一般论述与 Noether 定理

设非线性方程

$$u_t = \hat{N}(u)$$

或

$$u_{tt} = \hat{N}(u)$$

对应的Lagrange密度为

$$L = L(y,\ y_t,\ y_x,\ y_{xx},\ \cdots)$$

式中，y 通过一定方式与 u 相联系，即 $u=\hat{T}y$。也就是说，由式 (2.186) 给出的 Lagrange 量通过 Eular 变分可得到非线性方程

$$(\hat{T}y)_t = \hat{N}(\hat{T}y)$$

定义

$$\hat{L}(y, y_t)=\int L(y, y_t, y_x, y_{xx}, \cdots)\mathrm{d}x$$

和泛函

$$J[\hat{L}(y, y_t)]=\int \hat{L}(y, y_t)\mathrm{d}t \tag{2.185}$$

引入符号 $\delta\hat{L}/\delta y$ 代表若 y 的某一变化 δy 引起的 $\hat{L}$ 的相应变化，能写成如下形式:

$$\delta\hat{L}(y, y_t)=\int F(y, y_t)\delta y\mathrm{d}x \tag{2.186}$$

则记作

$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta y}=F(y, y_t) \tag{2.187}$$

式 $\hat{L}(y, y_1)$ 不含 y 对 x 的导数项时，可证明:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\hat{L}}{\delta y}&=\frac{\partial L}{\partial y}\\ \frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}&=\frac{\partial L}{\partial y_t}\end{aligned} \tag{2.188}$$

对式 (2.185) 变分，则有等价关系

$$\frac{\delta J}{\delta y}=0 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}-\frac{\delta L}{\delta y}=0 \tag{2.189}$$

这里已假定变分时，固定函数端点，证明如下:

由式(2.185)有

$$\delta J=\int\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y}\delta y+\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\delta y_t\right]\mathrm{d}t$$

式中第二项为

$$\int\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\mathrm{d}(\delta y)=\frac{\delta L}{\delta y_t}\delta y-\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\right)\delta y\mathrm{d}t$$

因此(设在积分的两个端点处 $\delta y=0$)

$$\delta J=\int\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\right)\right]\delta y\mathrm{d}t$$

按照定义式(2.186)、式(2.187)，有

$$\frac{\delta J}{\delta y}=\frac{\delta\hat{J}}{\delta y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\right) \tag{2.190}$$

证　毕

式(2.189)即为式(2.183)，这是构造式(2.182)时必须遵循的基本原则。式(2.189)中的变分由式(2.188)给出。当式(2.182)中含有 x 的导数项时，式(2.188)中的第一式应改为

$$\frac{\delta \hat{L}}{\delta y}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y_{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}\left(\frac{\partial L}{\partial y_{xx}}\right)-\cdots \tag{2.191}$$

下面叙述 Noether 定理，以此研究这种经典场的运动常数和对称性。设

$$y=y(\{\tilde{y}\},\ \alpha) \tag{2.192}$$

是运动学变量$\tilde{y}$的单参数变换。例如，$y=\tilde{y}+\alpha$，$y(x)=\tilde{y}(x-\alpha)$，$y(x,\ t)=\tilde{y}(x,\ t-\alpha)$等等都属此类，把$\hat{L}(y,\ y_{t})$简记为$\hat{L}(y)$，定义

$$\tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)=\hat{L}(y(\{\tilde{y}\},\ \alpha))$$

如果变换式 (2.192) 能使$\tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)$具有形式

$$\tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)=\hat{L}(\tilde{y})+\frac{\mathrm{d}F(\tilde{y},\ \alpha)}{\mathrm{d}t} \tag{2.193}$$

则运动方程在式 (2.192) 变换下是不变的，并且不变量是

$$I=\int\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_{t}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}x-\frac{\partial F}{\partial \alpha} \tag{2.194}$$

证明 对式(2.193)关于 α 求导，有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F(\tilde{y},\ \alpha)}{\partial \alpha}=\frac{\partial \tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)}{\partial \alpha}&\\
&=\int\left[\frac{\delta \hat{L}}{\delta y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_{t}}\frac{\partial y_{t}}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x \quad (\text{由式(2.192)})\\
&=\int\left[\frac{\delta \hat{L}}{\delta y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_{t}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_{t}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x\\
&=\int\left[\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_{t}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\partial y_{t}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_{t}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\mathrm{d}x \quad (\text{由式(2.189)})
\end{aligned}$$

上式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int\frac{\delta \hat{L}}{\partial y_{t}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}x-\frac{\partial F(\tilde{y},\ \alpha)}{\partial \alpha}\right\}=0 \tag{2.195}$$

于是式(2.194)给出了不变量。对于每一种满足式(2.193)的变换式(2.192)的选择，都对应一种由式(2.194)给出的守恒量。

场平移(如对于 KdV 方程)，即

$$y=\tilde{y}+\alpha \tag{2.196}$$

这时

$$y_{x}=\tilde{y}_{x} \quad y_{t}=\tilde{y}_{t} \quad \cdots$$

式(2.195)给出质量守恒，即$I=M$

空间平移，设α是小量，即$\alpha\to 0$，则:

$$y(x)=\tilde{y}(x-\alpha)\approx\tilde{y}(x)-\alpha\tilde{y}_x \tag{2.197}$$

式中:

$$y_x\approx\tilde{y}_x-\alpha\tilde{y}_{xx}\quad y_t=\tilde{y}_t-\alpha\tilde{y}_{xt}\quad\cdots$$

式(2.195)给出动量守恒，即$I=Mv$。

时间平移，α为小量，则

$$y(x,\ t)=\tilde{y}(x,\ t-\alpha)\approx\tilde{y}-\alpha\tilde{y}_t \tag{2.198}$$

式中:

$$y_x=\tilde{y}_x-\alpha\tilde{y}_{xt}\quad y_t=\tilde{y}_t-\alpha\tilde{y}_{tt}\quad\cdots$$

这时式(2.195)给出能量守恒，即$I=H$，即Harmilton量。

2.6.3 KdV方程的等价粒子描述

讨论在$\varphi\to 0$ ($|x|\to\infty$)条件的KdV方程

$$\varphi_t-6\varphi\varphi_x+\varphi_{xxx}=0 \tag{2.199}$$

令$\varphi=y_x$代入上式可得

$$y_{xt}-6y_x y_{xx}+y_{xxxx}=0 \tag{2.200}$$

上式乘$\delta y\mathrm{d}x\mathrm{d}t$再积分，
可得

$$\hat{L}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\left[y_x y_t-2y_x^3-y_{xx}^2\right]$$

作场平移变换(式(2.196))，则

$$\tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\tilde{y}_x\tilde{y}_t-2\tilde{y}_x^3-\tilde{y}_{xx}^2\right]\mathrm{d}x=\hat{L}(\tilde{y})$$

与式(2.193)对照可知

$$F(\tilde{y},\ \alpha)=0$$

又:

$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}=y_x$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=1$$

代入式(2.194)

$$M=\int\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\mathrm{d}x=\int y_x\mathrm{d}x=\int\varphi\mathrm{d}x$$

即

$$M=\int\varphi \mathrm{d}x \tag{2.201}$$

作空间平移变换(式(2.197)),这时要注意 α 是小量,如可得

$$y_x^3=\tilde{y}_3^3-3\alpha\tilde{y}_x^2\tilde{y}_{xx}$$

等等,于是

$$\tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)=\hat{L}(\tilde{y})+\alpha\frac{1}{2}\int\left[\tilde{y}_x\tilde{y}_{tx}+\tilde{Y}_t\tilde{y}_{xx}+6\tilde{y}_x^2\tilde{y}_{xx}+2\tilde{y}_{xxx}\tilde{y}_{xx}\right]\mathrm{d}x=\hat{L}(\tilde{y})$$

因此有

$$F(\tilde{y},\ \alpha)=0$$

又:

$$\frac{\delta L}{\delta y_t}=y_x$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right|_{\alpha\to 0}=-\left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha\to 0}=-\frac{\partial y}{\partial x}$$

于是

$$Mv=\int\frac{\delta L}{\delta y_t}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\mathrm{d}x=-\int y_x^2\mathrm{d}x=-\int\varphi^2\mathrm{d}x$$

即

$$Mv=-\int\varphi^2\mathrm{d}x \tag{2.202}$$

作时间平移(式(2.198)),可得

$$\tilde{L}(\tilde{y},\ \alpha)=L(\tilde{y})-\frac{\alpha}{2}\int\mathrm{d}x\left[\tilde{y}_t\tilde{y}_{tx}+\tilde{y}_t\tilde{y}_{tt}-6\tilde{y}_{tx}\tilde{y}_x^2-2\tilde{y}_{txx}\tilde{y}_{xx}\right]$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}F(\tilde{y},\ \alpha)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\alpha}{2}\int\left[\tilde{y}_t\tilde{y}_{tx}+\tilde{y}_{tt}\tilde{y}_x-6\tilde{y}_x^2\tilde{y}_{tx}-2\tilde{y}_{txx}\tilde{y}_{xx}\right]\mathrm{d}x$$

进而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F(\tilde{y},\ x)}{\partial\alpha}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left[y_xy_t-2y_x^3-y_{xx}^2\right]\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{L}$$

又:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x\to 0}=-\left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}\right|_{\alpha\to 0}=-\frac{\partial y}{\partial t}$$

于是

$$H=\int\frac{\delta L}{\delta y_t}(-y_t)\mathrm{d}x+\hat{L}=\int\left[\frac{1}{2}y_xy_t-\frac{1}{2}y_ty_x+y_x^3+\frac{1}{2}y_{xx}^2\right]\mathrm{d}x$$

即

$$H=\int\left[y_x^3+\frac{1}{2}y_{xx}^2\right]\mathrm{d}x=\int\left[\varphi^3+\frac{1}{2}\varphi_x^2\right]\mathrm{d}x \tag{2.203}$$

式(2.202)还可以从式(2.201)得到。由式(2.201)，φ 可看作 KdV 孤子作为粒子，出现在 $(x,\ t)$点的几率，于是粒子的位置可写成

$$\overline{x}(t)=\frac{\int x\varphi\mathrm{d}x}{\int\varphi\mathrm{d}x}$$

求导

$$v=\frac{\mathrm{d}\overline{x}(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{M}\int\varphi^2\mathrm{d}x$$

此即式(2.202)，但二者相差因子 3 是因为选取 v 的单位有所不同。事实上，式(2.202)只是说 $-\int\varphi^2\mathrm{d}x$ 是守恒量，完全可以认为动量是这个量的 3 倍。

2.6.4 KdV 方程的等价粒子微扰方法与孤子相互作用

本书作者主张等价粒子理论作为微扰方法用于 KdV 方程，并作了下面尝试。当 KdV 方程式(2.199)存在微扰项时，即

$$\varphi_t-6\varphi\varphi_x+\varphi_{xxx}=\hat{V}\varphi$$

于是定义孤子作为粒子的位置

$$\overline{x}(t)=\frac{\int x\varphi\mathrm{d}x}{\int\varphi\mathrm{d}x} \tag{2.204}$$

粒子质量仍由式(2.201)给出。于是:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\int\left[6\varphi\varphi_x-\varphi_{xxx}+\hat{V}\varphi\right]\mathrm{d}x=\int\hat{V}\varphi\mathrm{d}x \tag{2.205}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{M^2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\int x\varphi\mathrm{d}x+\frac{1}{M}\int x\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x$$

即

$$v=-\frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\overline{x}+\frac{1}{M}\int x\hat{V}\varphi\mathrm{d}x-\frac{3}{M}\int\varphi^2\mathrm{d}x \tag{2.206}$$

或

$$Mv=-3\int\varphi^2\mathrm{d}x-\overline{x}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+\int x\hat{V}\varphi\mathrm{d}x \tag{2.207}$$

粒子所受冲力

$$\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}=-6\int\varphi\hat{V}\varphi\mathrm{d}x+\int x\frac{\partial}{\partial t}(\hat{V}\varphi)\mathrm{d}x-\bar{x}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}-v\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{2.208}$$

由于 KdV 方程的绝热近似是单参数的，因此，一般只需一个方程来确定其参数演化。位置演化需要用速度表达式来确定。因此，在等价粒子分析中只用动量方程，也就是说只需要式(2.201)、式(2.204)、式(2.207)和式(2.208)，当

$$\hat{V}\varphi=V(t)\varphi(x,\ t) \tag{2.209}$$

则式(2.207)、式(2.208)分别变成:

$$Mv=-3\int\varphi^2\mathrm{d}x \tag{2.210}$$

$$\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}=2V(t)(Mv) \tag{2.211}$$

即

$$Mv=M_0v_0\exp\left[2\int_0^t V(t)\mathrm{d}t\right] \tag{2.212}$$

若从式(2.201)计算 M，则可从式(2.212)解出 v，从而由式(2.204)及 v 的表达式解出孤子位置的时间演化。式(2.212)表明，当式(2.209)中的 $V(t)<0$ 时，代表一种损耗。下面讨论几种微扰 KdV 方程的等价粒子分析。

(1) $\hat{V}\varphi=-\alpha\varphi$

这种微扰项代表系统耗散，如见文献〔65〕，可设微扰解具有形式

$$\varphi=-2\mu^2\mathrm{sech}^2[\mu(t)(x-\xi(t))] \tag{2.213}$$

此即所谓的绝热近似，这种情况满足式(2.210)且 $V(t)=-\alpha$，因此，将式(2.213)代入式(2.204)、式(2.201)容易得到:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t)&=\xi(t)\\ M(t)&=-2\mu(t)\end{aligned} \tag{2.214}$$

再由式(2.210)

$$Mv=-3\int\varphi^2\mathrm{d}x=-16\mu^3 \tag{2.215}$$

由式(2.212)及式(2.213)，可得

$$\mu^3(t)=\mu^3(0)\mathrm{e}^{-2\alpha t} \tag{2.216}$$

即

$$\mu(t)=\mu(0)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\alpha t} \tag{2.217}$$

这一结论与文献〔34〕基于逆散射的微扰理论的结论一致。在那里 $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}t=-2\alpha\mu/3$(见文献〔34〕，p781)。再由式(2.214)及式(2.215)可得

$$\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}=v(t)=8\mu^2(t)=8\mu^2(0)\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\alpha t}$$

从上式解出

$$\xi(t)=\xi(0)+\frac{6}{\alpha}\mu^2(0)[1-e^{-\frac{4}{3}\alpha t}]$$

可以看到，用这种方法给出的绝热近似中，慢变参数的时间演化比其它任何方法都简捷明了。

(2) $\hat{V}\varphi=\gamma\varphi_{xx}$

这种微扰项也代表另一种耗散[65]，把试探解仍设为式(2.213)的形式，则可得:

$$\bar{x}(t)=\xi(t)$$

$$M(t)=-2\mu(t) \tag{2.218}$$

再由式(2.207),

$$Mv=-16\mu^3(t) \tag{2.219}$$

由式(2.208)

$$\frac{d(Mv)}{dt}=\frac{6\times 4^3\gamma\mu^5}{15} \tag{2.220}$$

将式(2.219)代入式(2.220)有

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{-8\gamma}{15}\mu^3 \tag{2.221}$$

这一结论与文献〔34〕一致(注: 文献〔34〕p781 的结果应为式(2.221)的结果，那里多 2 倍是文献〔34〕的错误，可由文献中的式(3.1)计算，结果应是本节的式(2.221)，不是那里的式(3.5))。解出式(2.221)有

$$\mu^2(t)=\frac{\mu^2(0)}{1+\dfrac{16\gamma\mu^2(0)t}{15}} \tag{2.222}$$

上式代表了 $\mu(t)$ 随时间衰减，这是耗散造成的。再由式 (2.218) 和式 (2.219) 得

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=v(t)=8\mu^2$$

因此

$$\xi(t)=\mu(0)+\frac{15}{2\gamma}\ln\left[1+\frac{16\gamma\mu^2(0)t}{15}\right]$$

(3) $\hat{V}\varphi=\varepsilon_2\varphi_{xxxxx}$

这种微扰代表了高阶空间色散[66]。若仍采用绝热近似式(2.213)，则可得式(2.218)和式(2.219)，但式(2.218)给出

$$\frac{d(Mv)}{dt}=0$$

因此 $d\mu(t)/dt=0$，这仍与按文献〔34〕中的式(3.1)计算的结果一致。事实上，若将 $\hat{V}\varphi=\varepsilon_2\varphi_{xxxxx}$($\varphi$ 任意)代入式(2.208)，恒有 $d(Mv)/dt=0$，因此，这种微扰项总是不改变孤子的动量。在这种情况下，绝热近似式(2.213)是不适宜的，应寻求其他形式的试探解。

(4) KdV 双孤子相互作用的分析

用等价粒子理论，可以讨论两孤子的相互作用问题，设两孤子解是两个孤子充分远离时的叠加，即

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

则代入KdV方程并分离有:

$$\varphi_{kt} - 6\varphi_k\varphi_{kx} + \varphi_{kxxx} = \hat{V}\varphi_k \tag{2.223}$$

$$\hat{V}\varphi_k = 6\left[C_k\varphi_{lx} + A_k\varphi_l\frac{\partial}{\partial x}\right]\varphi_k \qquad (k\neq l;\ k,\ l=1,\ 2)$$

$$C_1 = 1 - A_2 \qquad C_2 = 1 - A_1$$

式中，A_1，A_2 的选择原则是：为了应用绝热近似，要求耦合微扰 KdV 方程是近似可积的，即在得到 φ_k 的 $\hat{L}$ 量时，忽略 $\hat{V}\varphi_k$ 对 φ_l 的依赖关系后是可积的。以后的处理与第 8 章对 NLS 孤子相互作用的等价粒子分析类似。

2.6.5　多分量 Noether 定理

前面的 KdV 方程是实方程，但 NLS 方程是复方程，因而有两个分量。对于多分量方程，Noether 需要修改，下面以二分量为例，设:

$$u = (y,\ y^*)$$

$$u_t = \hat{N}(u) \quad 或 \quad u_{tt} = \hat{N}(u) \tag{2.224}$$

$$\hat{L}(y,\ y^*,\ y_t,\ y_t^*) = \int L(y,\ y^*,\ y_t,\ y_t^*)\mathrm{d}x$$

仍用前面约定，当$L(y,\ y^*,\ \cdots)$中不含 y 的 x 的导数时，有:

$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta y} = \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \frac{\delta\hat{L}}{\partial y^*} = \frac{\delta L}{\partial y^*}$$

$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t} = \frac{\partial L}{\partial y_t} \qquad \frac{\delta\hat{L}}{\partial y_t^*} = \frac{\delta L}{\partial y_t^*}$$

定义泛函

$$J[\hat{L}] = \int\hat{L}(y,\ y^*,\ y_t,\ y_t^*)\mathrm{d}t$$

由于

$$\delta J[\hat{L}] = \int\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\hat{L}}{\delta y^*}\delta y^* + \frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\delta y_t + \frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t^*}\delta y_t^*\right]\mathrm{d}t$$

又:

$$\int\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\delta y_t\mathrm{d}t = \int\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y)\mathrm{d}t = \frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\delta y - \int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\right]\delta y\mathrm{d}t$$

同理，可得另一项，即

$$\int \frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t^*} \delta y_t^* \, dt = -\int \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t^*}\right] \delta y^* \, dt$$

于是

$$\delta J = \int \left\{ \left[\frac{\delta \hat{L}}{\delta y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y} \right) \right] \delta y + \left[\frac{\delta \hat{L}}{\delta y^*} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t^*} \right) \right] \delta y^* \right\} dt$$

因此有:

$$\delta J = 0 <===> \frac{\delta \hat{L}}{\delta y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t} \right) = 0$$

$$\frac{\delta \hat{L}}{\delta y^*} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t^*} \right) = 0$$

当 $\hat{L}^* = \hat{L}$ 时，这两个欧拉方程是等价的。作变换

$$y = y(\{\tilde{y}\}, \alpha) \tag{2.225}$$

则 $\hat{L}(y) \to \tilde{L}(\tilde{y})$，$\hat{L}(y)$ 等量是 $\hat{L}(y, y^*, y_t, y_t^*)$ 等量的简写。

如果定义

$$\tilde{L}(\tilde{y}, \alpha) = \hat{L}\left(y\left(\left\{ \tilde{y} \right\}, \alpha \right) \right)$$

且 $\tilde{L}(\tilde{y}, \alpha)$ 具有形式

$$\tilde{L}(\tilde{y}, \alpha) = \hat{L}(\tilde{y}) + \frac{dF(\tilde{y}, \alpha)}{dt} \tag{2.226}$$

则在式 (2.225) 变换下运动方程式 (2.224) 是不变的，不变量是

$$I = \int \left[\frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\delta \hat{L}}{\delta y_t^*} \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} \right] dx - \frac{\partial F(\tilde{y}, \alpha)}{\partial \alpha} \tag{2.227}$$

证明仍是简单的。因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial \tilde{L}(\tilde{y}, \alpha)}{\partial \alpha} &= \int \left[\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\delta \tilde{L}}{\delta y^*} \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t} \frac{\partial y_t}{\partial \alpha} + \frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t^*} \frac{\partial y_t^*}{\partial \alpha} \right] dx \\
&= \int \left[\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t} \right) \right] dx \\
&\quad + \int \left[\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y^*} \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t^*} \right) \right] dx \\
&= \int \frac{d}{dt} \left[\frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\delta \tilde{L}}{\delta y_t^*} \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} \right] dx
\end{aligned}$$

上面最后一步用到欧拉方程和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\tilde{L}}{\delta y_t}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\tilde{L}}{\delta y_t}+\frac{\delta\tilde{L}}{\delta y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)$$

按照上述步骤，可得多分量方程的 Noether 定理。

2.6.6 NLS 方程的等价粒子理论

场平移操作在单分量方程中即为$\tilde{y}=y+\alpha$之类的简单平移；但对于多分量方程，则对应于单位旋转变换，如对于复量方程，可将其在复平面上旋转 α 角度，即

$$\tilde{\varphi}=\varphi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{2.228}$$

对于NLS方程:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+|\varphi|^2\varphi=0 \tag{2.229}$$

$$-\mathrm{i}\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}+|\varphi|^2\varphi^*=0 \tag{2.30}$$

将式(2.229)× $\delta\varphi^*$ + 式(2.230)× $\delta\varphi$，再对 $\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ 积分，即可得到:

$$L=\int\mathrm{d}x\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\frac{1}{2}|\varphi|^4\right] \tag{2.231}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2|\varphi|^2\varphi=0 \tag{2.232}$$

$$L=\int\mathrm{d}x\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+|\varphi|^4\right] \tag{2.233}$$

在下面分析中，采用式 (2.232)，在式 (2.228) 变换下，

$$\tilde{L}(\tilde{\varphi},\ \alpha)=L(\tilde{\varphi})\ \rightarrow\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\varphi_t}=\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi^*\qquad\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\alpha}=\mathrm{i}\varphi$$

因此

$$\begin{aligned}I_1=M&=-\int\left[\frac{\delta\tilde{L}}{\partial\varphi_t}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\delta\tilde{L}}{\partial\varphi_t^*}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\alpha}\right]\mathrm{d}x\\&=-\int\left[-\frac{1}{2}|\varphi|^2-\frac{1}{2}|\varphi|^2\right]\mathrm{d}x\\&=\int|\varphi|^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.234}$$

作空间平移:

$$\varphi(x)=\tilde{\varphi}(x+\alpha)=\tilde{\varphi}(x)+\alpha\tilde{\varphi}_x(x)$$

$$\varphi^*(x)=\tilde{\varphi}^*(x+\alpha)=\tilde{\varphi}^*(x)+\alpha\tilde{\varphi}_x^*(x)$$

$$\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\tilde{\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}^*}{\partial t}+\alpha[\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_t^*+\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_{xt}^*]+O(\alpha^2)$$

$$\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}=\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^* \qquad \varphi_x(x)=\tilde{\varphi}_x(x)+\alpha\tilde{\varphi}_{xx}(x)$$

$$|\varphi_x|^2=|\tilde{\varphi}_x|^2+\alpha[\tilde{\varphi}_{xx}\tilde{\varphi}_x^*+\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{xx}^*]+O(\alpha^2)$$

$$|\varphi|^4=|\tilde{\varphi}|^4+2\alpha|\tilde{\varphi}|^2[\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}^*+\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_x^*]+O(\alpha^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha\left[\left(\tilde{\varphi}_x^*\tilde{\varphi}_t+\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}_{tx}\right)-\left(\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_t^*+\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_{tx}^*\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$-\int\alpha\left[\tilde{\varphi}_{xx}\tilde{\varphi}_x^*+\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{xx}^*\right]\mathrm{d}x+\int 2\alpha|\tilde{\varphi}|^2(\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}^*+\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_x^*)\mathrm{d}x$$

由于第一项中两个括号分别是全微分:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi}^*]$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\tilde{\varphi}_t^*\tilde{\varphi}]$$

第二项和第三项分别是全微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_x^*]$$

和

$$|\varphi|^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|\varphi|^2)$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0$$

又:

$$\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\varphi_t}=\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi^*$$

$$\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\varphi_t^*}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\alpha}=\frac{\partial\tilde{\varphi}^*}{\partial x}$$

因此

$$I_2 = Mv = \frac{\mathrm{i}}{2}\int\left[\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\right]\mathrm{d}x \tag{2.235}$$

作时间平移:

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t+\alpha) = \tilde{\varphi}(t) + \alpha\tilde{\varphi}_t(t)$$

$$\varphi^*(t) = \tilde{\varphi}^*(t) + \alpha\tilde{\varphi}_t^*(t) \qquad \varphi_x = \tilde{\varphi}_x + \alpha\tilde{\varphi}_{xt}$$

$$\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \tilde{\varphi}^*\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + \alpha[\tilde{\varphi}_t^*\tilde{\varphi}_t + \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}_{tt}]$$

$$|\varphi_x|^2 = |\tilde{\varphi}_x|^2 + \alpha[\tilde{\varphi}_{tx}\tilde{\varphi}_x^* + \tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{tx}^*] + O(\alpha^2)$$

$$|\varphi_x|^4 = |\tilde{\varphi}|^4 + 2\alpha|\tilde{\varphi}|^2[\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi}^* + \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_t^*] + O(\alpha^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{i}}{2}\alpha\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}_t - \tilde{\varphi}_t^*\tilde{\varphi}\right]\mathrm{d}x \\ &\quad - \alpha\int\left[\tilde{\varphi}_{tx}\tilde{\varphi}_x^* + \tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{tx}^*\right]\mathrm{d}x + 2\alpha\int|\varphi|^2\left(\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_t^*\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}_t - \tilde{\varphi}_t^*\tilde{\varphi}) - |\varphi_x|^2 + |\varphi|^4\right]\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \int\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right) - |\varphi_x|^2 + |\varphi|^4\right]\mathrm{d}x$$

又:

$$\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\varphi_t} = \frac{\mathrm{i}}{2}\varphi^* \qquad \frac{\delta\tilde{L}}{\delta\varphi_t^*} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \frac{\partial\varphi^*}{\partial\alpha} = \frac{\partial\tilde{\varphi}^*}{\partial t}$$

因此

$$I_3 = E = \int\left[|\varphi_x|^2 - |\varphi|^4\right]\mathrm{d}x \tag{2.236}$$

对于微扰 NLS 方程的等价粒子理论，可按前面方法给出，即从式(2.234)出发定义粒子位置、速度、动量及冲力。在本书第 11 章中，将此方法用于光孤子相互作用时，将作具体说明。

2.6.7　拓扑孤子的等价粒子理论

对于拓扑孤子，不像非拓扑孤子那样，具有边界$|\varphi|\to 0$ ($|x|\to\infty$)，而是$|\varphi|\to$同一有限值。在这种情况下，守恒量及 Lagrange 量等的积分需要考虑这种边界条件，这时式(2.194)和式(2.227)应分别修改成:

$$I = \int\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) + b_0\right]\mathrm{d}x \tag{2.237}$$

和

$$I=\int\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t^*}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t^*}\frac{\partial y^*}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right)+b_0\right]\mathrm{d}x \tag{2.238}$$

之所以这样是由于它们分别来源于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\int\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\mathrm{d}x\right]=0\quad\text{(见式(2.194)之后的证明)}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\int\left[\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\delta\hat{L}}{\delta y_t^*}\frac{\partial y^*}{\partial\alpha}\right]\mathrm{d}x\right\}=0\quad\text{(见式(2.227)之后的证明)}$$

因此，在上两式的积分中加一常数 b_0，并不改变上式。这里的 b_0 应由具体边界条件确定，原则是使积分存在(即取有限值)。上面两式还适应于 $\varphi\to$有限值($|x|\to\infty$时)的非拓扑孤子，前面与此不同之处是：虽然$|\varphi|\to$同一有限值，但 φ 在 $x=\pm\infty$处却不相同。下面以拓扑 NLS 孤子(即 kink 孤子)为例说明。

考虑到方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2|\varphi|^2\varphi=0 \tag{2.239}$$

支持 kink 拓扑孤子，边界条件是

$$|\varphi|\to\varphi_0\qquad(|x|\to\infty)$$

于是作变换

$$\varphi=u\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2t}\qquad|u|\to u_0(|x|\to\infty) \tag{2.240}$$

则式(2.239)变成

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2(|u|^2-u_0^2)u=0 \tag{2.241}$$

其Lagrange量是

$$\hat{L}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial\tau}-u\frac{\partial u^*}{\partial\tau}\right)+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+(|u|^2-u_0^2)^2\right] \tag{2.242}$$

于是作场平移变换

$$\tilde{u}=u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

可得

$$\tilde{L}(\tilde{u},\ \alpha)=L(\tilde{u})\ \to\ \frac{\partial F}{\partial\alpha}=0$$

同得到式(2.234)一样，式(2.238)即是

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}[|u|^2+b_0]\mathrm{d}x$$

由 u 的边界条件应选择 $b_0=-u_0^2$ 才使上面积分为有限，因而 kink 孤子的质量是

$$I_1 = M = \int_{-\infty}^{+\infty} [|u|^2 - u_0^2]\mathrm{d}x \tag{2.243}$$

按得到式(2.235)的步骤，可得

$$I_2 = Mv = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]\mathrm{d}x \tag{2.244}$$

此式同式 (2.235) 一样，这里显然取 $b_0 = 0$。在得到这个守恒量过程中，$\partial F/\partial t$ 只增加了 $-2\alpha u_0^2(u_x u^* + uu_x^*)$ 项，这是全微项，故对 $\partial F/\partial t$ 的仍为零。同理，由得到式 (2.236) 的步骤，并考虑到这时 $\partial F/\partial t$ 将增加 $-2\alpha u_0^2(u_t u^* + uu_t^*)\mathrm{d}x = -2\alpha u_0^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2\mathrm{d}x$ 项，因此

$$I_3 = E = -\int[|u_x|^2 + (|u|^2 - u_0^2)^2]\mathrm{d}x \tag{2.245}$$

式中，已取 $b_0 = -u_0^4$，在得到 $\partial F/\partial t$ 时，式(2.232)中原 $\partial^2 u/\partial x^2$ 项的反号导致了式(2.236)中 $|u_x|^2$ 项的反号，于是有上式。上面已经看到，kink 孤子的质量及能量是负值。

2.6.8 微扰拓扑孤子的等价粒子理论及修正守恒律

仍以微扰 NLS 方程的 kink 孤子为例来说明拓扑孤子微扰情况下的等价粒子理论。没有微扰时，$|u(\pm\infty, t)| = u_0$ (也就是 $u(x, t)$的幅值)不随时间变化，但在微扰情况下，一般是要随时间变化的，即 $u_0 = u_0(t)$，这时式(2.237)和式(2.238)中的 b_0 应取为零；同时，前面的逻辑起点也应从式(2.241)退回到式(2.239)。这时，由这两式给出的 I 的积分可能是无穷，但可以用极限的方式来处理。事实上，实际中也难以找到具有这种边界条件的物理背景中的暗孤子，也只能以一个比暗孤子宽得多的平坦脉冲为连续波背景而不可能找到一个真正无穷宽的连续波背景。计算 I 中的上下限($\pm\infty$)应理解为在连续波背景的宽度范围内积分，但在数学书写形式上仍以 $\pm\infty$ 为上下限。这种情况下，把 I_1 和 I_3 作为 kink 的质量和能量显得牵强，但可认为与质量和能量对应的守恒量。于是，有关非拓扑 NLS 孤子的等价粒子公式(I_1、I_2 及其变化)都可以照搬(详见第八章)。

对于微扰作用下的修正守恒律，也要以上述分析进行处理，对 NLS 方程，按上述分析，在有微扰时，守恒量应是:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2\mathrm{d}x \tag{2.246}$$

$$I_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial \varphi^*}{\partial x}]\mathrm{d}x \tag{2.247}$$

$$I_3 = -\int_{-\infty}^{+\infty} [|\varphi_x|^2 + |\varphi|^4]\mathrm{d}x \tag{2.248}$$

这时守恒律由下式给出:

$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\delta I_k}{\delta u^*}\varepsilon R^*[\varphi]-\frac{\delta I_k}{\delta u}\varepsilon R[\varphi]\right\}\mathrm{d}x \tag{2.249}$$

式中，$\varepsilon R[\varphi]$是下式中的微扰项:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2|\varphi|^2\varphi=\varepsilon R[\varphi] \tag{2.250}$$

修正守恒律法与等价粒子理论都是处理微扰问题的有效方法，在后面章节要用到。

2.6.9　需要进一步探讨的问题

用 Noether 定理，还可导出其它方程，如 Sine-Gordon、MKdV、NLS 方程等的守恒量，尤其是质量表达式。有了质量表达式，就可以仿照式(2.204)定义孤子位置，进而定义孤子速度(如式(2.206))和动量，从而得到动量方程(如式(2.208))。作者对于这些问题仍在作深入研究(包括对 KdV 及 NLS 方程)。前面我们已看到，作为微扰方法，等价粒子理论也能给出慢变参数的时间演化，并与基于逆散射理论的微扰法结果完全相同。因此，这将与逆散射微扰法一样成为处理近似可积系统和不可积微扰系统的有力工具。这一构想及其方法是由作者提出并极积主张的。当然，其中还存在若干问题，还有待我们作深入探讨。如 KdV 方程的绝热近似解中只有一个参数，NLS 方程的绝热近似解中可以有两独立参量，这就是说，对于 KdV 方程只能用各"守恒量"的运动方程中的一个，而 NLS 可以用两个。如果各运动方程能给出无矛盾的结果，也就没有任何困难。但事实上并不这样，如对 KdV 方程，只有用动量方程才能给出与逆散射微扰法相一致的结论。那么，给定一个方程，究竟该用那一个守恒量方程来确定参数演化规律，而且为什么？这是一个问题，这似乎与各方程的守恒量、守恒性质及变换性质有关。作者似乎感觉到，一个绝热近似几乎概括了除上述可用于确定绝热近似中的慢变参数的守恒量(及其演化)之外的其它所有守恒量(及其演化)，一个试探解似应概括许多(几乎所有)守恒量，而只剩下的几个守恒量(及其演化)才用于确定试探中的参数演化，只有这样，试探解似乎才合理。

第 3 章

数值方法与孤子自动机

3.1　数值方法的必要性

前面已看到，非线性方程中能够严格解析求解的方程是屈指可数的，而且每一种求解方法都有一定的局限性，即使那些可积方程，往往也只能得到孤子特解。但对于初始注入所确定的演化，并不是所有情况下都能解析求解。前面已经看到，即使是标准的 KdV 或 NLS 方程，虽然他们都是可积的，但只有非常特殊的初始注入(如 KdV 方程为 $A(A+1)\mathrm{sech}\, x$，NLS 方程为 $A\mathrm{sech}\, x$)才有解析解。在求解孤子解的诸方法中，只有逆散射方法既能求解孤子特解，也能求解初值问题。对一般初始注入，逆散射方法首先被本征值问题所阻拦；再者，即使是本征值问题能够完全解决，但其散射数据中的反射系数可能不为零，在这种情况下的严格解析分析至今尚能作出，或者说 G–L–M 方程的解不能表达为封闭形式。因此，数值方法对于研究非线性方程解的演化就变得十分重要。下面就常见的几种数值方法作简单介绍。数值方法可分为三大类：一类是有限差分法；另一类是函数逼近法；第三类可以说是二者的混合使用。其中，函数逼近法包括有限元法、有限 Fourier 变换(以三角函数为基函数)、样条 Spline 函数展开(分段多项式局部基)、配置法(Collecation)，等等。

3.2　有限差分法

对于一般非线性方程

$$u_t = N(u) \tag{3.1}$$

分别对时间和空间离散化，使 $x_m = \Delta x \cdot m$，$t_n = \Delta t \cdot n$，则式 (3.1) 可被离散成：

简单显式格式

$$u_m^{n+1} - u_m^n = \Delta t \cdot N_{\Delta x}(u_m^n) \tag{3.2}$$

简单隐式格式

$$u_m^n - u_m^{n-1} = \Delta t \cdot N_{\Delta x}(u_m^n) \tag{3.3}$$

Leapfrog格式

$$u_m^{n+1} - u_m^{n-1} = z\Delta t \cdot N_{\Delta x}(u_m^n) \tag{3.4}$$

Hopscotch格式

$$\left.\begin{aligned} u_m^{n+1} - u_m^n &= \Delta t \cdot N_{\Delta x}(u_m^n)\,(\text{式}3.2) \qquad n+m=\text{奇数} \\ u_m^n - u_m^{n-1} &= \Delta t \cdot N_{\Delta x}(u_m^n)\,(\text{式}3.3) \qquad n+m=\text{偶数} \end{aligned}\right\}$$

Leapfrog 格式的特点是对抛物线性型方程不稳定，但对双曲型很适用。Hopscotch 格式既简单，又快又稳定，但对抛物线型方程，需要控制时—空步长比例，即 $\Delta t \sim (\Delta x)^2$，以确保精度。

对于 KdV 方程初值问题

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ &u(x,\ 0) = u_0(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

若采用差分格式，则

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = u_m^{n-1} &- \frac{1}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{m+1}^n + u_n^n + u_{m-1}^n)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \\ &- \delta^2\left[\frac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\right]\left(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^m\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2N-1$$

$$u_m^0 = u(x_m,\ 0)$$

式中，$u_m^n = u(m\Delta x,\ n\Delta t)$。这种格式，动量 $\sum\limits_{m=0}^{2N-1} u_m^n$ 是守恒的，能量 $\sum\limits_{m=0}^{2n-1}\frac{1}{2}(u_m^n)^2$ 几乎也是守恒的。

对于 NLS 方程[67]

$$\mathrm{i}u_z + \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = 0 \tag{3.7}$$

设 $z_m = \Delta z \cdot m$，$t_n = \Delta t \cdot n$，上式表示成 Leapfrog 格式，则

$$\mathrm{i}\frac{u_n^{m+1} - u_n^{m-1}}{2\Delta z} = -\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{2(\Delta t)^2} - \left|u_n^m\right|^2 u_n^m \tag{3.8}$$

若用Hopscotch 格式，则

$$\mathrm{i}\frac{u_n^{m+1} - u_n^{m-1}}{2\Delta z} = -\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{2(\Delta t)^2} - \frac{1}{2}\left(\left|u_{n-1}^m\right|^2 u_{n-1}^m + \left|u_{n+1}^m\right|^2 u_{n+1}^m\right) \tag{3.9}$$

若用Crank－Nicolson格式，则

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{u_n^{m+1} - u_n^{m-1}}{\Delta z} = &\frac{1}{4(\Delta t)^2}(u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m + u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}) \\ &+ \frac{1}{2}(\left|u_n^{m-1}\right|^2 u_n^{m+1} + \left|u_n^m\right|^2 u_n^m) \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3　光束传播法[68, 69]

光束传播法一般用于 NLS 方程的模拟，对其它方程的应用未见报道。现以 NLS 方程为例，说明其处理方法及步骤。对于 NLS 方程式(3.7)，在固定时间点 t 考虑区间 $[z,\ z+\Delta z]$，把 $\xi\in[z,\ z+\Delta z]$ 看作变量，则式(3.1)可写成如下的算子方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\mathrm{i}\hat{T}u \tag{3.11}$$

$$\hat{T}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+|u|^2 \tag{3.12}$$

将式 (3.11) 在区间 $[z,\ z+\Delta z]$ 积分，并忽略 $|u(t,\ z)|^2$ 在这个小区间中的变化，则

$$u(t,\ z+\Delta z)=\exp(\mathrm{i}T\cdot\Delta z)u(t,\ z) \tag{3.13}$$

即

$$u(t,\ z+\Delta z)=\exp\left(\mathrm{i}\frac{1}{4}\Delta z\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\exp(\mathrm{i}\Delta z\cdot|u(t,\ z)|^2)\exp\left[\left(\mathrm{i}\frac{1}{4}\Delta z\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\langle u(t,\ z)\rangle\right]\right\} \tag{3.14}$$

式中，已把 $[(1/2)\partial^2/\partial t^2]$ 劈为两半。这就是光束传播法的数值演化依据。对于二孤子的初始注入

$$u(t,\ z=0)=N_1\mathrm{sech}\left(t-\frac{1}{2}\Delta\right)+N_2\mathrm{sech}\left(t+\frac{1}{2}\Delta\right) \tag{3.15}$$

代入式 (3.14)，可得到传播任意距离的孤子解，Δ 为孤子对的初始间距。

对于式(3.14)的计算有两种方法：其一是用 Fourier 变换(一般是快速 Fourier 变换 FFT)来计算对时间的二阶导数，这时可认为是函数逼近法(对时间部分)和差分法(对空间部分)的结合；其二是用差分法来计算时间二阶导数，例如式(3.14)中两次用到算子

$$\hat{T}_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\Delta z\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}} \tag{3.16}$$

对此作展开

$$\hat{T}_1=1+\frac{\mathrm{i}}{4}\Delta z\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{i}}{4}\Delta z\right)^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots$$

截短后

$$\hat{T}_1\approx 1+\frac{\mathrm{i}}{4}\Delta z\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.17}$$

然后，对式 (3.17) 中的 $\partial^2/\partial t^2$ 采用适当的差分格式。例如，采用龙格—库塔方法，这样，该方法就变成完全差分法。光束传播法能否用于其它方程是值得一试的。

3.4 分裂步长 Fourier 变换法[67, 70]

这个方法也常用于 NLS 方程，对于其它方程应用尚未见报道。因此，本节仍以 NLS 方程来说明。把式(3.7)在区间[z, z+Δz]等价为:

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \xi\in[z,z+\Delta z/2] \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}=-|u|^2 u \qquad \xi\in[z+\Delta z/2,\ z+\Delta z] \tag{3.19}$$

在 $\xi\in[z,\ z+\Delta z/2]$ 上，先让式 (3.19) 起作用，即

$$\tilde{u}(t,\ z+\Delta z/2)=\exp(\mathrm{i}|u|^2\Delta z)u(t,\ z) \tag{3.20}$$

式(3.20)关于 t 求Fourier变换有

$$\tilde{u}(z+\Delta z/2)=F[\exp(\mathrm{i}|u|^2\Delta z)u(t,\ z)] \tag{3.21}$$

对于式 (3.18) 关于 t 求 Fourier 变换，并让式 (3.19) 在 $\xi\in[z+\Delta z/2,\ z+\Delta z]$ 上起作用，则

$$\tilde{u}(z+\Delta z)=\exp(-\mathrm{i}\omega^2\Delta z/2)\tilde{u}(z+\Delta z/2) \tag{3.22}$$

将式(3.21)代入式(3.22)并对 u 作逆变换有

$$u(t,\ z+\Delta z)=F^{-1}[\exp(-\mathrm{i}\omega^2\Delta z/2)F\{\exp(\mathrm{i}|u(t,\ z)|^2\Delta z)u(t,\ z)\}] \tag{3.23}$$

上式即分裂步长 Fourier 变换法的数值演化依据，实践证明，这一方法有效且稳定。

分裂步长 Fourier 变换法与光束传播法是有一定联系的，式 (3.13) 可写成

$$u(t,\ z+\Delta z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\Delta z\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}|u|^2\Delta z}u)=\mathrm{e}^{\hat{T}_2}G(x,\ t) \tag{3.24}$$

式中，$G(t,\ z)=u(t,\ z)\exp(\mathrm{i}|u(t,\ z)|^2)$，$\hat{T}_2=\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta z\frac{\partial^2}{\partial t^2}$。把式 (3.24) 展开，则

$$u(t,\ z+\Delta z)=\left(1+\hat{T}_2+\frac{1}{2!}\hat{T}_2^2+\frac{1}{3!}\hat{T}_2^3+\cdots\right)G(t,\ z)$$

对上式两端作 Fourier 变换，

$$\tilde{u}(\omega,\ z+\Delta z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F\left[\hat{T}_2^n G(t,\ z)\right]\right) \tag{3.25}$$

上式 $F[\ ]$ 及“～”都代表 Fourier 变换，由于

$$F\left[\hat{T}_2^n G(t,\ z)\right]=\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta z\right)^n F\left[\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}}G(t,\ z)\right] \tag{3.26}$$

利用 Fourier 变换性质，

$$F\left[\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}}G(t,\ z)\right]=(\mathrm{i}\omega)^{2n}\tilde{G}(\omega,\ z)$$

于是式(3.25)变成

$$\tilde{u}(\omega, z+\Delta z)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta z\right)^{n}(\mathrm{i}\omega)^{2n}\right]\tilde{G}(\omega, z) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta z(\mathrm{i}\omega)^2}\tilde{G}(\omega, z) \tag{3.27}$$

对上式作逆 Fourier 变换，立即得到

$$u(t, z+\Delta z)=F^{-1}[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta z(\mathrm{i}\omega)^2}F\{G(t, z)\}]$$

即

$$u(t, z+\Delta z)=F^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta z\omega^2}F\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|u|^2\Delta z}u\}]$$

此即式(3.23)。因此，对光束传播法中的时间二阶导数用 Fourier 变换，实质上就是分裂步长 Fourier 变换法。

各种数值方法都具有强烈的针对性，因此，我们在使用数值方法时，应根据具体问题，选取相应的方法。对于 NLS 方程，可以肯定地说分裂步长 Fourier 变换是最好的；但对于孤子边界反射问题，这种方法显得不很方便，这时用上述完全差分的光束传播法较方便，因为反射过程是极短的，这种这方法非常有效；对于长时间演化问题，需要调整具体的差分格式。

3.5 Park 和 Satsuma 孤子细胞自动机

细胞自动机(cellular automata)是分析自然界复杂现象的十分有效的重要模型，已被广泛用于物理学、化学、生物学和计算科学等各个领域[71, 72]。Jensen[73] 利用或然自动机研究了非平衡临界行为；Dab[74] 等人提出用点阵气体自动机来微观逼近耦合的反应——扩散方程。细胞自动机是一种时间、空间及状态完全离散的系统，在某些情况下，当它们相互作用时，能保持各自的特征，因而可看成是一种最简单的孤子系统。Park 等人[75] 提出了一种新型自动机，被称为滤渗自动机(Filferautomaton)，他们发现其中的孤子碰撞行为非常普通。在普通一维细胞自动机(CA)中，考虑在时空点(t,i)上有 k 个取值的座值a_i^t，其中，$-\infty<t<+\infty$，$-\infty<i<+\infty$，座值演化由一固定形式的 F 规律

$$a_i^{t+1}=F(a_{i-r}^t, a_{i-r+1}^t, \cdots, a_i^t, \cdots, a_{i+r}^t) \tag{3.28}$$

来确定，显然，第 i 个座在下一时刻 $t+1$ 的取值取于前一时刻 t 与第 i 个座相邻的 $2r+1$ 个座上的取值。于是，给定每个座上的初始值，则自动机的时间演化就确定了。

在滤渗自动机(FA—Filfer Automaton)中，演化规则是

$$a_i^{t+1}=F(a_{i-r}^{t+1}, a_{i-r+1}^{t+1}, \cdots, a_{i-1}^{t+1}, a_i^t, \cdots, a_{i+r}^t) \tag{3.29}$$

式(3.29)与式(3.28)的差异是显而易见的，我们允许把一个 FA 座扩展到整个区间$(-\infty, +\infty)$，但其左边必须只有有限个座取非零值，以便在计算演化时，从左到右进行扫描，如果 F 具体地取下面形式：

$$a_i^{t+1}=\begin{cases}1 & S(i)\text{为偶数或 }0\\ 0 & \text{其 它}\end{cases} \tag{3.30}$$

式中：

$$S(t)=\sum_{j=-r}^{r}a_{i+j}$$

这里已把注意力集中在二值座上($k=2$)，$S(i)$代表在 t 时刻、在窗口($i-r$, $i+r$)中 1 出现的次数。这一规则称为奇偶律(Parity−rule)滤渗自动机，而把整数 $r=2, 3, \cdots$, (称为半径)认为是一个参数。在演化中，时间每增加一步(即由 $t\to t+1$)，就说更新了一代。在演化中还表现出周期性，使状态重复出现所需经过的代的数目称为周期(T)。每经过一个周期座值分布要在空间上移动，移动的空间座数叫做位移(D)，于是移动速度 $v=D/T$，通过引入粒子类比，将状态的连续性表述为轨道，在轨道中的最小二进制数称为粒子的正则码或生成元，这个二进制的长度称为粒子的宽度。

图 3−1(a)中给出了 $r=3$ 时初始生成元是 629 的演化，可以看出 $T=3$, $D=1$, 生成元序列(正则码)分别是：629, 697, 1241, 其中 629＝1001110101, 697＝1010111001, 1 241＝10011011001, 图 3−1(b)给出了 $r=3$ 时，孤子的相互作用，各孤子正则码及(D、T)分别是：601(8, 0), 9451(10, 10), 43(6, 6), 967(20, 12)。



图　3−1

图 3−2 中给出了 $r=5$ 的演化，各孤子码及(D、T)分别是：145(12, 6), 201(12, 6), 273(12, 6)和 27(7, 2)。

最近，Satsuma[76~77] 提出了一种滤渗类型的自动机，发现自动机的任意一个状态都由孤波构成，而且当它们相互作用时，表现出与孤波完全相同的行为。这种自动机的速度不能改变，只要其长度确定，其速度也就唯一地确定了。这一点非常类似于 KdV 孤子，前者速度等于其长度，而后者速度正比于其幅值。由于这种自动机是二值状态系统，因此，其“大小”只能通过长度来表征；从这个意义上讲，可把长度对应成 KdV 孤子的幅

值。然而，有许多孤子系统，如 NLS(nonlinear schrodinger)方程的明孤子解，都是双参数的，即其幅值与速度是相互独立的，受此启发，本书作者提出一种可独立调节长度和速度的孤子细胞自动机，并分析讨论了它们的若干守恒特性。

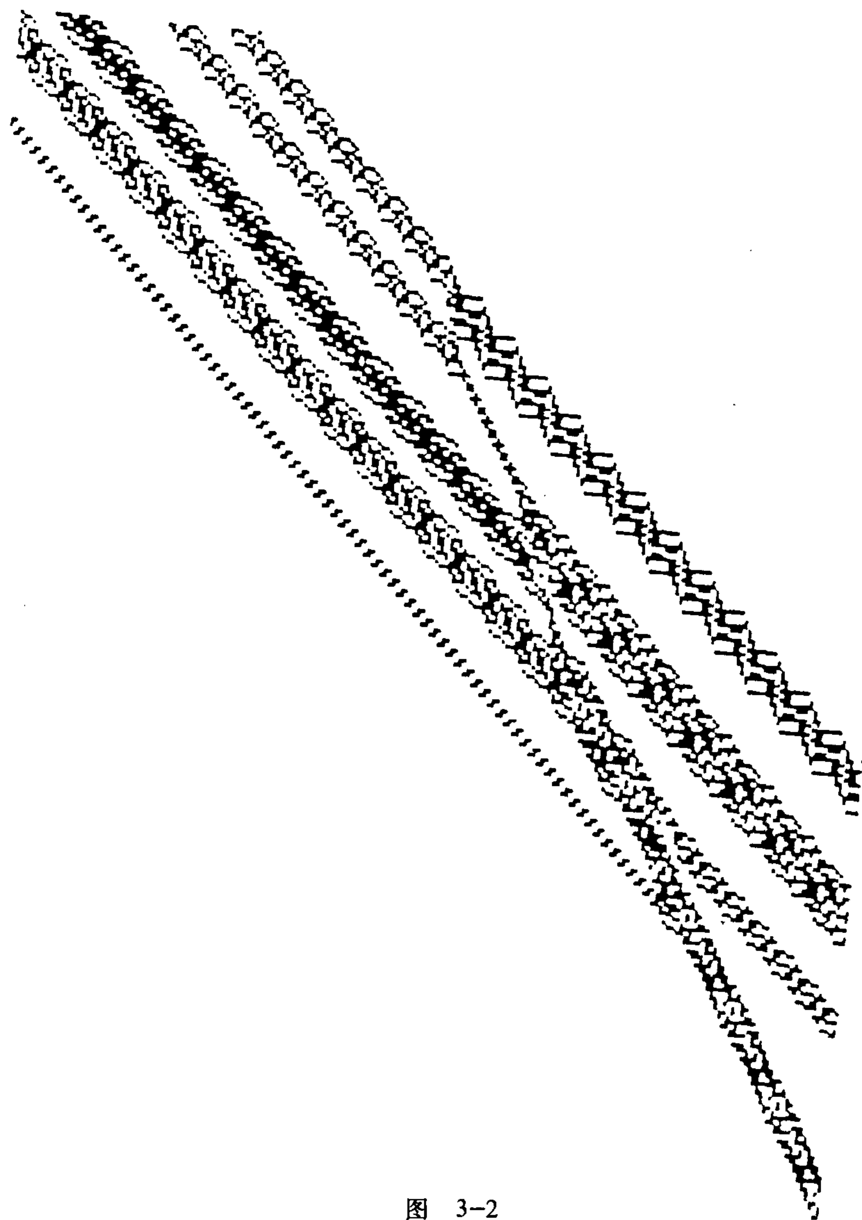


图 3-2

3.6　双参量孤子细胞自动机的时间演化及其相互作用

研究一维空间中二值状态细胞自动机，设 u_j^t 取值为 0 或 1，其中 j 代表第 j 个空间离散点，简称第 j 个座，t 代表第 t 个时间离散点，二者取值范围都是$(-\infty, +\infty)$，并规定在充分左或充分右的空间区域中 $u_j^t=0$，规定其时间演化由下式决定:

$$u_j^{t+1}=\frac{1}{4}\left(\left|S_{j+v_2}^{t}-S_{j-1}^{t+1}+1\right|-\left|S_{j+v_2}^{t}-S_{j-1}^{t+1}-1\right|\right)\left(1+S_{j+v_1}^{t}-S_{j+v_1+1}^{t}\right)$$
$$\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\left|S_{j+v_2}^{t}-S_{j-1}^{t+1}+1\right|-\left|S_{j+v_2}^{t}-S_{j-1}^{t+1}-1\right|\right)\right] \tag{3.31}$$

式中:

$$S_j^t=\sum_{i=-\infty}^{j}u_i^t \tag{3.32}$$

计算机模拟表明，这个系统也存在两种类型的孤波，即单孤波和复合孤波。单孤波仅由一个由有限个 1 构成的序列组成；复合孤波是由任意有限个长度相同的多个序列组成，而且这些序列的间距必须等于或大于序列的长度。这里的“长度”代表一个序列中 1 的个数，而“间距”代表两序列之间 0 的数目。之所以要这样限制，是因为这个系统在空间是非局域作用的，当间距过小时，相互作用使它们变成另一种终态，这点可通过后面引入的“内禀孤波”作进一步分析。式(3.31)还代表了一种时间反演可逆系统，即可根据后一时间 t+1 的状态推断前一时间 t 的状态，这时定义

$$S_j^t=\sum_{i=j}^{+\infty}u_i^t \tag{3.33}$$

则 u_j^t 的演化规律是

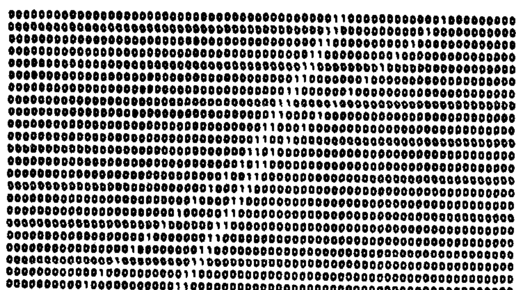
$$u_j^{t}=\frac{1}{4}\left(\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}+1\right|-\left|s_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}-1\right|\right)\left(1+S_{j-v_1}^{t+1}-S_{j-v_1-1}^{t+1}\right)$$
$$\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}+1\right|-\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}-1\right|\right)\right] \tag{3.34}$$

式 (3.31) 和式 (3.34) 中的 v_1，v_2 均为任意正、负整数，是控制孤波速度的参数。孤波速度可定义如下，在某一单孤波的某邻域，若 t 时刻与 $t+1$ 时刻的状态有关系 $u_j^{t+1}=u_{j+v}^{t}$，那么，$u_j^{t+k}=u_j^t+kv$，因此，式中的 v 正是孤波的速度。由此定义，式 (3.31) 演化系统中单孤波的速度为

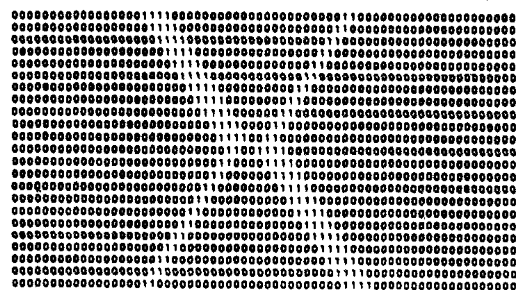
$$v=\begin{cases} l-v_1-1 & (v_1-l+1\leqslant v_2\leqslant v_2+1)\\ \text{裂变} & (v_1+2\leqslant v_2\leqslant v_1+l)\\ -v_2 & (\text{其它情况}) \end{cases} \tag{3.35}$$

式中，l 代表单孤波的长度。因此，在上述参数(v，l)[$v=(v_1,v_2)$]空间的一个区域中，这个系统中的孤子是不稳定的，将裂变成若干较小的“亚孤子”。这不是这个系统所特有的，光纤中的 NLS 孤子和自感应透明孤子脉冲都存在这种裂变现象[78, 79]。当 NLS 方程中增加一 Raman 项时，它造成频移与幅值 4 次方成正比，因而同一脉冲中幅值大小不同的部分有不同的速度，从而发生裂变。自感应透明脉冲在吸收介质中，只有 2π 脉冲是稳定的，4π，6π，… 脉冲将裂变成 2，3，… 个 2π 脉冲，根据式(3.35)，孤子速度不但可调节，而且还可以反向传播。图 3-3(a、b、c)给出了二孤子的传播及相互作用。其中，图 3-3(a)，(b)在相互作用时，二孤子交换一下位置；但图 3-3(c)中的孤子相互作用时需经过一个中间状态后才实现位置交换，即要经过 0110110 才由 0111010 变成 0101110。一般情

况下，两孤子相互作用就是这两种类型。图 3–4 给出了多孤子相互作用及其演化，可以看到在相互作用时无论多么混乱，但最终各孤子都恢复了各自原有的状态，这正是孤子的特征之一。与 Satsuma 等的孤子细胞自动机一样，相互作用的唯一效应就是使各孤子产生相移，相移量除与长度有关外还与速度有关；Satsuma 孤子相移是：长孤子为 $2l_2$、短孤子为一 $2l_2$，l_2 为短孤子长度。但这里不再这样，如图 3–4(*a*)中长孤子没有与两个短孤子同时作用，因而可独立分析；第一次相互作用时，长、短孤子相移各是+9 和−6；第二次作用时，长、短孤子相移是+5，−6；当多个单孤子相互作用时，相移较为复杂，如两个单孤子相互作用的相移是(当 $l_1 \geqslant l_2+1$ 时)：



(*a*)



(*b*)



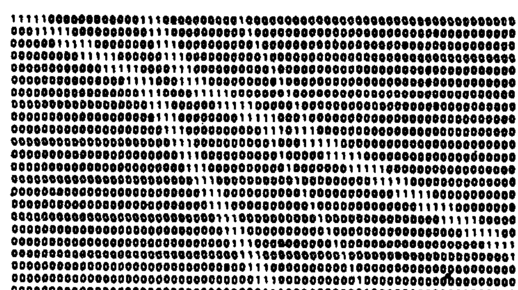
(*c*)

图 3–3　二孤子相互作用及演化

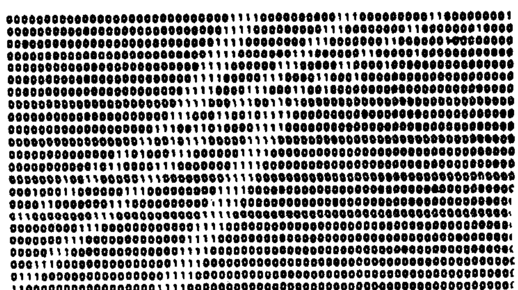
(*a*) $v_1=2$, $v_2=2$;

(*b*) $v_1=2$, $v_2=2$;

(*c*) $v_1=1$, $v_2=1$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

图 3–4　多孤子相互作用及演化

(*a*) $v_1=+1$, $v_2=-1$;

(*b*) $v_1=4$, $v_2=4$;

(*c*) $v_1=3$, $v_2=3$

$$\Delta\varphi_1 = 2l_2 \qquad (v_2 - 1 \leqslant v_1 \leqslant v_2 + l_1 - 2) \tag{3.36}$$

$$\Delta\varphi_2 = \begin{cases} -2l_2 & (v_2 - 1 \leqslant v_1 \leqslant v_2 + l_2 - 1) \\ -2[1 + v_1 - v_2] & (v_2 + l_2 - 1 \leqslant v_1 \leqslant v_2 + l_1 - 2) \end{cases} \tag{3.37}$$

式中，$\Delta\varphi_1$ 和 $\Delta\varphi_2$ 代表初始时左、右边孤子所发生的相位，在 $l_1 < l_2+1$ 和其它条件下，两孤子或者等速，或者裂变，或者不碰撞。

3.7 孤子细胞自动机的守恒量与内禀孤子

现在的问题是，由式(3.31)构造的演化系统是不是孤子系统，这需要检验它是否具有孤子的以下基本特征：(1) 能量局域化；(2) 相互作用后不影响各自的状态；(3) 存在无限可数个守恒量。虽然，这个系统是空间非局域的，这只说明作用是“长程”的，但能量是“集中”的(规定状态为“0”处能量为 0，这里的“长程”和“集中”只是比喻并在后面有特别的含意，因在物理上若作用是“长程”的，则能量必是不“集中”的)，因此，第一个条件是不成问题的。根据前节分析，第二个条件自然满足。对于条件(3)，我们注意到，式(3.31)同 Satsuma 等的孤子系统类似，在特定的参数下，也有一系列字符串的数目是守恒的。若用 #1011 代表字符串 1011 在序列中出现的数目，例如串 01101101110 中 #1011＝2，#11011＝2，#11＝3，#110＝3，这样可得出一系列守恒量，例如，对于图 3−4(*b*)，#1，#11，#1101＋#0010 是守恒量；还有 #1110011001+#01 11000＋#01100 和 #1110011001＝#0111000＋#01100＋#010 等等在这个具体的过程中都是守恒量；需要指出前面的守恒量与初值及参数有关，但真正要寻求的守恒量应是与初值无关的守恒量。如上述五种守恒量中，第五种不适应于图 3−4(*c*)的情况，因此不是普适守恒量。另一方面，可由 #1，#11 等守恒量是可分别造构出守恒量 $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j$ 和 $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j u_{j+1}$ 等，如 #1101＋#0010＝$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j u_{j+1}(1-u_{j+2})u_{j+3} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(1-u_j)(1-u_{j+1})u_{j+2}(1-u_{j+3})$，用此方法可表示出任意一种字符串数的代数表达式，并用此表达式来证明这个串的数目是否为守恒量，然而其代数证明一时还无法做出。

我们注意到，孤子之间的作用是“长程”(因是空间非局域的)作用，即孤子在表观上还未接触，就发生了相互作用并交换位置。如图 3−3(*b*)尤为明显，可见孤子“周围”存在一种“无形”的“场”，它随孤子一起运动；当相互作用时，首先是这种“场”的相互作用，这种“场”被标志孤子存在的“1”字符串周围的“0”字符串所蕴含。因此，有必要引入一种被我们称之为“内禀孤子”的字符串来完全从根本上描述“1”字串及其“场”——周围的“0”字串。于是，我们有四种方法来构造这种“内禀孤子”。构造内禀孤子的原则是：当孤子相互作用时，这种“内禀孤子”是不变的，这也是一种广义的守恒量。具体步骤可分为六步：

① 对序列分组。使每组全为 1 或全为 0，而相邻两组中的元素不能相同。例如，110001 只能是三个组，每个组的长度用 l_i 表示(i＝1，2，…)。

② 找出所有满足关系 $l_i \leqslant l_{i+1}$ 的 i，再取最左的 i (即最小的这种 i)。

③ 把由②所确定的第 i 组中的所有元素拉丁化。即若第 i 组元素是“1”就用大写拉丁字母表示；若是“0”就用小写拉丁字母表示，且若第 i 个组长度 $l_i=1$，则用字母 A(或 a)；若 $l_i=2$，则用 B(或 b)；若 $l_3=3$，则用 C(或 c)，……其余类推。

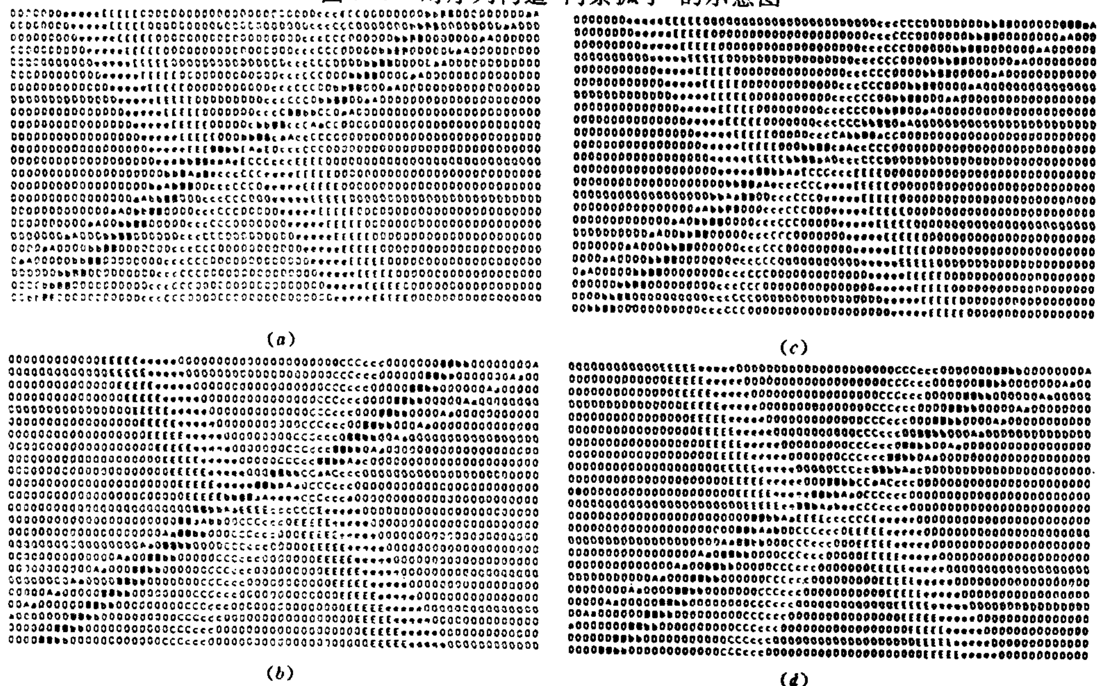
④ 在与这样的第 i 组左邻的一组中(长度为 l_{i-1}),与第 i 组毗邻的 l_i 个元素也按③拉丁化；如果 $l_{i-1}<l_i$，则除第 l_{i-1} 组元素全部拉丁化外，还需把右邻的一组(长度 l_{i+1})中与第 i 组毗邻的 l_i-l_{i-1} 个元素拉丁化。如图 3-5 中，满足这样条件的分组为 $i=2$，即…000011100111000…中的划线部分，按③应是…0000111bb11100…，由④进一步化为…00001BBbb11100…，注意，如果 $l_{i-1}>l_i$，则与 bb 左邻的一组中不是全部元素(而是其中 l_i 个元素)被拉丁化。

⑤ 检查是否所有的非零元素都被拉丁化。若是，则对这一序列构造“内禀孤子”的过程就结束了；若不是，则进行第 6 步。

⑥ 重新编组。这时编组只对未被拉丁化的元素，而被拉丁字母隔开的元素认为是毗邻的，如图 3-5 中…000001BBbb11100010…中第一个“1”和 bb 之后的 111 认为是连通的，因此编组时作 1111 处理，但不能改变原有的排列，即第一个“1”不能与 BBbb 交换。编组之后，重复②～⑤的过程，如图 3-5 中经过五步之后就实现了对这个序列的构造。

```
1    ...000000011100111000100001100000...
2    ...00000001BBbb111000100001100000...
3    ...000001BBbb11100aA0000110000...
4    ...000ddddDBBbbDDD00aA0000110000...
5    ...000ddddDBBbbDDD00aA00bbBB0000...
```

图 3-5　对序列构造“内禀孤子”的示意图



(a)　(c)　(b)　(d)

图 3-6　与图 3-4 相应的“内禀孤子”的演化与相互作用

构造方法：(a) 第一种；(b) 第二种；(c) 第三种；(d) 第四种

上面所述方法是第一种方法，还有第二种方法、第三种方法和第四种方法等三种类似

的方法:

第二种方法是把上述步骤④中的"左邻"改为"右邻"而"右邻"改为"左邻";

第三种方法是把上述步骤②改为: 找出所有满足关系 $l_{i-1} \geqslant l_i$ 的最右边的 i;

第四种方法是在第三种方法基础上，再作第二种方法中那种改变。

当各孤子充分远离时，第一种与第三种方法是完全一样的，第二种与第四种方法也是完全一样的。但各孤子相互作用时，从图 3–6 可看出它们的差别。然而每一种方法所构造的"内禀孤子"在演化中始终是不变的，虽然相互作用时，每个孤子都被别的孤子分割成几部分，但各部分的总和是保持不变(或守恒)的，因此"内禀孤子"给出了一种广义的守恒量。同时，我们还可看到，"内禀孤子"能比表观孤子(即仅由"1"构成的串)更适应于表达孤子的本质及其相互作用特征。正因为如此，为区别表观孤子，将它命名为内禀孤子。根据内禀孤子各部分总和的不变性，我们可以预见任何一个序列的初态或终态的组成。例如，我们随手写下一个序列 000000001111100011110011100110100，初看上去，这是五个长度分别 1，2，3，4，5 的单孤子序列。实际上，表观现象为我们造成了错觉，若按照上述第一种方法构造其内禀孤子，则不难得到 0ffffffcFFCCCcccFFFFccCBBbbCCaA00，显然这序列只是五个长度分别为 1，2，3，3，6 的单孤子序列相互作用的一个中间过程，因此其初态或其终态($t\to-\infty$或 $t\to+\infty$的状态) 必由后述五种孤子组成。

3.8 暗孤子细胞自动机

前面讨论的是明孤子细胞自动机。光纤及流体中存在明孤子和暗孤子[80~83]，受此启发，我们也发现了以细胞自动机的方式存在着暗孤子，

定义

$$S_j^t=\sum_{i=-\infty}^{j}(1-u_i^t) \tag{3.38}$$

则

$$\begin{aligned}u_j^{t+1}=&\frac{1}{4}\left(\left|S_{j+v_2}^t-S_{j-1}^{t+1}-1\right|-\left|S_{j+v_2}^t-S_{j-1}^{t+1}+1\right|\right)\left(1+S_{j+v_1}^t-S_{j+v_1+1}^t\right)\\&\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\left|S_{j+v_2}^t-S_{j-1}^{t+1}-1\right|-\left|S_{j+v_2}^t-S_{j-1}^{t+1}+1\right|\right)\right]\end{aligned} \tag{3.39}$$

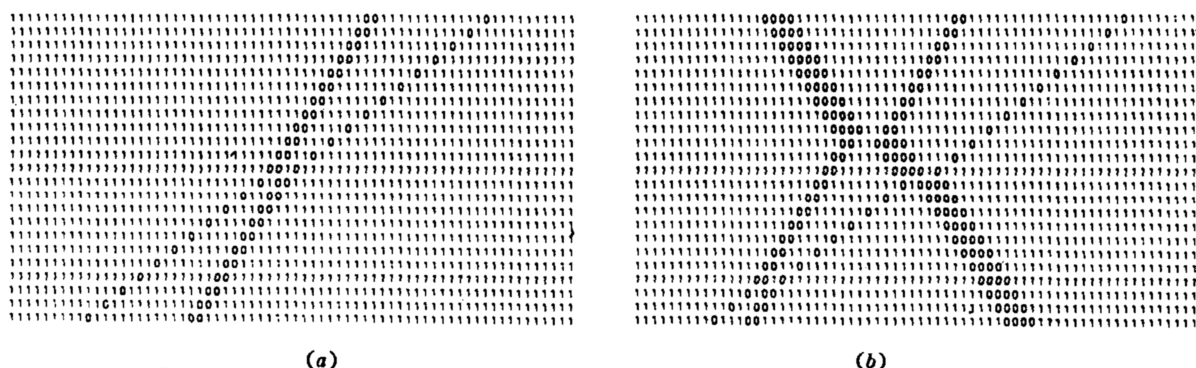
这个系统的时间反演是

$$\begin{aligned}u_j^{t}=&\frac{1}{4}\left(\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}-1\right|-\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}+1\right|\right)\left(1+S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+v_1-1}^{t+1}\right)\\&\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}-1\right|-\left|S_{j-v_2}^{t+1}-S_{j+1}^{t}+1\right|\right)\right]\end{aligned} \tag{3.40}$$

其中

$$S_j^t=\sum_{i=j}^{+\infty}(1-u_i^t) \tag{3.41}$$

这种系统的"内禀孤子"仍可按上节方法进行构造，只需把"1"和 0"互换一下即可。根据定义可看出，暗孤子细胞自动机也具有上述所有特性，图 3–7 给出二例演化过程。



(*a*)　(*b*)

图 3–7　暗孤子细胞自动机的演化

综上所述，在本章后半部分,作者首先通过与 KdV 和 NLS 孤子类比，提出了一种可调节的双参数(即速度和长度)孤子细胞自动机演化系统。在给出了其速度的代数表达式及孤子裂变条件后，分析了相互作用规律及各种守恒量；同时，引入内禀孤子概念。文中阐明了内禀孤子不仅在孤子相互作用时保持不变，而且其中的“0”字符串(即小写拉丁字母)代表了一种相互作用的“场”，而其中的“1”字符串(即大写字母)代表了这种“场”的“载体”。采用这种表示方法能更好地(相对于只用表现孤子，亦即载体)表达孤子的本质及相互作用特征；同时，还可用它来预见某一序列的渐近状态($t\to\pm\infty$)或孤子组成。最后，文中给出暗孤子细胞自动机及其特性分析。

第 二 部 分

流体孤子理论

"The soliton digs its own hole and builds its own walls."

——I.Rudnick

第 4 章

流体孤子方程

4.1　引　言

在流体中，包括电磁流体，存在着大量的孤波现象，如在极光等离子体中存在静电离子波[1]。在非磁等离子体中存在离子声孤子[2~5]；在低β磁化等离子体中存在斜传播离子波，其中既有正孤波，也有负孤波或称为暗孤波[6~11]。事实上，'孤子'的命名也正是起源于 Zabusky 和 Kruskal 对等离子体中孤子碰撞的数值研究[2]。孤子现象，从 1834 年 Scott Russell 在科学意义上的发现，到 1965 年对其命名，都是首先在流体中发现的。可以说，流体对孤子概念及理论的建立立下了汗马功劳。从 1895 年 Korteweg 和 de Vries 建立 KdV 方程到现在，描写流体孤波现象的方程已有数十个。其中，有 KdV 方程、NLS 方程及其各种修正型方程，还有 Boussinesq 方程、Burgers 方程、Benjamain 方程，等等。这些孤波方程都可从流体力学方程或电磁流体力学方程出发，作不同的尺度假设而得到。例如，在长波近似下，弱非线性(即小振幅)和色散在长时间内才能表现出来，这时波的振幅就可能由 KdV 或 Burger 方程等来描述；在短波极限下，非线性及色散只作用于波列的包络，这时包络可能由 NLS 方程或 Sine–Gordon 方程等来描述。

在水波孤子现象方面的研究已取得瞩目的成就，Miles[13~17]广泛地研究了水槽及水盆中的非线性波，Ablowitz 和 Sedgur 等[18~24]对流体孤子作了非常系统的研究。此外，还有 Whitham[25~26]，Minzoni[27]，Gu 和 Sethna 等[28]，Jones[29]，Radder[30]等等在孤波的非线性动力学，非线性混沌方面作了有意义的研究。我国学者也极积参与并取得了有意义的成果。例如，在文献〔31～40〕中对孤波绕射、水波爬坡、孤波在带槽岸边的反射、圆柱槽中的孤波及运动边界等问题都进行了广泛的研究。

最近 Wu，Keokian 和 Rudnick[36, 37, 38]首次在水槽中发现了非传播孤子。接着，Larraza 和 Putterman[39]以他们在声学孤子方面的研究和 Aranha 等的研究[40]为基础，给出了这一问题的理论描述，得到了非传播孤波解。与此同时，Miles[41]也用另一种方法给出了孤波方程。我国学者对此也作了卓有成就的研究[42~48]。但目前仍有许多现象还未得到解释或没有得到很好的解释，例如，水槽孤波的相互作用问题、双孤波模式问题、倾斜水槽中孤波移动、支持孤波的下截止驱动振幅与驱动频率关系曲线等问题。

1990 年 Denardo, Wrisht 和 Putterman 等[49]在水槽中发现了扭结孤波，这为理论研究又提出了新问题，其中也包括倾斜水槽中扭结孤波移动问题。此外，还有双槽孤波耦合问题也是非常有意义的课题。第二部分的主要任务就是介绍作者在这些方面的研究。

4.2　流体力学方程组

非线性可以产生很多本质上全新的现象，这些现象是不可能由线性化方程加上微扰得到的。流体力学中包括等离子体中离子波等，存在着两类极限情况：其一是小振幅和长波近似，这时，色散和非线性相对于线性波动方程中的主要项来说，只在长时间中才变得重要，这时波的振幅就可以由 KdV 方程来描述；其二是在短波极限下，波就可能近似用一个单色的波列来表述，其包络是时空的慢变函数，这时，非线性及色散只与包络耦合，包络可以用 NLS 方程来描述。下面首先介绍流体力学中的方程组和边界条件。

考虑无旋($\nabla\times \boldsymbol{u}=0$)和不可压缩流体，则质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$$

引入速度势 φ: $\boldsymbol{u}=\nabla\varphi$，则有

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{4.1}$$

这里，ρ 为流体密度，$\boldsymbol{u}$ 为速度分布，对于刚性边界 S，必有 $u_n=0$，$\mathbf{n}$ 为边界法向单位矢，因此

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{n}}\right|_s=0 \tag{4.2}$$

设外体力密度是保守的，则 $\boldsymbol{F}=-\nabla U$，U 是保守力场的势，代入动量方程(无粘性时，$\nu=0$)

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\boldsymbol{F}+\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{4.3}$$

在重力场中 $\boldsymbol{F}=g$(重加速度)，把上式用于自由边界面内外，并略去空气一方的压强，可得自由边界方程

$$\varphi_t+g\xi+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-\nu\nabla^2\varphi=0 \qquad (在\quad z=\xi(x,\ y,\ t)) \tag{4.4}$$

式中用到 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$，上式是自由边界面的动力学边界条件，可以看到，即使 $\nu\neq 0$，对无旋流体，式 (4.4) 最后一项 $\nabla^2\varphi=0$，对无旋流体粘性不起作用，然而粘性也是涡量扩散的条件，因此只要初始时刻某处有涡量，则涡量最终会发展，因而这时就不能引入速度势。此外，还有称之为自由面运动学边界条件的方程，可通过下面推导得到。

对于自由面

$$z=\xi(x,\ y,\ t)$$

曲面方程可写成

$$F(x,\ y,\ z,\ t)\equiv z-\xi(x,\ y,\ t)=0 \tag{4.5}$$

自由面附近水中质点速度为 $\boldsymbol{u}$，法向分量为 $\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}$，而自由面法线方向单位矢为

$$\mathbf{n}=\frac{F_x+F_y+F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}} \tag{4.6}$$

因此 $\boldsymbol{u}$ 的法向分量为

$$u_n=\frac{F_x u_x+F_y u_y+F_z u_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}} \tag{4.7}$$

另一方面，自由面上的点由于曲面变化而随时间移动，因此曲面上点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial t}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial t}\mathbf{k} \quad (\boldsymbol{r}\in\text{曲面}) \tag{4.8}$$

$\boldsymbol{v}$ 的法向分量即为曲面移动的法向速度，即

$$v_n=\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}=\frac{F_x\dfrac{\partial x}{\partial t}+F_y\dfrac{\partial y}{\partial t}+F_z\dfrac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}} \tag{4.9}$$

由于 $z=\xi(x,\ y,\ z)$ 是自由面，故无水质点穿过，条件是水质点的法向速度与曲面法向速度相等，即

$$\left(F_x\frac{\partial x}{\partial t}+F_y\frac{\partial y}{\partial t}+F_z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\bigg|_{z=\xi}=(F_x u_x+F_y u_y+F_z u_z)\big|_{z=\xi} \tag{4.10}$$

由式(4.5)

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}\equiv 0$$

即

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t}=F_x\frac{\partial x}{\partial t}+F_y\frac{\partial y}{\partial t}+F_z\frac{\partial z}{\partial t} \tag{4.11}$$

代入式 (4.10) 有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{4.12}$$

此即自由面运动学边界条件。

4.3　起伏变化刚性边界与表面张力

当刚性边界有起伏变化时，式(4.2)的表达式较复杂。下面以槽底起伏为例，说明这时式(4.2)的具体形式。设槽底起伏由 $h(x,\ y)$描述，则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\theta_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\theta_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\sin\theta \tag{4.13}$$

由图 4–1 可知:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\cos\theta_x}{\sin\theta}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{\cos\theta_y}{\sin\theta}$$

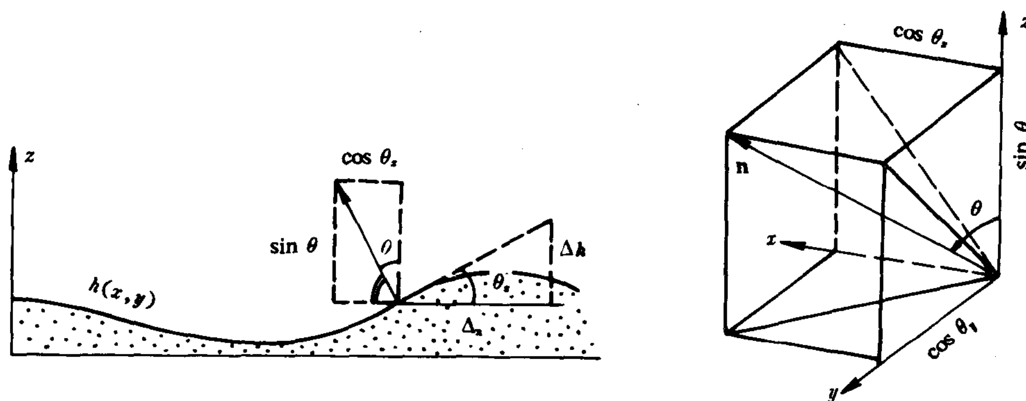


图　4－1

代入式(4.13)

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{4.14}$$

这就是曲面为

$$z=h(x,\ y) \tag{4.15}$$

的底面处的刚性边界条件。下面讨论表面张力(图 4–2)。当存在表面张力时，自由面附近的内外压强不再相等(即自由面内侧的压强 p_2 不再等于空气压强 p_1)，这时，由式(4.3)，式(4.4)应改为

$$\varphi_t+g\xi+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2=-\frac{p_2}{\rho} \qquad (z=\xi) \tag{4.16}$$

这时，$p_2\neq p_1\approx 0$，设界面 $z=\xi(x,\ y,\ t)$作虚位移 $\delta\xi$，应做虚功

$$\iint_f(-p_1+p_2)\delta\xi\mathrm{d}f \qquad (f\text{ 及 }\mathrm{d}f\text{ 代表在自由面上积分})$$

这仅是内外压强差贡献的。同时，由于表面张力，当自由面为$z=\xi(x,\ y,\ t)$时，其面积

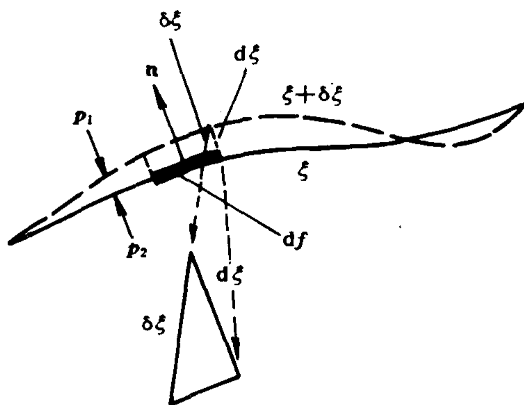


图　4－2

为 f；当 $\xi\to\xi+\delta\xi$ 时，其面积为 $f\to f+\delta f$；表面积增大时，表面张力要做功 $\delta A\propto\delta f$，即 $\delta A=\alpha f$，α 为比例系数，由表面张力系数定义，α 也就是表面张力系数。因此，总虚功为

$$\delta R=\iint_f (p_2-p_1)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}f+\alpha\delta f \tag{4.17}$$

对于曲面 $z=\xi(x,\ y,\ t)$，总面积为

$$f=\iint_{z=\xi}\sqrt{(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}z\mathrm{d}x)^2}=\iint\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.18}$$

由此

$$\delta f=f[\xi+\delta\xi]-f[\xi]=\frac{1}{2}\iint\frac{2\xi_x(\delta\xi)_x+2\dfrac{\partial\xi}{\partial y}(\delta\xi)_y}{\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.19}$$

对上式分部积分并注意到在端点 $\delta\xi=0$，上式

$$\delta f=-\iint\frac{\xi_{xx}(1+\xi_y^2)+\xi_{yy}(1+\xi_x^2)-2\xi_x\xi_y\xi_{xy}}{(\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2})^3}\delta\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.20}$$

考虑到（由式 (4.18)）$\mathrm{d}f=\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\neq\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在 $(x,\ y)$ 点处 $\delta\xi\neq\mathrm{d}\xi$（见图 4－2），由式 (4.6) 可得 $\delta\xi$ 与 $\mathrm{d}\xi$ 的关系

$$\mathrm{d}\xi=(\delta\xi)\cos\theta=\frac{\delta\xi}{\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2}} \tag{4.21}$$

代入式(4.17)可得

$$\delta R=-\iint_f\left[p_1-p_2+\alpha\frac{\xi_{xx}(1+\xi_y^2)+\xi_{yy}(1+\xi_x^2)-2\xi_x\xi_y\xi_{xy}}{(\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2})^3}\right]\delta\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.22}$$

根据热力学平衡条件，$\delta R=0$。于是，式 (4.16) 和式 (4.22) 给出了自由面上的动力学边界条件

$$\varphi_t+g\xi+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2=\frac{\alpha}{\rho}\frac{\xi_{xx}(1+\xi_y^2)+\xi_{yy}(1+\xi_x^2)-2\xi_{xy}\xi_x\xi_y}{(1+\xi_x^2+\xi_y^2)^{3/2}}\quad(\text{在 } z=\xi(x,\ y,\ t)) \tag{4.23}$$

4.4　水波包演化的两种极限

一维充分小振幅的无粘流体波包，在短时间尺度上由线性方程支配，但在长时间尺度上，则服从 Korteweg–de Vries (KdV)方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{4.24}$$

或

立方非线性Schrodinger(NLS)方程

$$\mathrm{i}A_t + A_{xx} + \sigma|A|^2 A = 0 \tag{4.25}$$

这要由波长来具体决定。当波长相对于水深很长时，即在所谓长波极限下，由 KdV 方程描述；对于短波长，则由 NLS 方程描述。这两类问题吸引了众多学者的注意和兴趣[50~54]。KdV 方程又被 Kadomtsev 和 Petviashvili[55] 推广成准一维形式的二维修正方程

$$u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} - \int_x^{\infty} u_{yy}\,\mathrm{d}x' = 0 \tag{4.26}$$

NLS 方程经过几位学者先后努力[56~60]，最终也得到了包括重力效应、表面张力和任意深度的推广 NLS 方程

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}A_t + \sigma_1 A_{xx} + A_{yy} = \sigma_2|A|^2 A + \Phi_x A \\ &a\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = -b(|A|^2)_x \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

上述各方程的数学问题已得到比较全面的研究。下面给出式(4.26)及式(4.27)的简要推导过程。

4.4.1　KdV 极限

设自由面为 $z=\xi(x,\ y,\ t)$，底为 $z=-h$。又设 g 是重力加速度，α_1 为表面张力系数与流体密度之比，在线性情况下有线性色散关系

$$\omega^2(k) = (g\kappa + \kappa^3 T)\tanh(\kappa h) \tag{4.28}$$

式中，在一维问题中 $\kappa = k$；在二维问题中 $\kappa = (k^2 + l^2)^{1/2}$；$\vec{\kappa} = (k,\ l)$ 代表扰动在水平方向的特征波矢 (k—横向，l—纵向)。考虑准一维小振幅长波初始扰动，选择水平坐标轴，使 x 方向成为波传播的主要方向，并设 a 为扰动的特征幅度，作三个尺度假设:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ \text{小振幅} \qquad \varepsilon \equiv \frac{a}{h} \ll 1 \\ &(2)\ \text{长波} \qquad (\kappa h)^2 \ll 1 \\ &(3)\ \text{准一维} \qquad \left(\frac{l}{k}\right)^2 \ll 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

则可由前节流体力学方程组得到标准 KdV 方程。只要在完全一维问题中，前面两种效应能够平衡。但若这三种效应都能平衡，即:

$$\left.\begin{aligned} &(\kappa h)^2 = O(\varepsilon) \\ &\left(\frac{l}{k}\right)^2 = O(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

则即可得到上面推广的 KdV 方程。由上式及流体力学方程组，可得到

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = O(\varepsilon) \tag{4.31}$$

因此，在准确到最低阶，方程组的解可近似为

$$\xi(x,\ y,\ t) \sim \varepsilon h\{f_1[x-(gh)^{1/2}t;\ y]+f_2[x+(gh)^{1/2}t;\ y]\} \tag{4.32}$$

这里，f_1、f_2 都是由初始条件决定的。

为了得到包括高阶项的方程，作下列尺度假定并规定无量纲变量:

$$\left.\begin{array}{ll} r=\varepsilon^{1/2}[x-(gh)^{1/2}t]/h & u=f_1 \\ s=\varepsilon^{1/2}[x+(gh)^{1/2}t]/h & v=f_2 \\ \eta=\varepsilon y/h,\quad \tau=\varepsilon(gh)^{1/2}t/h & \hat{T}=\alpha_1/gh^2 \end{array}\right\} \tag{4.33}$$

利用多重尺度分析，并消去下一级量中的久期项，可得:

$$\left.\begin{array}{l} \left(2u_\tau+3uu_r+\left(\dfrac{1}{3}-\hat{T}\right)u_{rrr}\right)_r+u_{\eta\eta}=0 \\ \left(2v_\tau-3vv_s-\left(\dfrac{1}{3}-\hat{T}\right)v_{sss}\right)_s-v_{\eta\eta}=0 \end{array}\right\} \tag{4.34}$$

对上式积分一次即为前面的推广的 KdV 方程。

4.4.2 NLS 极限

这里要考虑一个单色波列，其 k 的最大变化限制在 δk 以内，这时需要作下列尺度假设:

(1) 小振幅　$\varepsilon=\kappa a \ll 1$

(2) 慢变调制　$\dfrac{\delta k}{k} \ll 1$　(4.35)

(3) 准一维　$\dfrac{|l|}{k} \ll 1$

(4) 三效应平衡

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta k}{k}=O(\varepsilon) \\ \dfrac{|l|}{k}=O(\varepsilon) \end{array}\right\} \tag{4.36}$$

无量纲深度 kh 可以有限或无限，但为避免浅水极限，应有

$$(kh)^2 \gg \varepsilon$$

在这一极限下，线性问题的解是:

$$\varphi \sim \varepsilon\left(\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}[\tilde{A}e^{i\theta}+\text{c.c.}]+\tilde{A}_0\right)^{①} \tag{4.37}$$

$$\theta=kx-\omega(k)t \tag{4.38}$$

为了得到高阶项，引入慢变坐标

$$x_1=\varepsilon x \quad y_1=\varepsilon y \quad t_1=\varepsilon t \quad t_2=\varepsilon^2 t \tag{4.39}$$

并展开 φ 及 ξ，即:

$$\varphi \sim \varepsilon\{\tilde{\Phi}(x_1,\ y_1,\ t_1,\ t_2)+\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}[\tilde{A}(x_1,\ y_1,\ t_1,\ t_2)e^{i\theta}+\text{c.c}]\}+O(\varepsilon^2) \tag{4.40}$$

---

① c.c.是指这里的复量为前面复量的共轭值。

$$\xi = \varepsilon\{[\xi_{11}\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{c.c}] + O(\varepsilon^2)\tag{4.41}$$

$$\xi_{11} = \frac{\mathrm{i}\omega}{g + k^2 T}\tilde{A}\tag{4.42}$$

必须准确到$O(\varepsilon^3)$级，才能得到推广 NLS 方程。可以做的只有在$\tilde{A}$，$\tilde{\Phi}$中作些变动，对$\tilde{A}$所能容许的变动应反映这样一个事实：这是一个波包，而不是一个波串，且$\tilde{\Phi}$给出了波包的平均运动。下面只讨论高阶项对$\tilde{\Phi}$和$\tilde{A}$所产生的久期效应，其细节可参考 Davey, Stewartson[59]，Djordjevic, Redekopp[60] 和 Benney, Roskes[61] 等的论著。

在二级近似中，久期条件要求波包以其线性群速传播，

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t_1} + C_g(k)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x_1} = 0\tag{4.43}$$

式中，$C_g = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}k$。在这个时间尺度上，$\tilde{\Phi}$ 满足一个受迫波方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_1^2} - gh\left\{\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_1^2}\right\} = k\omega\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left|\tilde{A}\right|^2\tag{4.44}$$

式中:

$$\beta_1 = \frac{kC_g}{\omega}\mathrm{sech}^2 kh + \frac{2}{1 + \hat{T}}\tag{4.45}$$

$$\hat{T} = \frac{k_2\alpha_1}{g} = (kh)^2\hat{T}\tag{4.46}$$

根据$gh > C_g^2$与否，上面的方程会产生戏剧性的变化。如果将$C_g / (gh)^{1/2}$理解成波包的 Mach 数，那么这个不等式正是“亚声”流的条件。如果$\tilde{A}$能一致维持，则$\tilde{\Phi}$有一个以C_g传播的迫动部分，还有一个以速度$(gh)^{1/2}$向外辐射的自由部分，当$t_1 \to \infty$时，后一部分$\to O(t_1^{-1/2})$，因而当$t_1 \to \infty$和$gh > C_g^2$时，$\tilde{\Phi}$满足:

$$a\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_1^2} = -\frac{g\omega}{gh}\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left|\tilde{A}\right|^2\tag{4.47}$$

$$a = \frac{gh - C^2}{gh}\tag{4.48}$$

利用边界条件[59]

$$\tilde{\Phi} \to 0 \qquad (\text{当}\quad x_1^2 + y_1^2 \to \infty)\tag{4.49}$$

这只在 $\alpha=0$ 时是正确的。若表面张力α_1很强，则$gh < C_g^2$，即流是“超声”的。这里取$t_1 \to \infty$是有意义的，只要将对二次时间尺度依赖的久期项(即 $t = O(\varepsilon^{-2})$)消去，就可得到推广的 NLS 方程，作无量纲化变换，

$$\begin{aligned}&\zeta = \varepsilon k(x - C_g t);\\&\eta = \varepsilon k y;\end{aligned}\tag{4.50}$$

$$\tau = \varepsilon^2 (gh)^{1/2} t; \tag{4.51}$$

$$A = k^2 (gh)^{-\frac{1}{2}} \tilde{A};$$

$$\Phi = k^2 (gh)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}。 \tag{4.52}$$

于是，A、Φ满足：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}A_\tau + \lambda A_{\xi\xi} + \mu A_{\eta\eta} = \chi |A|^2 A + \chi_1 A \Phi_\xi \\ &a\Phi_{\zeta\zeta} + \Phi_{\eta\eta} = -\beta(|A|^2)_\zeta \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

式中：　$T = \tanh(kh)$　　$\hat{T} = \dfrac{k^2 \alpha_1}{g}$　　$\kappa = (k^2 + L^2)^{1/2}$

$$\omega^2 = ghT(1 + \hat{T}) \geqslant 0 \qquad \omega_0^2 = g\kappa$$

$$\lambda = \frac{\kappa^2 \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \kappa^2}\right)}{2\omega_0} \qquad \mu = \frac{\kappa^2 \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}\right)}{2\omega_0} = \frac{\kappa C_g}{2\omega_0} > 0$$

$$\chi = \left(\frac{\omega_0}{4\omega}\right) \left\{ \frac{(1 - T^2)(9 - T^2) + \hat{T}(2 - T^2)(7 - T^2)}{T^2 - \hat{T}(3 - T^2)} \right.$$

$$\left. + 8T^2 - 2(1 - T^2)^2 (1 + \hat{T}) - \frac{3T^2 \hat{T}}{1 + \hat{T}} \right\}$$

$$\chi_1 = 1 + \frac{\kappa C_g}{2\omega} (1 - T^2)(1 + \hat{T}) \geqslant 0$$

$$\nu = \chi - \frac{\chi_1 \beta}{\alpha}$$

$$\beta = \left(\frac{\omega}{\omega_0 kh}\right) \left\{ \frac{\kappa C_g (1 - T^2)}{\omega} + \frac{2}{1 + \hat{T}} \right\} \geqslant 0 \qquad \alpha = \frac{gh - C_g^2)}{gh}$$

对以上方程的进一步研究，参见文献〔50〕。

4.5　Larraza 和 Putterman 的非传播孤波解

Ablowitz 等[50] (1979)及 Yuen 等[51] (1980)广泛地研究了弱非线性表面波问题。在那里考虑了这样一种近似：相速与群速方向之间夹角很小，并检验了稳定性及永久演化问题。对于相速(波列)与群速(波包运动)成 90° 的近似还没有彻底地研究过。Wu，Keolian 和 Rudnick(1984 年)的发现已显示驻波类孤子扰动存在于有限宽度 b 和均匀有限深度 d 的水槽中，这种有限振幅驻波存在于槽的横向(宽度方向)，其振幅沿长度方向受到调制，因此，上述近似可以用于这一问题中。

Wu 等在实验中发现的孤波扰动，被后来的学者称为非传播孤波，其实验装置如图 4−3 所示。这种装置在竖直方向驱动，槽的长、宽分别为 $L = 38$ cm 和 $b = 2.54$ cm，水深

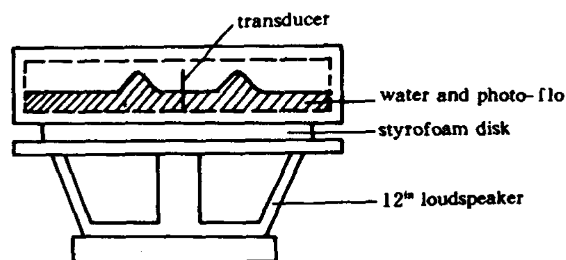


图 4－3 参数驱动实验装置示意图

为 $d=2$ cm。当驱动幅度适度时，即可在驱动频率为 10 Hz 到 11 Hz 之间产生非传播孤波。此外，图 4–4 中所示装置也能产生非传播孤波，这个装置的不同点是在宽度方向水平驱动。图 4–5 给出了驱动频率为 2× 5.1 Hz，孤波幅度 2.1 cm 时，自由面照片测量拟合

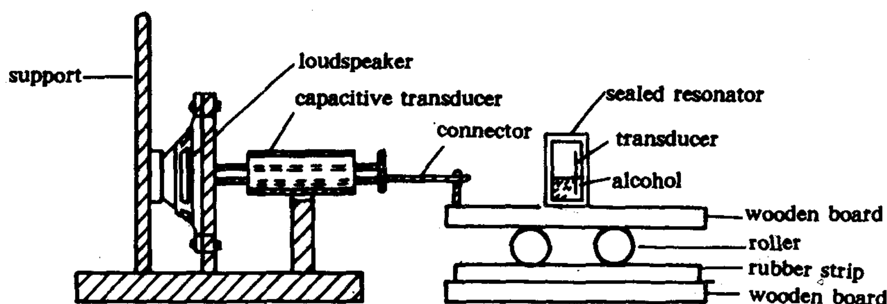


图 4－4 水平驱动实验装置示意图

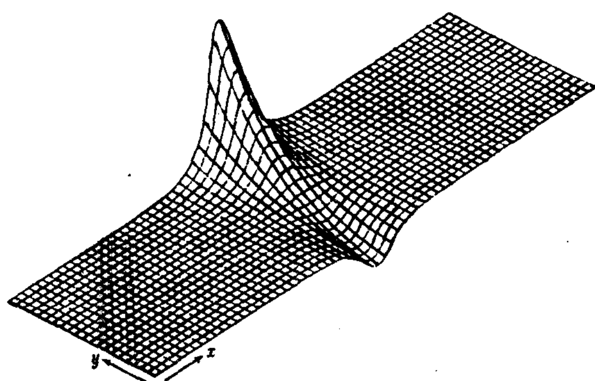


图 4－5 孤波自由面照片测量拟合曲面
($Z=\mathrm{sech}(x/1.12)[2.8\mathrm{sech}(-1.1y)-0.70]$ cm)

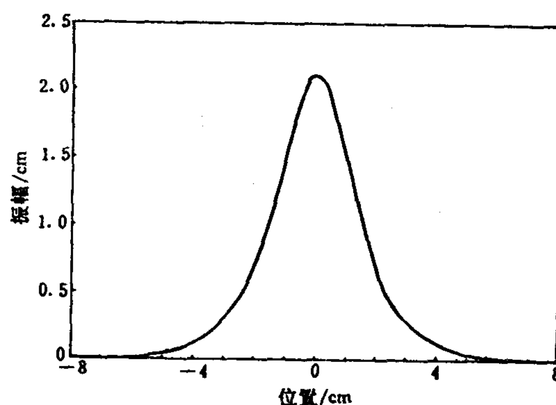


图 4－6 孤波沿长度方向的波形
($Z=2.1\mathrm{sech}(x/1.12)$ cm)

曲面。图 4–6 是这时孤波沿长度方向的波形(在 $y=0$ 处)。Larraza 和 Putterman[39] 针对上述实验现象，提出了非传播表面波导理论，他们独立于 Miles 的 Lagrangian 平均分析[41]，得到了支配水槽中孤波的 NLS 方程。这些方面吸引了广大学者的研究兴趣，包括我国学者。下面首先给出从流体力学中的方程组及边界条件导出解孤波方程的简要步骤。

设槽长度方向为 x，宽度方向为 y 且 $y=0$ 和 $y=b$ 为两壁，竖直方向为 z。当流体静止时，分布于$-d\leqslant z\leqslant 0$的区域内，参见图 4–7。对于无旋不可压缩流体,由前面给出的流体力学方程组，控制方程及在 $z=\xi(x, y, t)$的自由面上的动力学边界条件为(不计表面张力)

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad -d<z<\xi(x, y, t) \tag{4.54}$$

$$\varphi_t+g\xi+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2=0 \qquad z=\xi(x, y, t) \tag{4.55}$$

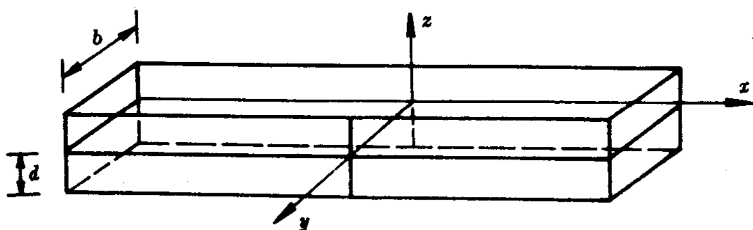


图 4－7　水槽示意图

在自由面上，运动学的边界条件是

$$\xi_t+\xi_x\varphi_x+\xi_y\varphi_y=\varphi_z \qquad z=\xi(x, y, t) \tag{4.56}$$

在刚性壁、底上边界条件是:

$$\varphi_z=0 \qquad z=-d \tag{4.57}$$

$$\varphi_y=0 \qquad z=0,\ b \tag{4.58}$$

由式 (4.55) 并注意到 $\varphi=\varphi(x, y, t)|_{z=\xi(z, y, t)}$，可得[62]

$$\xi_\alpha=\frac{-\dfrac{1}{g}\varphi_{t\alpha}-\dfrac{1}{2g}(\nabla\varphi)^2_\alpha}{1+\dfrac{1}{g}\varphi_{tz}+\dfrac{1}{2g}(\nabla\varphi)^2_z} \qquad (\alpha=x, y, t)$$

将上式代入式 (4.56)，经化简可得

$$g\varphi_z+\varphi_{tt}=-(\nabla\varphi)^2_t-\frac{1}{2}\{\nabla\varphi\cdot\nabla(\nabla\varphi)^2\} \qquad z=\xi(x, y, t)$$

将上式在 $z=0$ 附近展成 ξ 的幂级数，并认为 ξ、φ 是小量，则

$$(g\varphi_z+\varphi_{tt})+(g\varphi_z+\varphi_{tt})_z\cdot\xi+\frac{1}{2}(g\varphi_z+\varphi_{tt})_{zz}\cdot\xi^2$$
$$=-(\nabla\varphi)^2_t-(\nabla\varphi)^2_{tz}\xi-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot\nabla(\nabla\varphi)^2$$

$$+O(\varphi^4,\ \xi^4,\ \cdots)\qquad (z=0)$$

由式 (4.55)，将 φ 在 $z=0$ 处展开得

$$g\xi=-\varphi_t+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{g}(\varphi_t)_z^2-(\nabla\varphi)^2\right\}+\left\{\frac{1}{2g^2}\varphi_t(\nabla\varphi)^2-\frac{1}{4g^3}\varphi_t(\varphi_t^2)_z\right\}_z$$
$$+O(\varphi^3)\qquad (z=0)\tag{4.59}$$

其中，对 $\xi=f(\varphi,\ \xi)$ 用到迭代技术[62]

$$\xi=f(\varphi,\ \xi)=f(\varphi,\ f(\varphi,\ \xi))=f(\varphi,\ f(\varphi,\ f(\varphi,\ \xi)))=\cdots$$

从上面两式中消去 ξ，可得在 $z=0$ 处的边界条件

$$(g\varphi_z+\varphi_{tt})=-\left\{(\nabla\varphi)_t^2-\left[\left(\varphi_z+\frac{1}{g}\varphi_{tt}\right)\varphi_t\right]_z\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{(\nabla\varphi)_x^2\varphi_x+(\nabla\varphi)_y^2\varphi_y+(\nabla\varphi)_z^2\varphi_z-\frac{2}{g}[(\nabla\varphi)_t^2\varphi_t]_z\right.$$
$$\left.-\left(\varphi_z+\frac{1}{g}\varphi_{tt}\right)_z\left((\nabla\varphi)^2-\frac{2}{g}(\varphi_t^2)_z\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{2g}\left(\varphi_z+\frac{1}{g}\varphi_{tt}\right)_{zz}(\varphi_t)^2+O(\varphi^4)\tag{4.60}$$

上式最后一项是 Larraza 等人的文献〔39〕(6)式中所没有的,它在条件$\omega^2-gkT=\omega^2O(\varepsilon^2)$下的贡献为$O(\varepsilon^5)$。

下面寻求满足方程式(4.54)在式(4.57)、式(4.58)、式(4.60)三边界条件并附合下列尺度的多重尺度解[39]：

$$\frac{\xi_x}{\xi_y}=O(\varepsilon)\qquad\qquad \frac{\varphi_z}{\varphi_y}=O(1)$$
$$\omega_1^2-\omega^2=\omega_1^2O(\varepsilon^2)\qquad\qquad \varphi=O(\varepsilon)$$
$$\frac{\partial\xi/\partial t_1}{\partial\xi/\partial t_0}=O(\varepsilon^2)\qquad\qquad g\xi=O(\varepsilon)\omega$$

它们等价于:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\\&\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\\&\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\\&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots\end{aligned}\right\}$$

于是，有如下形式的多重尺度解满足式 (4.54)、式 (4.57)、式 (4.58):

$$\varphi=\frac{\cosh(z+d)}{\cosh kd}\cos ky\left[\varphi_1(x,\ t)e^{i\omega t}+\text{c.c.}\right]+\left[\varphi_0^{(2)}(x,\ t)e^{i2\omega t}+\text{c.c.}\right]$$

$$+\frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd}\cos ky\left\{\left(\varphi_2 e^{i2\omega t}+\text{c.c.}\right)+\varphi_2^{(0)}(x,\ t)\right\}$$

$$+\left\{-\frac{1}{2k}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\frac{\cos ky}{\cosh kd}e^{i\omega t}[z\sinh k(z+d)-de^{-k(z+d)}]+\text{c.c}\right\}+O(\varepsilon^4) \tag{4.61}$$

这里，$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{A}{W}$，$A$ 为 $\xi(x,\ y,\ t)$的幅值，W 为孤波特征宽度(在这些文献中，把 W 理解为 b 是错误的)。将式(4.61)代入边界条件式(4.60)，近似到$O(\varepsilon^3)$，可得关于$\varphi_1(x,\ t)$的非线性 Schordinger 方程

$$2i\omega\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+(\omega_1^2-\omega^2)\varphi_1-A|\varphi_1|^2\varphi_1=0 \tag{4.62}$$

文献〔44〕中考虑表面张力后，也得到与上式形式相同的方程，但系数有所不同，它们是：

$$c^2=\frac{g}{2k}[T+kd(1-T^2)] \qquad k=\frac{\pi}{b}$$

$$A=\frac{1}{8}k^4(6T^4-5T^2+16-9T^{-2})+\frac{9k^6T^2}{8g}\frac{\sigma}{p}$$

$$\omega_1^2=\left(gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3\right)T \qquad T=\tanh(kd) \tag{4.63}$$

对于非传播情况，$\frac{\partial}{\partial t}=0$，此时有下面形式的解：

$$\varphi_1(x,t)=\sqrt{\frac{2(\omega_1^2-\omega^2)}{A}}\operatorname{sech}\left\{\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}(x-x_0)\right\} \tag{4.64}$$

且

$$\xi(x)=[\xi_1(x,\ t)e^{i\omega t}+\text{c.c.}]\cos ky+\xi_0(x,\ t)$$
$$+[\xi_2(x,\ t)e^{2i\omega t}+\text{c.c.}]\cos 2ky+\xi_2^{(0)}(x,\ t)\cos 2ky$$

$$\xi_0(x,\ t)=\frac{k|\xi_1|^2(T^2-1)}{2T}$$

$$\xi_2(x,\ t)=\frac{k(3T^{-2}-1)|\xi_1|^2}{4T}$$

$$\xi_2^{(0)}(x,\ t)=\frac{k(1+T^2)|\xi_1|^2}{2T}$$

$$\xi_1(x,t)=-i\frac{\omega}{g}\varphi_1(x,t)$$

将式 (4.61) 代入式 (4.59) 可得

$$\xi(x,\ y,\ t)=\frac{1}{g}\left\{[-i\omega\varphi_1 e^{i\omega t}\cos ky+\text{c.c.}]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}k^2|\varphi_1|^2(T^2+1)\cos 2ky+\frac{1}{2}k^2|\varphi_1|^2(T^2-1)\right]\right.$$

$$-\left[\frac{k^2\varphi_1^2}{4}\left(\frac{3}{T^2}-1\right)e^{i2\omega t}\cos 2ky+\text{c.c.}\right]\Bigg\}+O(\varepsilon^2)$$

将式(4.64)代入上式，即可得到如图 4–8 中所示的孤波自由面的理论计算曲面。上面用到式(4.59)。按第 1 章(也可按文献〔63〕)求解 NLS 方程的传播单孤波解的方法可得方程式(4.62)的传播单孤波解。可以证明式(4.64)是该解的零速极限，因而它的确是孤波，因为要形成这样的纵向驻波，需要入射和反射波包的叠加，然而波包是弥散[64]的，当然，在 y 方向它确是驻波的形式即横向驻波。

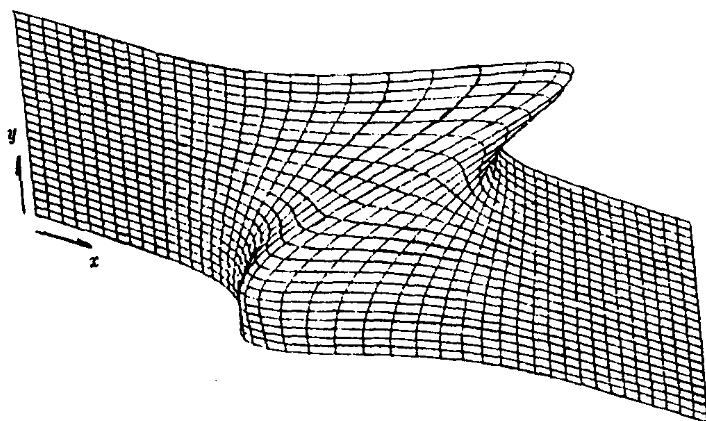


图 4–8 孤波自由面位移的理论曲面 $\xi(x, y, 0)$

4.6 其它理论简介

Miles[41] 独立于 Larraza 和 Putterman 的分析，同时给出了非传播孤波的支配方程，但使用的方法是不同的，即采用了 Lagrangian 平均分析法，分析中计及了垂直迫动力

$$f=a_0\cos 2\omega t \qquad \left(0<\frac{\omega^2 a_0}{g}\ll 1\right)$$

和弱非线性阻尼，得到了如下方程:

$$i(r_\tau+\alpha r)+Br_{xx}+(\beta+A|r|^2)r+\gamma r^*=0$$

式中:

$$\alpha=\frac{\delta}{\varepsilon} \qquad \beta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\varepsilon\omega_1^2}$$

$$\gamma=\frac{\omega^2 a_0}{\varepsilon g} \qquad B=T+kd(1-T^2)$$

$$A=A_0+\frac{1}{2}(1-T^2)^2 \quad A_0=\frac{1}{8}(2T^4+3T^2+12-9T^{-2})$$

这里，δ 是谐振模中的自由振动的实际阻尼与临界阻尼之比；ε 是一个小量，由 $\gamma=1$ 决定。

我国学者黄国翔、颜家壬和戴显熹[42]计及表面张力和竖直激励，利用多重尺度展开，也得到了非传播孤波方程

$$2\mathrm{i}\omega u_t-\hat{c}^2u_{xx}+(\omega^2-\omega_0^2)u-Q|u|^2u+\mathrm{i}\gamma u-\delta u^*=0 \tag{4.65}$$

其中，已仿照 Miles[41]引入了表面波阻尼，即$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}+\hat{a}$，$\gamma=2\omega\hat{a}$，$\hat{a}$ 是实际阻尼与自由振荡时临界阻尼之比[15, 41]。

在式(4.65)中：

$$Q=g(1+\hat{\sigma})\left(\frac{k^3}{T}\right)A^* \tag{4.66}$$

$$A^*=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+\hat{\sigma})(1-T^2)^2+\frac{1}{4}\frac{1+\hat{\sigma}}{1+4\hat{\sigma}}(1+T^2)^2$$
$$-\frac{1+\sigma^2}{8}\frac{(3-T^2)^2}{T^2-\hat{\sigma}(3-T^2)}+\frac{9\hat{\sigma}T^2}{8(1+\hat{\sigma})} \tag{4.67}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\alpha k^2}{g} \qquad \nu=\frac{2\omega^4a_0}{g} \qquad \hat{c}^2=\frac{g}{2k}B^* \tag{4.68}$$

$$B^*=(1+\hat{\sigma})[T+kd(1-T^2)]+2\hat{\sigma}T \tag{4.69}$$

最近，Ni 和 Wei[65, 66]为解释水槽中非传播孤波的相互作用，又提出了新理论。其中，假定 $f=\omega_e^2A_e/g$ 及 $\Delta\omega/\omega=(\omega-\omega_e)/\omega$ 为一阶小量（A_e 为驱动振幅，ω_e 为驱动频率之半），利用多重尺度展开，发现存在长周期过程，周期为 $T_1=2\pi/(\Delta\omega^2-f^2\omega^2)^{1/2}$。他们与前人不同之处是假定 f、$\Delta\omega/\omega$ 为一阶小量（过去都被假定为二阶小量）。在这一前提下，他们给出了以 $\theta(t)$ 为时间宗量的 NLS 方程，即

$$\mathrm{i}\psi_\theta=\left(\frac{f^2}{4}-\frac{\mathrm{i}\beta}{\omega}\right)\psi+\delta_0\psi_{xx}+\gamma_0|\psi|^2\psi \tag{4.70}$$

式中：

$$\delta_0=\delta/\omega$$

$$\gamma_0=\frac{(3\Delta\omega_1^2-\Omega_1^2)\gamma}{\Delta\omega_1(\Delta\omega_1+\Omega_1)\omega}$$

其中，θ 是以 T_1 为周期的周期函数，即 $\theta(t+T_1)=\theta(t)$，具体形式由实验确定。可设为：

$$\theta=\frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}\sin\Omega t \qquad \Omega=\frac{2\pi}{T_1} \qquad \Omega_1^2=\Delta\omega_1^2-f_1^2\omega^2$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{gkT} \qquad f_1=\frac{f}{\varepsilon}$$

其中，β 为阻尼，γ 和 δ 是:

$$\gamma=\frac{k^4}{16\omega}[6^4-5T^2+16-2T^{-2}]$$

$$\delta=\frac{g}{4\omega k}[T+kd(1-T^2)]$$

他们根据式(4.70)，并考虑 $\theta(t)$的周期变化，能在一定程度上较好地解释 Wu 等所观察到的现象。

可以看到，前人的广泛研究，为水槽中非传播孤波理论建立了良好的基础，但仍然有许多现象没有得到很好的解释。例如，斜水槽中孤波的移动问题、孤波的相互作用及贯穿问题、下截止振幅 Δ_c 与驱动频率关系曲线等。第 5、第 6 章就是介绍作者针对这些问题所作的研究。

第 5 章

水槽中孤波传播、相互作用与参量激励近似分析

5.1　孤波相互作用的微扰变分分析

关于水槽中孤波的相互作用，Wu 等人有如下描述：“同相极化孤子相互吸引，但很微弱，例如，当两孤子中心间距 20 cm 时，大约要用 15 min 的时间吸引到它们严重重叠的程度”，“反相孤子将排斥到相距 12 cm 的状态稳定下来”。文献〔65，66〕对这一问题作了理论分析，但根据实验结果来看，要更好地解释实验，还须作进一步分析，并与本章分析结合起来。基于微扰变分法[67~69]，这里给出了作者对两孤波相互作用的解析分析[70]，初步解释了部分实验现象。当然，应该指出，水槽中流体孤波相互作用是十分有趣，而又极其复杂的领域，对它的理论研究工作还有待于进一步改进。

5.1.1　双孤波相互作用的微扰变分耦合方程及其解

Larraza 和 Puttermzn 利用多重尺度技术，给出水槽中孤子的演化方程(即式(4.62))

$$\mathrm{i}2\omega\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-c^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{(\omega_1^2-\omega^2)\varphi_1}{2}-A|\varphi_1|^2\varphi_1=0 \tag{5.1}$$

式中，$c^2=g[T+kd(1-T^2)]/(2k)$，$A=k^4(6T^4-5T^2+16-9T^{-2})/8$，$\omega_1^2=kgT$，$k=\pi/b$，$T=\tanh(kd)$，$b$、$d$ 分别为水槽宽度和水的深度，g 为重力加速度。自由水面相对静止水面的高度 $\zeta(x,\ y,\ t)$ 由下式确定：

$$\begin{aligned}\zeta(x,\ y,\ t)=\frac{1}{g}\Bigg\{&[-\mathrm{i}\omega\varphi_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\cos ky+\mathrm{c.c.}]\\&+\left[\frac{1}{2}k^2|\varphi_1|^2(T^2+1)\cos 2ky+\frac{1}{2}k^2|\varphi_1|^2(T^2-1)\right]\\&-\left[\frac{k^2}{4}\left(\frac{3}{T^2}-1\right)\varphi_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}\cos 2ky+\mathrm{c.c.}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.2}$$

作归一化变换

$$\tau = -\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega t}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{c^2}} \cdot x$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2(\omega_1^2 - \omega^2)}{A\psi}} \tag{5.3}$$

式 (5.1) 可化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2|\psi|^2\psi = 0 \tag{5.4}$$

式 (5.4) 有一般单孤子解

$$\psi(\xi,\ \tau) = 2a\mathrm{sech}[2a(\xi - v\tau)]\exp\left\{\mathrm{i}v\frac{\xi}{2} - \mathrm{i}\left[(1-4a^2) + \frac{v^2}{4}\right]\tau\right\} \tag{5.5}$$

当 $a = 1/2$ 且 $v = 0$ 时，即为非传播孤波解。

按照 Anderson 等人[67] 的处理方法，把双孤波解看成是充分远离的单孤波解的线性叠加，即:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{5.6}$$

$$\psi_k = 2a_k\mathrm{sech}[2a_k(\xi - \xi_k)]\exp[\mathrm{i}2b_k(\xi - \xi_k) + \mathrm{i}\varphi_k - \mathrm{i}\tau] \qquad (k = 1,\ 2) \tag{5.7}$$

试探解式 (5.7) 中的 $a_k(\tau)$, $b_k(\tau)$, $\xi_k(\tau)$ 和 $\varphi_k(\tau)$ 都是时间的慢变函数，并由后面将给出的它们之间的非线性耦合方程确定。因此，式 (5.6) 并不是通常意义下简单的线性叠加。显然，当 $2a_k = 2a$, $2b_k = v/2$, $-2b_k\xi_k(\tau) + \varphi_k(\tau) - \tau = -\{(1-4a^2) + v^2/4\}\tau$ 时，式 (5.7) 即为单波解式 (5.5)，当双孤波之间存在相互作用时，各参数不再满足上述关系。把式 (5.6) 代入式 (5.4) 并按文献〔71〕方式分离（这种分离方式是为使方程式 (5.8) 近似可积，近似可积是指对 T_{lk} 求变分时，在忽略对 ψ_l 的依赖后，式 (5.8) 是可积的），从而能得到下面的式 (5.11)，得到描述两孤子重叠时相互作用的耦合方程:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} - \psi_k + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} + 2|\psi_k|^2\psi_k = -2T_{lk} \\ &T_{ik} = \psi_l^*\psi_k^2 + 2\psi_1|\psi_k|^2 \qquad l \neq k \quad l,\ k = 1,\ 2 \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

式中，T_{lk} 将作为微扰项处理。为研究式 (5.7) 中四参量对时间的慢变演化，将式 (5.8) 转化为变分形式，其 Lagrangian 量可写成

$$L = \iint (L_I + L_C)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{5.9}$$

式中:

$$L_I = \sum_{k=1,2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\psi_k^*\frac{\partial \psi_k}{\partial_\tau} - \psi_k\frac{\partial \psi_k^*}{\partial_\tau}\right) - |\psi_k|^2 - \left|\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi}\right|^2 + |\psi_k|^4\right] \tag{5.10}$$

$$L_C = 2(\psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2)(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \tag{5.11}$$

在得到 L_C 的变分运算中已忽略了 T_{lk} 对 ψ_l 的依赖，L_I 为双独立孤波解的 L 量。为计算 L_C，作如下近似约定和符号规定:

$$\left.\begin{array}{ll} |a_1 - a_2| \ll a & |b_1 - b_2| \ll b \\ |a_1 - a_2|\Delta \ll 1 & a\Delta \gg 1 \\ |b_1 - b_2|\Delta \ll 1 & \end{array}\right\} \tag{5.12}$$

式中:

$$\begin{aligned} &a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \qquad b_0 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \\ &\Delta = \xi_1 - \xi_2 \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \\ &\beta = 2b\Delta + \Delta\varphi \end{aligned} \tag{5.13}$$

将式 (5.7) 代入式 (5.9) ~ (5.11)，得

$$L = \int [\langle L_I \rangle + \langle L_C \rangle]\,\mathrm{d}\tau \tag{5.14}$$

式中:

$$\langle L_I \rangle = \int L_I \mathrm{d}\xi = \sum_{k=1,2}\left[-4a_k\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}\tau} + 8a_k b_k\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}\tau} - 16b_k^2 a_k + \frac{16}{3}a_k^3\right] \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \langle L_C \rangle = \int L_C \mathrm{d}\xi = 4\times 16\int [&a_1^3 a_2 \operatorname{sech}^3 Z_1 \operatorname{sech} Z_2 \\ &+ a_2^3 a_1 \operatorname{sech}^3 Z_2 \operatorname{sech} Z_1]\cos[\Delta\varphi + 2b_1\xi_1 - 2b_2\xi_2 + 2(b_2 - b_1)\xi]\,\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{5.16}$$

式中，$Z_k = 2a_k(\xi - \xi_K)$，$k = 1, 2$。对式 (5.14) 施行参数变分:

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi_k} = 0 \Rightarrow 4\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial\langle L_C\rangle}{\partial\varphi_k}, \tag{5.17}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \xi_k} = 0 \Rightarrow 8\frac{\mathrm{d}(a_k b_k)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\langle L_C\rangle}{\partial\xi_k} \tag{5.18}$$

$$\frac{\delta L}{\delta b_k} = 0 \Rightarrow 8a_k\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}\tau} - 32a_k b_k = -\frac{\partial\langle L_C\rangle}{\partial b_k}, \tag{5.19}$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_k} = 0 \Rightarrow 8b_k\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}\tau} - 4\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}\tau} - 16b_k^2 + 16a_k^2 = -\frac{\partial\langle L_C\rangle}{\partial a_k} \tag{5.20}$$

充分利用近似约定式 (5.12) 并忽略积分中的相对小量，可得

$$\langle L_C \rangle \approx 4\times 64a^3\cos\beta\,\mathrm{e}^{-2a\Delta} \tag{5.21}$$

在计算 $\partial\langle L_C\rangle/\partial b_k$，$\partial\langle L_C\rangle/\partial a_k$ 时，需考虑对 b_k 或 a_k 求导后在积分号下出现的与 $(\xi - \xi_k)$ 乘积项的贡献，例如:

$$\frac{\partial\langle L_C\rangle}{\partial b_1}\approx 4\times 32a^4\sin\beta\cdot I \tag{5.22}$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{8\times 2}{[\mathrm{e}^{2a_1(\xi-\xi_1)}+\mathrm{e}^{-2a_1(\xi-\xi_1)}]^3[\mathrm{e}^{2a_2(\xi-\xi_2)}+\mathrm{e}^{-2a_2(\xi-\xi_2)}]}+\frac{8\times 2}{[\mathrm{e}^{2a_1(\xi-\xi_1)}+\mathrm{e}^{-2a_1(\xi-\xi_1)}][\mathrm{e}^{2a_2(\xi-\xi_2)}+\mathrm{e}^{-2a_2(\xi-\xi_2)}]^3}\right\}\cdot(\xi-\xi_1)\mathrm{d}\xi$$

利用近似约定式(5.12)可知，积分号下第一项远小于第二项，且可作如下近似，并令 $z=\xi-\xi_1$，

$$I\approx 32\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2)}z\mathrm{e}^{6a\xi_2-6a\xi_1}\frac{\mathrm{d}z}{(\mathrm{e}^{2az}+\mathrm{e}^{-2az}\cdot C_1^2)^3\mathrm{e}^{-2az}}$$

$$\approx\frac{16}{a^2}\mathrm{e}^{-2a\Delta}-\frac{64\Delta}{a}\mathrm{e}^{-2a\Delta} \tag{5.23}$$

式中，$C_1^2=\mathrm{e}^{-4a(\xi_1-\xi_2)}=\mathrm{e}^{-4a\Delta}$；同理，可得 $\partial\langle L_C\rangle/\partial b_2$ 和 $\partial\langle L_C\rangle/\partial a_k$。将式(5.21)、式(5.22)代入式(5.17)～式(5.20)，再合并 $\mathrm{i}a_k+b_k$，有:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}a_k+b_k)}{\mathrm{d}\tau}=(-1)^k 64a^3\mathrm{e}^{i\beta-2a\Delta} \tag{5.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}\tau}=4b_k-8a\sin\beta\mathrm{e}^{-2a\Delta}+32a^2\Delta\sin\beta\mathrm{e}^{-2a\Delta} \tag{5.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}\tau}=4(b_k^2+a_k^2)-16ab\sin\beta\mathrm{e}^{-2a\Delta}+64a^2b\Delta\sin\beta\mathrm{e}^{-2a\Delta}+96a^2\sin\beta\mathrm{e}^{-2a\Delta}-64a^3\Delta\cos\beta\mathrm{e}^{-2a\Delta} \tag{5.26}$$

式(5.25)等号右端第二项，式(5.26)等号右端第三项、第五项是文献〔70〕中所遗漏的，且式(5.23)右端第一项符号差异导致了式(5.25)等号右端第二项和式(5.26)中相关项与文献〔70〕的差异。不过，这些差异只影响 ξ_k、φ_k 本身，对其差值 $\xi_1-\xi_2$ 和 $\varphi_1-\varphi_2$ 不产生影响。由式(5.24)中二项相加可得 $\mathrm{i}(a_1+a_2)+(b_1+b_2)=\mathrm{const}$，因此:

$$2a=a_1+a_2=\mathrm{const} \tag{5.27}$$

$$2b'=b_1+b_2=\mathrm{const} \tag{5.28}$$

利用式(5.27)、式(5.28)，从式(5.25)、式(5.26)中分别得到:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\tau}=-4(b_2-b_1) \tag{5.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\varphi}{\mathrm{d}\tau}=8a(a_2-a_1)+8b(b_2-b_1) \tag{5.30}$$

通过对 $X=Na^2\mathrm{e}^{i\beta-2a\Delta}$ 求导，再利用式(5.24)、式(5.29)和式(5.30)，可得 $Y=\mathrm{i}(a_1-a_2)+(b_2-b_1)$ 的关系式

$$Y^2-32a^2\mathrm{e}^{i\beta-2a\Delta}=M^2=\mathrm{const} \tag{5.31}$$

式中，$N=32$ 是比较系数而得。再由式 (5.24) 和式 (5.31) 可得 Y 的方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\tau}=4a[Y^2-M^2] \tag{5.32}$$

式 (5.32) 有解

$$Y=-M\tanh[4Ma\tau+\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2] \tag{5.33}$$

将 $(b_2-b_1)=\mathrm{Re}(Y)$ 代入式 (5.29)，容易解出

$$\Delta(\tau)-\Delta(0)=\frac{1}{2a}\ln\frac{\cosh[8ap\tau+2\alpha_1]+\cos[8aq\tau+2\alpha_2]}{\cosh 2\alpha_1+\cos 2\alpha_2} \tag{5.34}$$

式中:

$$\mathrm{i}q+p=M=\mathrm{i}\sqrt{2}4ae^{\mathrm{i}\beta/2-a\Delta} \tag{5.35}$$

考虑到实验中的对称性，两孤波的幅度及移动速度相等，即 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$。当两孤波从静止开始移动，即 $b_1=b_2=0\Rightarrow b'=0$，于是式 (5.34)，式 (5.35) 变成 ($\alpha_1=0$，$\alpha_2=0$):

$$\Delta(\tau)-\Delta(0)=\frac{1}{2a}\ln\frac{\cosh[8ap\tau]+\cos[8aq\tau]}{2} \tag{5.36}$$

$$\mathrm{i}q+p=\mathrm{i}4\sqrt{2}ae^{i\Delta\varphi(0)/2-a\Delta(0)} \tag{5.37}$$

式中，$\Delta(0)=\xi_1(0)-\xi_2(0)$，$\Delta\varphi(0)=\varphi_2(0)-\varphi_1(0)$。式 (5.36) 给出双孤波相互作用时孤波间距的时间演化。

5.1.2 同相和反向极化孤波的相互作用

实验中已观察到同相极化和反相极化孤波，对于初始状态同相极化时，$\Delta\varphi(0)=0$，因此

$$\Delta(\tau)-\Delta(0)=\frac{1}{a}\ln\left[\left|\cos\left(16\sqrt{2}a^2\mathrm{e}^{-a\Delta(0)}\tau\right)\right|\right] \tag{5.38}$$

上式代表双孤波随时间的周期性合并，这种现象已在 Wu 等人的实验中观察到，合并周期为

$$T_p=\frac{\pi\exp[a\Delta(0)]}{8\sqrt{2}a^2} \tag{5.39}$$

从两孤波相距$\Delta(0)$开始到第一次合并($\Delta(\tau)=0$)所历时间为

$$\tau_1=\frac{1}{\sqrt{2}16a^2}\mathrm{e}^{a\Delta(0)}\arccos[\mathrm{e}^{-a\Delta(0)}] \tag{5.40}$$

在实验条件下，显然 τ_1 和 T_p 对初始幅度 a 及间距 $\Delta(0)$ 非常敏感。然而，仅根据文献〔36〕中的叙述，要精确地确定孤波的初始幅度 a 是困难的。目前，理论研究还未能使幅值的理论值与实验值很好地符合。例如，文献〔36〕中给出的孤波经验波形（实验）

$$\zeta(x,y,t)=[2.8\mathrm{e}^{-1.1y}-0.70]\,\mathrm{sech}\left(\frac{x}{1.12}\right)\cdot\cos(2\pi\times 5.1t)\quad(\mathrm{cm}) \tag{5.41}$$

与文献〔39〕的理论结果（取 $f=5.1$ Hz 时），即与式 (5.2) 比较，存在很大的出入。因

此，对于初始 a 值只能作出估计。结合式 (5.2) 与式 (5.41)，在 $y=0$ 处式 (5.2) 中的幅值近似为基波 (0, 1) 模幅值 A_1 与二次谐波 (0, 2) 模幅值 A_2 之和 A_1+A_2，在 $y=B$ 处近似为二者之差 A_1-A_2。但按照式 (5.41)，在 $y=0$，$y=b$ 处幅值分别为 2.1 和 0.53，由此近似确定 $A_1=1.32$，$A_2=0.78$。再利用式 (5.2)，并经尺度变换式 (5.3)，可近似确定 $a\approx 0.82$。若将此值作为初值代入式 (5.40)，并按照实验取孤波初始间距为 20 cm[36]，再利用归一化变换式 (5.3)，可得第一次合并时间 t_1。即当 $f=5.1$ Hz 时，$t_1=21.8$ min; 当 $f=5.2$ Hz 和 5.32 Hz 时，$t_1=7.6$ min 和 2.3 min，由于 $a=0.82$ 是从 $f=5.1$ Hz 的拟合曲线式 (5.41) 得到的，而 τ_1 对 a 又极为敏感，因此，对于 $f=5.2$ Hz、5.32 Hz 是很不适宜的。根据式 (5.41) 和文献〔36〕中的图 4 所提供的 f 在 5.1 Hz 到 5.32 Hz 之间，这时实验值 (大约 15 min) 恰好在这里所给估计值之间，因此，采用微扰变分理论作出的分析在一定程度上解释了现有的实验结果。

由于作为本章基础的式 (5.1)、式 (5.2) 和式 (5.5) 与现有实验[36]尚有某些偏离，二次谐波的作用被忽略以及微扰变分法在两孤波严重重叠时带来的误差都是需要进一步研究和改善的地方。但需强调指出：由于合并周期的时间主要花费在孤波相距较远时的漫长距离上，在这个距离上，式 (5.12) 中的假设 $a\Delta\gg 1$ 是成立的；随着 Δ 减小，孤波加速合并，因此在近距离上花费的时间极短，因而本文所得合并周期值式 (5.39) 能反映周期的实际值。

当两孤波初始状态反相极化时，$\Delta\varphi(0)=\pi$，这时

$$\Delta(\tau)-\Delta(0)=\frac{1}{a}\ln[\cosh(16\sqrt{2}a^2e^{-a\Delta(0)}\tau)\tag{5.42}$$

上式代表孤波一致单调地远离。但 Wu 等人的实验并没有也不可能观察到这种一致远离，而是看到两孤波排斥到相距到 12 cm 处稳定下来。这时，由于槽是有限长的，两端壁对孤波的排斥起到阻碍作用，当排斥力被两端壁的作用抵消时，形成一种新的稳定模式。可以计算端壁作用于孤波的力。在稳定时，它与孤波排斥力等值反向，因此

$$F=\frac{1}{2}\frac{d^2\Delta(\tau)}{d\tau^2}=256a^3e^{-2a\Delta}\tag{5.43}$$

将稳定距离代入上式即可确定端壁的作用力。同相孤波间的吸引力随 Δ 的变化规律也由式 (5.43) 给出，只是方向相反 (应加一负号)。

设 $r'=\frac{1}{2}\Delta$ 为孤波距槽中心的距离，则可引入相互作用势能

$$U(r)=-\int_0^r F(\Delta)dr'=\mp 64a^2[1-e^{-4ar}]\tag{5.44}$$

这就是双孤波中每一个孤波为对方提供的斥力 (−) 和引力 (+) 势。

总结如下，前面 (摘自作者论文献〔71〕) 针对 Wu 等人所观察到的水槽孤波相互作用现象，给出了微扰变分解析分析，所得结果初步解释了同相极化孤波相互吸引而周期性地合并，反相孤波相互排斥而远离，并指出由于槽两端壁的钉扎效应 (Pinning Effects) 使

反相孤波间的斥力作用得以平衡，从而形成稳定的双非传播孤波模式。本章给出了同相孤波的第一次合并时间及合并周期，以及同相、反相孤波间的相互作用力及相互作用势，这为水槽非传播孤波相互作用提供了形象的粒子描述。但由于目前非传播孤波理论不能完满地解释全部实验，尤其前面所依赖的式 (5.1)、式 (5.2) 和式 (5.5) 与实验还存在某种偏离。因此，这里只能在时间数量级上对实验作出一定到解释，如何完善基础理论和孤波间相互作用的精确分析，将是值得进一步探讨的课题。

5.2　倾斜水槽中的孤波

5.2.1　倾斜水槽中孤波传播的能量分析法

Wu 等人在实验中发现，当水槽沿长度方向略为倾斜时，孤波将向浅水方向移动，且当斜度为 $\beta=0.05$ 时，孤波的平均速度约为 0.05 cm／s。本节针对 Wu 等人所观察的现象，从能量观点出发对此作出分析和估计。结果表明，这种方法不但可以解释孤波移动的原因，并且得到了与实验大致吻合的估计平均速度值。

当水槽沿 x 方向按斜度 β 倾斜时，前面的控制方程仍适用。若底面方程为 $z=h(x,y)$，则边界条件是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}=\cos\theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0$$

θ 为 $\mathbf{n}$ 与 z 轴之夹角，因此方括号为零即是边界条件，对于 $h(x,\ y)=-d_0+\beta x$，边界条件为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

显然，对式 (4.45)、式 (4.58)、式 (4.60) 及上式求解比平底情况复杂得多。考虑到能量变分稳定的特点，这里用解式 (4.64) 作为速度势零级近似来确定当波峰传到 x_0 点时 (见图 5−1)系统的总能量。这时式 (4.64) 中的 d 自然应用 $d=d_0-\beta x_0$ 代之，它表示波峰在 x_0 时水的深度。由于在小振幅情况下，动能与重力势能相等[72]，因此波峰位于 x_0 时，动能势能之和为

$$E(x_0)=\langle\int(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V\rangle\approx\rho\langle\int[\varphi_y^2+\varphi_z]\mathrm{d}V\rangle$$

$$\approx\rho\langle\iint\Big[\varphi_1^2\sin^2ky\cdot k^2\ \frac{\cosh^2k(z+d)}{\cosh^2kd}(2\cos\omega t)^2$$

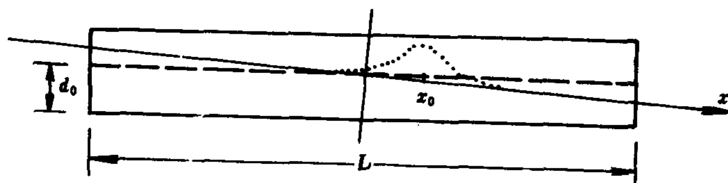


图 5−1　槽倾斜时孤波向浅水移动

$$+\varphi_1^2\cos^2 ky\cdot k^2\frac{\sinh^2 k(z+d)}{\cosh^2 kd}(2\cos\omega T)^2\bigg]\mathrm{d}V\rangle$$

$$\approx 2\rho k^2 b\langle\left(\int_{-L/2}^{L/2}\varphi_1^2 I(x)\mathrm{d}x\right)2\cos^2\omega t\rangle \tag{5.45}$$

式中，"〈 〉"表示周期平均，上式中最后一个等式用到以下公式:

$$\int_0^b \cos^2 ky\mathrm{d}y=\int_0^b \sin^2 ky\mathrm{d}y=\frac{1}{2}b$$

$$I(x)=\frac{1}{2}\int_{-(d_0-\beta x)}^{\xi(x,\ y,\ t)}\frac{\sinh^2 k(z+d)+\cosh^2 k(z+d)}{\cosh^2 kd}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4k}\frac{\sinh 2kd+2k(\cosh 2kd)\cdot\xi(x,\ y,\ t)-\sinh 2k\beta(x-x_0)}{(\cosh kd)^2}$$

$$\approx\frac{1}{4k}\frac{\sinh 2kd-\sinh 2k\beta(x-x_0)}{(\cosh kd)^2}$$

上面用到 $\sinh 2k(\xi+d)$关于 ξ 的展开式，并注意 $d=d_0-\beta x_0$ 和含有 $\xi(x,\ y,\ t)\approx\xi_1(x)\cos ky e^{i\omega t}+\text{c.c.}$ 的项与 $\cos^2\omega t$ 乘积的周期平均为零，因此 $I(x)$与 y 无关且

$$E(x_0)=\frac{1}{2}\rho kb\frac{\sinh 2kd}{\cosh^2 kd}I_2(x_0)-\frac{1}{2}\rho kb\frac{1}{\cosh^2 kd}I_{2s}(x_0) \tag{5.46}$$

式中:

$$I_2(x_0)=\int_{-L/2}^{L/2}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{A}\sqrt{c^2(\omega_1^2-\omega^2)}\left[\tanh\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\left(\frac{L}{2}-x_0\right)\right.$$

$$\left.+\tanh\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\left(\frac{L}{2}+x_0\right)\right] \tag{5.47}$$

$$I_{2s}(x_0)=\int_{-L/2}^{+L/2}\varphi_1^2(x)\sinh 2k\beta(x-x_0)\mathrm{d}x \tag{5.48}$$

因此:

$$\frac{\mathrm{d}E(x_0)}{\mathrm{d}x_0}=\frac{1}{2}\rho kb\left[\frac{\mathrm{d}I_2(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\frac{\sin 2kd}{\cosh^2 kd}+I_2(x_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\left(\frac{\sinh 2kd}{\cosh^2 kd}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\rho kb\left[\frac{\mathrm{d}I_{2s}(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\frac{1}{\cosh^2 kd}+I_{2s}(x_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\frac{1}{\cosh^2 kd}\right] \tag{5.49}$$

$$\frac{\mathrm{d}I_2(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\approx 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\left[\frac{1}{A}\sqrt{c^2(\omega_1^2-\omega^2)}\right]\cdot\left[\tanh\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\left(\frac{L}{2}-x_0\right)\right.$$

$$+\tanh\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\left(\frac{L}{2}+x_0\right)\Bigg]$$

$$+\frac{4}{A}(\omega_1^2-\omega^2)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\operatorname{scch}^2\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\left(\frac{L}{2}+x_0\right)\right\}_{x_0=0}\cdot x_0 \tag{5.50}$$

根据式 (5.48)，令 $f(x-x_0)=\varphi_1^2(x)\sinh 2k\beta(x-x_0)$，则

$$I_{2s}(x_0)=\int_{-L/2}^{L/2}f(x-x_0)\mathrm{d}x\approx\int_{-L/2}^{L/2}[f(x)-f'(x)\cdot x_0]\,\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 是奇函数，上式第一项为零，因此

$$I_{2s}(x_0)\approx-2x_0\varphi_1^2\left(x_0+\frac{L}{2}\right)\sinh\left(\frac{2k\beta L}{2}\right) \tag{5.51}$$

$$\frac{\mathrm{d}I_{2s}(x_0)}{\mathrm{d}x_0}=-2\sinh\left(\frac{2k\beta L}{2}\right)\left[\varphi_1^2\left(x_0+\frac{L}{2}\right)+x_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\varphi_1^2\left(x_0+\frac{L}{2}\right)\right] \tag{5.52}$$

因此，在 $x_0\approx 0$ 附近有：

$$I_2(x_0)\approx\frac{4}{A}\sqrt{c^2(\omega_1^2-\omega^2)}\tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\frac{L}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}I_2(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\approx 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\left[\frac{1}{A}\sqrt{c^2(\omega_1^2-\omega^2)}\right]\tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\frac{L}{2}\right)$$

$$I_{2s}(x_0)\approx 0$$

$$\frac{\mathrm{d}I_{2s}(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\approx-2\varphi_1^2(x_0+L/2)\sinh\left(\frac{2\beta kL}{2}\right)$$

综合起来并用恒等式 $\sinh 2kd/\cosh^2 kd=2T$，有

$$\frac{\mathrm{d}E(x_0)}{\mathrm{d}x_0}=\rho kb\left\{4\frac{1}{A}\sqrt{c^2(\omega_1^2-\omega^2)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_0}\right.$$

$$\left.+4T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\left[\frac{1}{A}\sqrt{c^2(\omega_1^2-\omega^2)}\right]\right\}\cdot\tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\frac{L}{2}\right)$$

$$+2\rho kb\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\cosh^2 kd}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{c^2}}\frac{L}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{2k\beta L}{2}\right) \tag{5.53}$$

下面再考虑表面张力势能，由于表面张力做功 $\delta W=\sigma\delta S$，因此

$$E_{\mathrm{PS}}=\left\langle\iint\sigma(\mathrm{d}S-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\right\rangle=\sigma\left\langle\iint[\sqrt{1+\xi_x^2+\xi_y^2}-1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\rangle$$

$$\approx\frac{1}{2}\sigma\iint\langle\xi_x^2+\xi_y^2\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}y\approx\frac{1}{2}\sigma k^2 b\left(\frac{\omega}{g}\right)^2\int_{-L/2}^{L/2}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sigma\omega^2 k}{2\rho g^2 T}\left[\frac{1}{2}\rho kb\frac{\sinh 2kd}{\cosh^2 kd}I_2(x_0)\right] \tag{5.54}$$

由于式 (5.46) 中的第一项（也就是上式中 [・] 部分）远远大于第二项，同时因 $\sigma\omega^2 k/2\rho g^2 T \ll 1$，因此，$E_{PS} \ll E(x_0)$，所以表面张力势能可以忽略不计。

Wu 等人的实验条件是 $b=2.54$ cm，$d_0=2.0$ m，$f=5.1$ Hz，即 $\omega=10.2\pi$，$\rho\approx 1$，$L=38$ cm，若分别取 $\sigma=(0,\ 25,\ 50)\times 10^{-5}$ N／cm，可分别得 $\mathrm{d}E_0/\mathrm{d}x_0=-90.3\beta$，$-70.6\beta$，$-58.5\beta$。可见，$\mathrm{d}E_0/\mathrm{d}x_0<0$，这表示波将向 $x_0>0$ 的方向，即向浅水方向移动。

对波移动的平均速度可作如下估计。由于水槽的有限长度和水的不可压缩性，质量守恒条件是

$$M_F=\int_{-L/2}^{l/2}\int_0^b\int_{-(d_0-\beta x)}^{\xi(x,\ y,\ t)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^b[\xi(x,\ y,\ t)+d_0-\beta x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

显然式 (4.64) 是不满足上式的。事实上，表面上的孤波移动，会引起流体内部的响应，使质量保持守恒。如果认为这种响应遍及流体内部，且其平均速率（方向可能各不相同）与波的平均速率基本一致，则可估计波峰在 x_0 附近时的速率 v，由 $Mv^2/2=\Delta E$，可得

$$V^2(x_0)=2M^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x_0}\right|_{x_0=0}\cdot x_0=2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x_0}\frac{x_0}{M}$$

孤波从 $x_0=0$ 到 $x_0=x$ 时，经历时间是

$$\Delta t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x_0}{v(x_0)}=\frac{2x}{v(x)}$$

因此，在此期间孤波的平均加速度和平均速度是：

$$\bar{a}=\frac{v(x)}{\Delta t}=\frac{1}{M}\frac{dE_0}{dx_0}$$

$$\bar{v}(x)=\frac{x}{\Delta t}=\frac{1}{2}v(x) \tag{5.55}$$

如果 M 取为流体总质量 M_F，由 b，d，L 的实验值，可得 $M=M_F=193\rho\approx 193g$，$\beta=0.05°=0.008\,75$。若测量点设置在 $x=0$ 及 $x=5.0$ cm 处，则相应于 $\sigma=(0,\ 25,\ 50)\times 10^{-5}$ N／cm 的平均速度分别是 $\bar{v}=(0.032,\ 0.028,\ 0.026)$ cm／s。如果设置在 $x=0$ 和 $x=1.0$ cm (注意到式 (5.55) 适应范围只是 $x=0$ 附近，因此 x 值过大时上面结论是需要修正的)，则平均速度分别是 $\bar{v}=(0.014\,3,\ 0.012\,6,\ 0.011\,5)$ cm／s。如果认为测量在 $x=0$ 到 $x=5.0$ 之间进行，并认为 $\sigma=25\times 10^{-5}$ N／cm，则孤子质量应为 $M=M_F/3.2=60\ g$ 时，$\bar{v}$ 才与实验值 0.05 cm／s 相符，根据文献〔43〕，Wu 等人实验中的 σ 估计为 $(15\sim 50)\times 10^{-5}$ N／cm。

对 M 这样处理的理由是，波的移动将引起流体内部质点在长度方向的响应，因为要

保证质量守恒，作为估计，假定流体内部的响应速度与孤波移动速度大体一致。从上面与实验结果的比较中可以看到，估计值较实验值过小。这说明在 Wu 的实验中孤波的移动，的确引起了几乎约三分之一流体的响应。因为水槽很长，参与响应的流体就不会是全部流体，即只有孤波附近的流体的平均响应速度才和波的平均速度一致，参与响应的流体质量虽然不是孤波的质量 M，但由于这些响应是孤波移动引起的，它们必将对孤波移动有一种反作用，阻止孤波状态发生变化，因而使孤波在效果上表现出惯性，因此，可看成是孤波的等效惯性质量。

应该强调，影响孤波速率的因素之一是水槽的有限长度使两端壁的影响不容忽视，实验报道说[36]，当水槽严格水平时，单孤波能稳定于中心达数小时之久，双反相孤子并不单调地排斥，而是排开不很长距离后稳定下来；此外，还应考虑波阻及激励。

本节的分析只适应于微倾斜情况，在 β 较大时其不适应性是显然的。同时，由于没有考虑端壁对孤波加速度的抑制作用，即作了无限长假设，因此它只适应于原点即水槽中心附近非常小的区域，并假定孤波初始态静止于原点。在这种近似下，由式(5.55)可见，无论孤波从原点移到何点，这个过程的平均加速度是不变的，在 $x=0$ 附近的平均速度估计值大致与实验吻合。

5.2.2　倾斜水槽中的孤波方程

水槽如图 5–1 所示倾斜时，边界条件是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad y=0,\ b \tag{5.56}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad z=-d_0+\beta x \tag{5.57}$$

这里的底面方程是 $z=-d_0+\beta x$，寻求满足下列尺度的解:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\frac{\xi_{\max}}{W}=O(\varepsilon)\\&\frac{\beta}{k}=O(\varepsilon)\\&\frac{\beta\cdot L/2}{d}=O(\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{5.58}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1^2-\omega^2=\omega^2O(\varepsilon) \qquad &&\frac{\partial\xi_1}{\partial t_1}=\omega\xi_1O(\varepsilon^2)\\&\frac{\xi_x}{\xi_y}=O(\varepsilon) &&\frac{\xi_x}{\xi_z}=O(\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{5.59}$$

L代表槽长，W代表孤波特征宽度，式 (5.58) 和式 (5.59) 意味着:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\\&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

因此满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi=0$$

及边界条件式 (5.56)、式 (5.57) 和摄动条件式 (5.58)、式(5.59) 式的解可写为:

$$\begin{aligned}\varphi=&\cos ky\frac{\cosh k(z+d_0-\beta x)}{\cos kd}\left[\varphi_1 e^{i\omega t}+\text{c.c.}\right]\\&+\left\{\cos 2ky\frac{\cosh 2k(z+d_0-\beta x)}{\cosh 2kd}\left[\varphi_2 e^{i2\omega t}+\text{c.c.}\right]\right.\\&+\left.\cos 2ky\frac{\cosh 2k(z+d_0-\beta x)}{\cosh 2kd}\varphi_2^{(0)}+\left[\varphi_0^{(2)}e^{i2\omega t}+\text{c.c}\right]\right\}\\&+\left\{\frac{\sinh(z+d_0-\beta x)}{\cosh kd}\left[\frac{\beta}{k+\beta^2 k}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}e^{i\omega t}+\text{c.c}\right]\cos ky\right.\\&-\frac{1}{2k}\frac{\cos ky}{\cosh kd}\left[z\cdot\sinh k(z+d_0-\beta x)-(d_0-\beta x)e^{-k(z+d_0-\beta x)}\right]\\&\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}e^{i\omega t}+\text{c.c.}\right]\\&-\frac{2}{2k}\frac{\cos ky}{\cosh kd}\left[-\beta kz\cdot\cosh k(z+d-\beta x)-(d_0-\beta x)k\beta e^{-k(z+d_0-\beta x)}\right.\\&\left.+\beta e^{-k(z+d_0-\beta x)}\right]\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}e^{i\omega t}+\text{c.c.}\right]-\frac{1}{2k}\frac{\cos ky}{\cosh kd}\left[k^2\beta^2 z\cdot\sinh k(z+d_0-\beta x)\right.\\&\left.\left.+2k\beta^2 e^{-k(z+d_0-\beta x)}-k^2\beta^2(d_0-\beta x)\quad e^{-k(z+d_0-\beta x)}\right][\varphi_1 e^{i\omega t}+\text{c.c.}]\right\}\\&+O(\varepsilon^4)\end{aligned}\tag{5.61}$$

式中，$\varphi_1=O(\varepsilon)$，$\varphi_2=O(\varepsilon^2)$，$\varphi_0^{(2)}=O(\varepsilon^2)$，$\varphi_2^{(0)}=O(\varepsilon^2)$，$d=d_0-\beta x$。第二个{·}中后三项是由倾斜底面而得。将式 (5.61) 代入式 (4.60)，分离各级量，可分别得到 $O(\varepsilon)$、$O(\varepsilon^2)$，$O(\varepsilon^3)$级的方程。上式第二个{·}中的第一项对 $O(\varepsilon^3)$ 级方程的贡献是

$$g(-c_2^2\varphi_{1xx})+(i\omega)(i\omega c_1^2\varphi_{1xx})=-c^2\varphi_{1xx}\tag{5.62}$$

其它三项的贡献依次是:

$$g\left(k\frac{\beta}{k+\beta^2 k}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+i\omega\left(\frac{\beta}{k+\beta^2 k}Ti\omega\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\approx b_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}&g\left(-\frac{1}{k}\left[-\beta k+\frac{\beta dk^2 e^{-kd}}{\cosh kd}-\frac{\beta ke^{-kd}}{\cosh kd}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\\&\qquad+i\omega\left(-\frac{1}{k}\left[-\frac{k\beta}{\cosh kd}+\beta\frac{e^{-kd}}{\cosh kd}\right]i\omega\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\approx b_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\end{aligned}\tag{5.64}$$

$$g\left(-\frac{1}{2k}[k^2\beta^2 T-2k^2\beta^2\frac{e^{-kd}}{\cosh kd}+k^2\beta^2 d\frac{e^{-kd}}{\cosh kd}]\varphi_1\right)$$

$$+ \mathrm{i}\omega\left(-\frac{1}{2k}\left[\frac{2k\beta^2 \mathrm{e}^{-kd}}{\cosh kd} - \frac{k^2\beta^2 d\mathrm{e}^{-kd}}{\cosh kd}\right]\mathrm{i}\omega\varphi_1\right) \approx a_1\varphi_1 \tag{5.65}$$

因此，孤波方程是

$$\mathrm{i}2\omega\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + (\omega_1^2 - \omega^2 + a_1)\varphi_1 + \mathrm{i}2\mu\omega\varphi_1 - \frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\varphi^* + (b_1 + b_2)\varphi_{1x} - c^2\varphi_{1xx} = A|\varphi_1|^2\varphi_1 \tag{5.66}$$

这里已计入了阻尼项及激励项，其中的参数分别是:

$$c = \frac{[T + kd(1 - T^2)]g}{2k}$$

$$a_1 = gk\left[-\frac{1}{2}\beta^2 + \beta^2\left(1 + T - \frac{1}{2}kd - \frac{1}{2}kdT\right)\frac{1-T}{2}\right] \tag{5.67}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= g\beta\left[1 + (1 - kd + T - kTd)\frac{1-T}{2}\right] \\ b_2 &= \frac{\beta}{k}(gk - \omega^2 T) \approx \beta g[1 - T^2] \end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

c^2 即为第 4 章中的c^2。对于 Wu 等的实验参数，$b_1 \approx g\beta[1 - 0.020\,6]$，$b_2 \approx g\beta[1 - 0.972\,0]$，$a_1$ 相对 $\omega_1^2 - \omega^2$ 可以忽略。作归一化变换:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= -\frac{a_1 + \omega_1^2 - \omega^2}{2\omega}t \\ \xi &= \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2 + a_1}{c^2}}\,x \\ \Phi &= \sqrt{\frac{A}{2(\omega_1^2 - \omega^2 + a_1)}}\,\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.69}$$

则式 (5.55) 变成

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + 2|\Phi|^2\Phi - \Phi = \alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mathrm{i}\alpha_2\Phi - \alpha_3\Phi^* \tag{5.70}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b_1 + b_1}{\sqrt{c^2(\omega_1^2 - \omega^2 + a_1)}} \\ \alpha_2 &= \frac{2\mu\omega}{\omega_1^2 - \omega^2 + a_1} \\ \alpha_3 &= \frac{kT\Delta\Omega^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2 + a_1)} \end{aligned}\right\} \tag{5.71}$$

5.2.3 倾斜水槽孤波逆散射微扰解

在式 (5.70) 中，把 α_1，α_1，α_3 当作微扰项，则可利用逆散射解[73] 进行微扰分析。为此，先将方程式 (5.70) 变换为

$$\Phi = \psi e^{-i\tau} \tag{5.72}$$

代入式 (5.70) 可得

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2\xi^2} + 2|\psi|^2\psi = \alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + i\alpha_2\psi - \alpha_3 e^{i2\tau}\psi^* \tag{5.73}$$

于是设

$$\psi = 2i\eta(\tau)\mathrm{sech}[2\eta(\xi - \gamma(\tau)]e^{-i2\lambda(\tau)\xi - i\varphi(\tau))} \tag{5.74}$$

则

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dZ\varepsilon P[\psi(Z)]\mathrm{sech}\, Ze^{i\theta}\right] \tag{5.75}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dZ\varepsilon P[\psi(Z)]\frac{\tanh Z}{\cosh Z}e^{i\theta}\right] \tag{5.76}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -4\lambda - \frac{1}{4\eta^2}\mathrm{R_e}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dZ\frac{Z\cdot \varepsilon P[\psi(Z)]}{\cosh Z}e^{i\theta}\right] \tag{5.77}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 4(\lambda^2 - \eta^2) + \frac{1}{2\eta}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dZ\frac{1-2\eta\xi\tanh Z}{\cosh Z}\varepsilon P[\psi(Z)]e^{i\theta}\right] \tag{5.78}$$

式中:

$$\theta = 2\lambda(\tau)\xi + \varphi(\tau) \tag{5.79}$$

$$Z = 2\eta(\tau)(\xi - \gamma(\tau)) \tag{5.80}$$

$$\varepsilon P[\psi(Z)] = \alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + i\alpha_2\psi - \alpha_3 e^{i2\tau}\psi^* \tag{5.81}$$

将式 (5.74) 代入式 (5.81)

$$\begin{aligned}\varepsilon P[\psi(Z)] = {} & (4\eta\lambda\alpha_1 - 2\eta\alpha_2)\mathrm{sech}\, Ze^{-i\theta} \\ & - i4\eta^2\alpha_1\mathrm{sech}\, Z\tanh Ze^{-i\theta} + i2\eta\alpha_3\mathrm{sech}\, Ze^{i2\tau}e^{i\theta}\end{aligned} \tag{5.82}$$

将上式代入式 (5.75)~ 式 (5.78)，分别得到:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -4\eta\lambda\alpha_1 + 2\eta\alpha_2 + 2\eta\alpha_3\sin(2\tau + 4\gamma\lambda + 2\varphi) \tag{5.83}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{4}{3}\eta^2\alpha_1 - \eta\alpha_3\frac{2\lambda}{\eta}\sin(2\tau + 4\lambda\gamma + 2\varphi) \tag{5.84}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -4\lambda + \frac{1}{2}\frac{\alpha_3 I}{\eta}\cdot\frac{2\lambda}{\eta}\cos(2\tau + 4\lambda\gamma + 2\varphi) \tag{5.85}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 4(\lambda^2 - \eta^2) + \alpha_3\cos(2\tau + 4\lambda\gamma + 2\varphi) + \frac{8}{3}\gamma\alpha_1\eta$$

$$+ 2\eta\alpha_3\gamma \cdot \frac{2\lambda}{\eta}\sin(2\tau + 4\lambda\gamma + 2\varphi) \tag{5.86}$$

式中:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 \text{sech}^2 Z \text{d}Z$$

在积分中用到$\frac{2\lambda}{\eta} \ll 1$，即积分中的 $\cos\left(\frac{2\lambda}{\eta}Z\right)$ 和 $\sin\left(\frac{2\lambda}{\eta}Z\right)$ 分别作 1 和$\frac{2\lambda}{\eta}Z$ 处理。

显然，一般地求解式 (5.83)～ 式 (5.86) 是很困难的。这里仅研究无损耗及激励的情况，即假设 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$，这时:

$$\frac{\text{d}\eta}{\text{d}\tau} = -4\alpha_1\eta\lambda \tag{5.87}$$

$$\frac{\text{d}\lambda}{\text{d}\tau} = -\frac{4}{3}\alpha_1\eta^2 \tag{5.88}$$

$$\frac{\text{d}\gamma}{\text{d}\tau} = -4\lambda \tag{5.89}$$

$$\frac{\text{d}\varphi}{\text{d}\tau} = 4(\lambda^2 - \eta^2) + \frac{8}{3}\alpha_1\gamma\eta^2 \tag{5.90}$$

考虑到实验中幅值几乎不变，因此可以认为 η 在 η_0 附近做微小的变化，即

$$\eta = \eta_0(1 + \eta_1) \tag{5.91}$$

作为一级近似将式第一项代入式 (5.88) 得 λ 的一级近似

$$\lambda_0 = -\frac{4}{3}\alpha_1\eta_0^2\tau \tag{5.92}$$

将 $\lambda \approx \lambda_0$ 代入式 (5.87) 可得 η 的二级近似

$$\eta = \eta_0 e^{16\eta_0^2\alpha_1^2\tau/3} \tag{5.93}$$

将式 (5.93) 代回式 (5.88) 可得 λ 二级近似

$$\lambda = \frac{1}{8\alpha_1}[1 - e^{32\eta_0^2\alpha_1^2\tau/3}] \tag{5.94}$$

由式 (5.89)，孤波速度为

$$v(\tau) = \frac{\text{d}\gamma}{\text{d}\tau} = -\frac{1}{2\alpha_1}[1 - e^{32\eta_0^2\alpha_1^2\tau/3}] \tag{5.95}$$

由式 (5.90) 可得 $\varphi(\tau)$，由于 τ 与 t 相差一负号，因而式 (5.69) 中 $(a_1 + \omega_1^2 - \omega^2)/2\omega > 0$，故式 (5.93) 代表振幅随时间衰减，式 (5.94) 或式 (5.95) 代表孤波速度随时间增加，且向浅水（正向）方向移动，其一级近似是随时间线性增加的，即匀加速运动。这与实验所观察到的几乎均速运动有很大出入，是因为三方面因素，即槽两端壁对孤波的作用、力损耗和激励都被忽略了，其大小在前面作了分析。对于 $\alpha_3 \neq 0$，$\alpha_2 \neq 0$ 时方程式 (5.83)～ 式 (5.86) 的求解有待进一步研究。

5.2.4 倾斜水槽中孤波的等价粒子分析

微扰 NLS 方程式 (5.70) 还可由第二章中给出的等价粒子理论进行分析。为简单计，只讨论 $\alpha_2=\alpha_3=0$ 的情况。设孤波解具有如下形式:

$$\psi = a\text{sech}\,[a\,(\xi-\bar{\xi}\,)\,]\,e^{i\theta(\xi,\ \tau)} \tag{5.96}$$

按照第 2 章和后面第 11 章，式 (5.70) 中$\hat{V}$ 近似为实函数

$$V=\alpha_1\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\approx-\alpha_1 a\cdot\ \tanh[\,a\,(\,\xi-\bar{\xi}\,)\,] \tag{5.97}$$

式中，已忽略了 $\partial\theta/\partial\xi$ 项，即认为 θ 是 ξ 的慢变函数。将式 (5.97) 代入质量公式和速度公式[74]，并注意式 (5.97) 是实函数，于是:

$$N\approx 2a$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{\xi}}{d\tau^2}&\approx-\frac{\partial U_L}{\partial\bar{\xi}}\\&=-4\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)|u|^2d\xi-\frac{2}{N}\left[V|\,u|^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{+\infty}^{-\infty}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)|u|^2d\xi\right]\\&=-\frac{2}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)|u|^2d\xi\\&=\frac{4\alpha_1 a^2}{3}\end{aligned} \tag{5.98}$$

因此，当 $a=a_0(1+a_1)$，$a_1(\tau)\ll 1$ 时，

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}\approx\frac{4\alpha_1 a_0^2}{3}\tau \tag{5.99}$$

$a_1(\tau)$ 的演化要通过 dN/dt 的演化方程得到。这时计算 V 的式 (5.97) 应把被忽略的项考虑进去。可以看到式 (5.99) 和式 (5.92) 给出了相同的结果，即都是匀加速向浅水方向移动。通过数值模 $\alpha_2=\alpha_3=0$ 时的式 (5.70)，也可更清楚地看到这一点。图 5－ 2 给出了一种参数情况下的演化，这里需要注意式 (5.74) 与式 (5.96) 中的幅值有对应关系 $2\eta=a$。

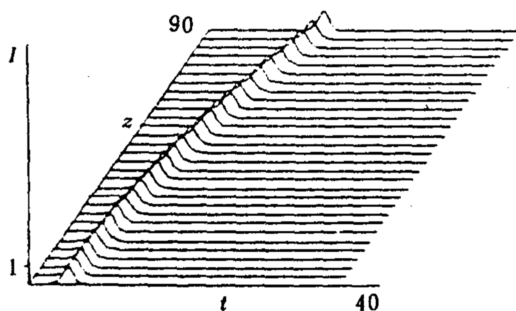


图 5－2 斜水槽水孤波移动的数值模拟($\alpha_1=0.001\,9$)

下面估算速度值，应用式 (5.69)、式 (5.95) 或式 (5.99)，实验室坐标系中速度为

$$V=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sqrt{c^2(a_1+\omega_1^2-\omega^2)}}{2\omega}v=\frac{16}{3}\eta_0^2\frac{b_1+b_2}{a_1+\omega_1^2-\omega^2}t \tag{5.100}$$

于是，$x=t^2\cdot\frac{8}{3}\eta_0^2\frac{b_1+b_2}{a_1+\omega_1^2-\omega^2}$，从 $x=0$ 到任意 x 处的平均速度为

$$\bar{V}=\frac{x}{t}=\sqrt{\frac{x}{t^2}}\sqrt{x}=\sqrt{\frac{8}{3}\eta_0^2\frac{b_1+b_2}{a_1+\omega_1^2-\omega^2}x} \tag{5.101}$$

将 $\beta=0.05°=0.000\,875$，$2f=10.2$ Hz，$\eta_0=0.82$ (见 5.2 节中的估计 $a=0.82$)，a_1 和 b_2 几乎可以忽略，于是当 $x=(0.5,\ 1,\ 5,\ 10)$ cm 时，$\bar{V}=(0.068,\ 0.096,\ 0.214,\ 0.302)$ cm/s，计算值偏大是因前面所述三方面原因所致。

总之，以上分析解释了孤波向浅水方向移动的现象，但在深入的定量分析研究中，还需考虑两端壁的影响。

5.3　参数激励多重尺度分析与小功率因数尺度

前面已提到，针对 1984 年 Wu，Keolian 和 Rundinck 在水槽中发现的非传播孤波，Larraza 和 Putterman 及 Miles 分别用不同方法导出了孤波所服从的方程与单孤波解，与实验相符较好。但 Miles 缺乏严谨的论证，Larraza 等未考虑损耗及激励的影响，因而不够完善。文献〔42〕导出了矩形槽和圆环槽中计及激励和损耗的孤波方程，弥补了前人的不足。然而，现有的理论对实验现象的解释仍存在很多的问题，尤其是在过去尺度假设所规定的参数之外很宽广的区域仍存在着孤波现象，理论上怎样把孤波方程适应的参数范围扩大，一直困扰着我们。因为 Larraza 等人给出的尺度是如此优美和恰到好处，以致于任何试图修改尺度假设或引入新尺度的人向前迈进一步。或者会犯错误，或者便一无所获。然而，我们在本节及下节，将不顾犯"牺牲严格"的错误（只有一条道路能够避免错误，那就是什么也不做)，也就是试图把过去的尺度假设认为是小量，而实际上都是较大的量，在理论量级分析上予以升级，从而得到近似的考虑。这种处理方法，并不追求理论上的严格和完美，只是要了解这些量在 Larraza 等的框架下，对孤波将产生何种影响。因此，不能指望用这种办法导出一个不同于 Larraza 框架下的新孤波方程，而只能在 Larraza 框架下，对一些因素作些考虑，不能预见新类型的孤波方程。总之，本节及下节仍是以 Larraza 框架为基础的。

本节根据实验分析，引入新的尺度假设，这是一种不很严格的近似分析，即把激励和损耗项及 $\omega^2-\omega_0^2$ 项分别作为 $O(1)$、$O(\varepsilon^{1/2})$和 $O(1)$量级处理，也得到了较好的结果，其中包含了低功率因数尺度假设。此外，通过耗散分析，给出了等振幅线和 Δ_c—曲线，初步解释了实验曲线。

5.3.1　孤波方程

考虑盛于矩形长槽中处于重力场 g 的无旋不可压缩流体，对其进行竖直方向的参数激励。设槽宽为 b，流体深度为 d，取坐标系使流体静止时所充空间为$-L/2\leqslant x\leqslant$

$L/2$, $0\leqslant y\leqslant b$, $-d\leqslant z\leqslant 0$, L 为槽长。为简单计，暂不计及表面张力。这里按照文献〔75〕的处理，把所有耗散因素的综合抑制效应用 $2\mu'\xi_t$ (μ'代表线性阻尼)项来近似，同时考虑幅度为 Δ, 频率为 Ω的竖直周期外力，这时流体运动方程可归纳为:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi=0 && -d\leqslant z\leqslant \xi(x,\ y,\ t)\\ &\varphi_z=0 && 在\quad z=-d\\ &\varphi_y=0 && 在\quad y=0,\ b \end{aligned}\right\}\tag{5.102}$$

在由自由面$z=\xi(x,\ y,\ t)$上有:

$$\varphi_z-\xi_t=\varphi_x\xi_x+\varphi_y\xi_y\tag{5.103}$$

$$g\xi+\frac{1}{2}\Delta\Omega^2[e^{i(\varphi_0+\Omega t)}+\text{c.c.}]\xi+\varphi_t+2\mu'\xi_t=-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\tag{5.104}$$

引入以下新尺度假设:

$$\omega_0^2-\omega^2=\omega_0^2O(1)\qquad \Delta\Omega^2=gO(1)\qquad 2\mu\omega=gO(\varepsilon^{1/2})\tag{5.105}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\sin(\varphi_0-2\psi)-2\mu\omega=\omega_0^2O(\varepsilon^{3/2})\\ &(\omega_0^2-\omega^2)-\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\cos(\varphi_0-2\psi)=\omega_0^2O(\varepsilon^1) \end{aligned}\right\}\tag{5.106}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=O(\varepsilon^{1/2})\frac{\partial}{\partial y}=O(\varepsilon^{1/2})\frac{\partial}{\partial z}\qquad t_1=\varepsilon t\qquad t_0=t\tag{5.107a}$$

式中，$\varepsilon=\xi_{\max}^2/W^2$ (W 为特征波长)，$\omega_0^2\approx gkT$, $T=\tanh(kd)$, $k=\pi/b$, $2\mu=2\mu'kT$, ω 为参数激励下流体的振荡频率，可近似为 $\omega\approx\Omega/2$, φ_0 为式(5.104)中的激励初相，ψ 由后面的式(5.134)定义。式(5.106)代表了低功率因数假设。在此，已把过去文献中的$\omega_0^2-\omega^2=\omega_0^2O(\varepsilon^2)$(如在文献〔46〕中)等被式(5.106)中的第二式取代了。当 $\Delta=0$ 时，式(5.106)过渡到与过去相当的尺度(作变换$\varepsilon^{1/2}\to\varepsilon$后，本节与第 4 章介绍的工作可对应起来)。这里，有必要对新尺度作进一步的说明。过去，$(\omega_0^2-\omega^2)/\omega_0^2$, $\Delta\Omega^2/g$ 及 $2\mu\omega/g$ 都是作为 $O(\varepsilon^2)$ (相当于本节的 $O(\varepsilon)$) 处理的，但若按 Wu 等的实验，取 $b=2.54$ cm, $d=2.0$ cm, $g=980\ \text{cm}/\text{s}^2$，可计算 $\omega_0^2=1\,195\text{s}^{-2}$。因此，当 $2f=10.2$ Hz 时，$\omega_0^2-\omega^2$ 可达 $168\ \text{s}^{-2}$ 即 $0.14\omega_0^2$, $\Delta\Omega^2$ 可达 $164\ \text{cm}/\text{s}^2$ (取 $2\Delta=0.08$ cm) 即 $0.17g$, 而 $2\mu\omega\approx 37\ \text{cm}/\text{s}^2$ 即 $0.04g$ (取 $\mu=0.6$, 因实验在 0.5 到 0.7 之间)。因此，现在的问题是把 0.14, 0.17 和 0.04 归属于 $O(\varepsilon^2)$ 还是 $O(1)$, 或者把前二者归于 $O(1)$ 而后者 (0.04) 归于 $O(\varepsilon^{1/2})$。本节正是采用了最后一种划分，这就是上面所述的理论量级分析中的量级升级。因为，如果说过去尺度假设中把 $(\omega_0^2-\omega^2)/\omega_0^2$ 和 $\Delta\Omega^2/g$ 作为 $O(\varepsilon^2)$ 处理不算是过小地看待它们的话。(注意：与过去的尺变方程等价是的式 (6.6)，而不是式 (6.5)。当 $A=0$ 时，式 (6.6) 过渡到过去的尺度。这时，式 (6.5) 不再有效。) 那么，把它们作为 $O(1)$ 处理不会是过大地看待它们吧！事实上，只有能够包容低功率因素假设的新尺度假设所支持的式 (5.149) 才能初步解释 $2\Delta_c$—Ω 曲线。引入新的尺度假设有两点意义：一方面可使驱

动与损耗在一级近似中得近似（仅仅是近似考虑）；同时，使理论等振幅曲线与实验能很好地吻合，尤其在 $(\omega_0^2-\omega^2)/\omega_0^2$ 和 $\Delta\Omega^2/g$ 较大的区域，如 $2f=10.2\sim10.4$ Hz 区段内，而过去的尺度只适应于这两种量较小的区域。因此，式 (6.5) 中的 $O(1)$ 只代表不是很小，而是可以达到 0.14 或 0.17 等的程度。这就是前面所说的 $O(1)$ 的特别含义。在这种意义下，后面就可以进行并不十分严格的近似分析。据此，式 (5.107a) 等价于:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots \tag{5.107b}$$

满足边界条件 (2) 和多重尺度假设式 (5.107b) 的 Laplace 方程的解是[39]

$$\begin{aligned}\varphi=&\cos ky\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)}[\varphi_1(x,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{c.c.}]\\&+\left\{\varphi_2^{(0)}(x,\ t)+[\varphi_0^{(2)}(x,\ t)\mathrm{e}^{i2\omega t}+\mathrm{c.c.}]\right.\\&\left.+\cos 2k\frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh(2kd)}[\varphi_2(x,\ t)\mathrm{e}^{i2\omega t}+\mathrm{c.c.}]\right\}\\&+\left\{-\frac{1}{2k}\frac{\cos ky}{\cosh kd}[z\sinh k(z+d)-d\mathrm{e}^{-k(z+d)}]\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{c.c.}\right]\right\}\\&+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{5.108}$$

并设

$$\begin{aligned}\xi(x,\ y,\ t)=&\cos ky\cdot[\xi_1(x,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{c.c.}]+\xi_0(x,\ t)\\&+[\xi_2(x,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}+\mathrm{c.c.}]\cos 2k+\xi_2^{(0)}(x,\ t)\cos 2ky\\&+O(\varepsilon^{3/2})\end{aligned} \tag{5.109}$$

式中已将 $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}$，$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}$ 分别用$\frac{\partial}{\partial t}$ 和$\frac{\partial}{\partial x}$ 表示，应注意区别。还须把式 (5.103)、式 (5.104) 中的 φ 及其导数在 $z=0$ 用自由面 $\xi(x,\ y,\ t)$ 展开，如

$$\begin{aligned}\varphi(x,\ y,\ z,\ t)|_{z=\xi}=&\varphi(x,\ y,\ 0,\ t)+\varphi_z(x,\ y,\ 0,\ t)\cdot\xi\\&+\frac{1}{2}\varphi_{zz}(x,\ y,\ 0,\ t)\xi^2+\cdots\end{aligned} \tag{5.110}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial v}\bigg|_{z=\xi}=&\varphi_v(x,\ y,\ 0,\ t)+\varphi_{vz}(x,\ y,\ 0,\ t)\cdot\xi\\&+\frac{1}{2}\varphi_{vzz}(x,\ y,\ 0,\ t)\xi^2+\cdots\end{aligned} \tag{5.111}$$

式中，$v=x,\ y,\ z,\ t$。将式 (5.108)、式 (5.109)、式 (5.110)、式 (5.111) 代入式 (5.103)、式 (5.104)，得各级近似。由于实验中驱动项及 $\omega_0^2-\omega^2$ 并不是小量，驱动项将导致基波和三次谐波。过去，在一级近似中都把驱动项忽略（只要认为它们小到 $O(\varepsilon^2)$ 量级即

可），也就是把基波和三次谐波都忽略。但在本节的分析中，我们只忽略三次谐波，仍把基波作为 $O(1)$ 量级纳入一级近似中。道理很简单，在驱动项较大时，同时忽略基波和三次谐波是一种近似；而保留基波忽略三次谐波可以算作是另一种近似，而且应是一种更具有合理性的近似。

一级近似是(在式 (5.106) 意义下，μ' 项本应略去，这里暂保留)：

$$\left.\begin{aligned} &g\xi_1 + \frac{1}{2}\Delta\Omega^2\xi_1^* e^{i\varphi_0} + \mathrm{i}\omega\cdot 2\mu'\xi_1 + \mathrm{i}\omega\varphi_1 = 0 \\ &-\mathrm{i}\omega\xi_1 + kT\varphi_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.112}$$

有解的条件是：

$$\omega^2 = \omega_1^2 \tag{5.113}$$

$$\xi_1 = -\mathrm{i}\frac{kT}{\omega_1}\varphi_1 \tag{5.114}$$

式中，ω_1 是

$$\omega_1^2 = gkT + \sqrt{(2kT\omega_1^2\Delta)^2 - (2\mu\omega_1)^2} \tag{5.115}$$

的根；$2\mu = 2\mu' kT$。

二级近似是：

$$\xi_0 = \frac{1}{g}\left[-\frac{1}{2}k^2(1+T^2)|\varphi_1|^2 - \mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_1 kT(\varphi_1\xi_1^* - \varphi_1^*\xi_1)\right] \tag{5.116}$$

$$\varphi_0^{(2)} = \frac{1}{\mathrm{i}2\omega_1}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_1 kT\xi_1\varphi_1 - \frac{1}{4}k^2\varphi_1^2(1+T^2) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\Omega_1^2\Delta\xi_0\right] \tag{5.117}$$

$$\varphi_2^{(0)} = -\frac{1}{2kT_2}(\varphi_1\xi_1^* + \varphi_1^*\xi_1) \equiv 0 \tag{5.118}$$

$$\xi_2^{(0)} = \frac{1}{H}[g\bar{\xi}_2^{(0)} - \frac{1}{2}\Delta\Omega_1^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\bar{\xi}_2^* + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\bar{\xi}_2)] \tag{5.119}$$

$$\xi_2 = \bar{\xi}_2\left[1 - \Omega_1^2\Delta\frac{Q_1}{H}\cos\varphi_0\right] + g\frac{Q_1}{H}\bar{\xi}_2^{(0)} \tag{5.120}$$

$$\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + g\frac{Q_2}{H}\bar{\xi}_2^{(0)} - \Omega_1^2\Delta\frac{Q_2}{H}\bar{\xi}_2\cos\varphi_0 \tag{5.121}$$

式中：

$$\bar{\varphi}_2 = \lambda\left[-\omega_1^2 kT\varphi_1\xi_1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_1 k^2(T^2-1)\varphi_1^2 + k^2 g\varphi_1\xi_1\right] \tag{5.122}$$

$$\bar{\xi}_2 = \lambda\left[-\mathrm{i}2\omega_1 k^2\varphi_1\xi_1 + \mathrm{i}\omega_1 k^2 TT_2\varphi_1\xi_1 + \frac{1}{2}k^2 T_2(T^2-1)\varphi_1^2\right] \tag{5.123}$$

$$\bar{\xi}_2^{(0)} = \frac{1}{g}\left[-\frac{1}{2}k^2(T^2-1)|\varphi_1|^2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_1 kT(\xi_1^*\varphi_1 - \xi_1\varphi_1^*)\right] \tag{5.124}$$

$$T_2 = \tanh(2kd)$$

$$\Omega_1 = 2\omega_1$$

$$H = g + \frac{1}{2}(\Omega_1^2\Delta)^2\lambda kT_2 \tag{5.125}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\omega_1^2 - 2gkT_2} \tag{5.126}$$

$$Q_1 = \lambda kT_2\Omega_1^2\Delta e^{i\varphi_0} \tag{5.127}$$

$$Q_2 = i\lambda\omega\Omega_1^2\Delta e^{i\varphi_0} \tag{5.128}$$

在得到式 (5.118) 时用到式 (5.114)，由于 $\lambda \sim 1/2\omega_1^2 \sim 1/2gkT_2$，因此式 (5.125) 第二项约为第一项的 2%(取 $2\Delta = 0.08$ cm)，以下取 $H \approx g$，经繁冗的计算化简，可得三级近似

$$i\omega\left(1 + \frac{gkT}{\omega_1^2}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + (\omega_0^2 - \omega^2)\varphi_1 + i2\mu\omega\varphi_1 - \frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\varphi_1^* e^{i\varphi_0} - c^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}$$
$$= A_0|\varphi_1|^2\varphi_1 + (A_1\cos\varphi_0)\varphi^3 + A_2|\varphi_1|^2\varphi_1^* e^{i\varphi_0} \tag{5.129}$$

式中:

$$A_0 = k^4\lambda\left[\omega_1^2\left(-\frac{9}{4}T^3T_2 + \frac{3}{4}TT_2 + \frac{5}{2}T^2 - \frac{1}{2}\right) + gk\left(\frac{7}{4}T^2T_2 - \frac{1}{4}T_2 - 2T + \frac{3}{2}T^3 - \frac{1}{2}\right) - g^2k^2T^2\frac{1}{\omega_1^2}\right]$$
$$+ \left[\frac{\omega_1^2k^3}{g}\left(\frac{3}{4}T^2 - \frac{1}{4}T\right) + k^4\left(-\frac{1}{8}T^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{8}gk^5T^2\frac{1}{\omega_1^2}\right] \tag{5.130}$$

$$A_1 = \Delta\lambda\Omega_1^2\left[k^5\left(T + \frac{1}{4}T_2 - \frac{3}{4}T^2T_2\right) + \frac{k^4\omega_1^2}{g}\left(T^2 + \frac{1}{4}TT_2 - \frac{3}{4}T^3T_2\right)\right] \tag{5.131}$$

$$A_2 = \Delta\lambda\Omega_1^2\left[k^5\left(\frac{1}{4}T^2T_2 + \frac{1}{4}T_2 + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^3\right) - \frac{\omega_1^2k^4}{g}\left(\frac{3}{4}T^3T_2 + \left(\frac{3}{4}T_2T - \frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}\right)\right)\right] \tag{5.132}$$

$$c^2 = \frac{1}{2k}\left[gT + \frac{de^{-kd}}{\cos kd}(\omega_1^2 + gk)\right] \tag{5.133}$$

当 $\Delta=0$，$\mu=0$ 时，$A_0 = k^4(6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2})/8$，$A_1 = 0$，$A_2 = 0$，$\omega_1^2 = gkT$，$c^2 = (g/2k)[T + kd(1 - T^2)]$，这正是 Larraza 等的结果。

5.3.2 非传播孤波解

考虑非传播解，$\partial/\partial t = 0$，式 (5.129) 的孤波解是

$$\varphi_1 = a \cdot \mathrm{sech}(Dx)e^{i\psi} \tag{5.134}$$

式中:

$$D^2=\frac{\left[\left|\omega_0^2-\omega^2\right|\delta_L\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\right)^2-(2\mu\omega)^2}\right]}{c^2} \tag{5.135}$$

$$a^2=\frac{2\left[\left|\omega_0^2\right|\delta_L-\omega^2\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\right)^2-(2\mu\omega)^2}\right]}{\left|A_0\right|\delta_L+A_1\cos 2\psi\cos\varphi_0+A_2\cos(\varphi_0-2\psi)} \tag{5.136}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\varphi_0-2\psi)&=s_1\equiv\frac{\mp-\sqrt{(kT\Delta\Omega/2)^2-(2\mu\omega)^2}}{(kT\Delta\Omega^2/2)}\\ \sin(\varphi_0-2\psi)&=s_2\equiv\frac{2\mu\omega}{(kT\Delta\Omega^2/2)}\end{aligned}\right\} \tag{5.137}$$

这里，$\delta_L=+1$ 代表 $\omega_0^2>\omega^2$；$\delta_L=-1$ 代表 $\omega_0^2<\omega^2$；$\delta_N=+1$ 代表 $A_0>0$; $\delta_N=-1$ 代表 $A_0<0$。式 (5.136) 中的 $\cos 2\psi\cos\varphi_0$ 可由 $A_1\sin 2\psi\cos\varphi_0=-A_2\sin(\varphi_0-2\psi)$ 解出，即为方程

$$q^2-s_1q+A_2\frac{A_2-A_1}{A_1^2}s_2^2=0 \tag{5.138}$$

关于 q 的根。式(5.135)、式(5.136)的实值条件是(当取“＋”且$\delta_L=+1$时):

$$\omega^2<\omega_0^2+\sqrt{\left(\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\right)^2-(2\mu\omega)^2} \tag{5.139}$$

$$\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\geqslant 2\mu\omega \tag{5.140}$$

式 (5.138) 有实根的条件是(适应于式 (5.137) 中的“＋”和“－”两种选取)

$$\frac{1}{2}kT\Delta\Omega^2\geqslant 2\mu\omega\left[1+\frac{4A_2(A_2-A_1)}{A_1^2}\right]^{1/2} \tag{5.141}$$

对于实验系统：$b=2.54$ cm，$d=2.0$ cm，于是 $T=0.985\,9$，$T_2=0.999\,9$，因此 $A_1\approx A_2\approx\Delta\lambda\Omega^2k^5$。就是说式 (5.140)、式 (5.141)给出几乎一致的结论。式 (5.134)~式 (5.138) 给出了计及激励和各种耗散的驻孤波解。当 $2\Delta=0.08$ cm 时，式 (5.136) 中的 A_1 和 A_2 项的总和可达 $0.24A_0$。可见，新尺度的改进之处是：式 (5.136) 中分母出现了 A_1，A_2 项；A_0 的表达式中相对于过去理论中的 A 也多出了修正项。

5.3.3 耗散分析与Δ_c—Ω曲线

耗散造成能量逐渐损失，因此必须维持一定的激励使之得到补充。在一个周期内,激励做功为

$$W=\int_V\int_0^T fv_z\mathrm{d}t\mathrm{d}V=-\int_V\int_0^T\rho\Delta\Omega^2\cos(\Omega t+\varphi_0)(\nabla\varphi)_z\mathrm{d}t\mathrm{d}V$$

$$= 4\rho\Delta\Omega\ \frac{2k^2T^2}{\omega}I_tI_xI_y \tag{5.142}$$

式中:

$$I_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2\varphi_0^2}{D} \tag{5.143}$$

$$I_y = \frac{1}{2}b$$

$$I_t = \frac{\pi}{2\omega}\sin(\varphi_0 - 2\psi) \tag{5.144}$$

式 (5.108) 中只有 $\varphi_1(x, t)$ 项对式 (5.142) 有贡献，而 φ_2，$\varphi_0^{(2)}$ 和 $\varphi_2^{(0)}$ 项因时间或空间积分为零，对 W 无贡献。另一方面，当激励取消后，孤波将衰减，我们用取消激励后的第一个周期内的平均损耗来代替未取消时稳定状态下的周期损耗。Miles[15] 给出了能量衰减为 $E(t) = E_0\mathrm{e}^{-2\mu t}$，由于能量由 $(\nabla\varphi)^2$ 给出，可知振幅 $\xi_{\max} \propto \varphi_{1\max} \propto \mathrm{e}^{-\mu t}$，于是 μ 可由 Wu 等的振幅衰减实验拟合确定[37, 38] ($f = 5.1$ Hz):

$$\alpha = \frac{1}{f}[-0.285\xi_{\max}^2 + 0.869\xi_{\max} + 0.118] \tag{5.145}$$

式中，$\mu = f\alpha$，或 $2\mu = \alpha\omega/\pi$，$\alpha = \alpha_W + \alpha_S + \alpha_L$ 中的三项分别来源于刚性壁附近(α_W)，自由表面及其附近内部(α_S)的粘性耗散和自由表面与刚性壁之间的接触线 L 处月弯面的毛细粘滞(α_L)。虽然在文献〔15〕中，Miles 给出了它们的计算式，但由于其中许多量都无法测定或没有实验测量报道，因此，我们在分析中，只能借助文献〔15〕中基于实验的模拟曲线。一个周期内能量耗散可以近似为$\Delta E = E_0[\mathrm{e}^{-2\mu(-T_p/2)} - \mathrm{e}^{-2\mu(T_p/2)}]$，即

$$\Delta E = 2E_0\sinh\left[\frac{2\pi\mu}{\omega}\right] \tag{5.146}$$

式中，$T_p = 2\pi/\omega$。稳态总能量 $E_0 = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{PG}} + E_{\mathrm{PS}}$ 为动能、重力势能和表面张力势能的总和。但由于 $E_{\mathrm{K}} = E_{\mathrm{QG}}$[72]，且可证明 $E_{\mathrm{PS}} \ll E_{\mathrm{K}}$[62]，因此

$$E_0 \approx \frac{1}{T}\rho\int_0^T\int_V(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V\mathrm{d}t \approx \frac{2\rho k^2I_xb\sinh(2kd)}{4k(\cosh kd)^2} + 2\rho D^2I_{x'}b\frac{\left[\dfrac{\sinh(2kd)}{2} + kd\right]}{4k(\cosh kd)^2} \tag{5.147}$$

式中，$I_{x'} = \frac{2}{3}\varphi_0^2/D$，上式第二项可忽略。由于式 (5.108) 中 φ_2，$\varphi_0^{(2)}$，$\varphi_2^{(0)}$ 三项的贡献很小，在式 (5.147) 中没有计入。激励初相 φ_0 与孤波初相 ψ 差值 $\varphi_0 - 2\psi$ 受多方因素影响，目前，理论上无法确定，但式 (5.106) 限定了 $\sin(\varphi_0 - 2\psi)$ 的上限 $\beta \sim O(\varepsilon^{1/2})$ 远达不到 1。当激励做功补充能量与损耗能量相平衡时，$\Delta E = W$，即

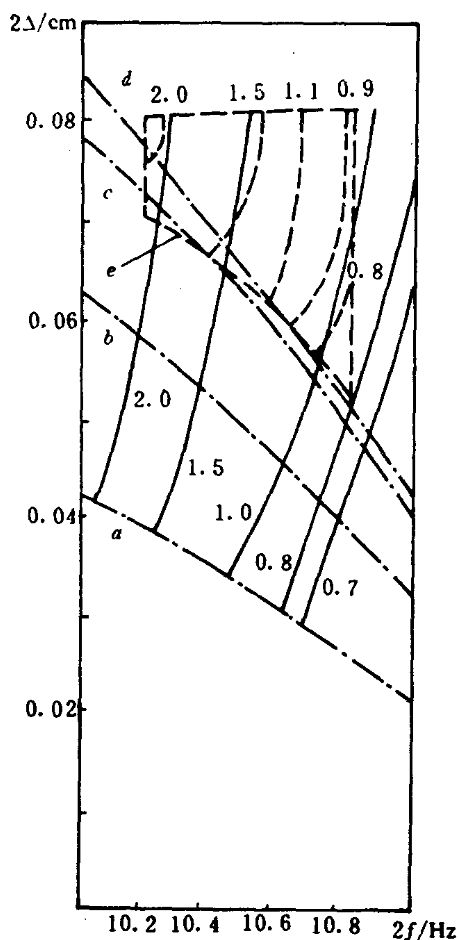
$$2\Delta=\frac{\sinh(2kd)\sinh(2\pi\mu/\omega)}{2\pi k^{2}T^{2}[\cosh(kd)]^{2}\sin(\varphi_{0}-2\psi)}\tag{5.148}$$

将 $\sin(\varphi_0-2\psi)\leqslant\beta$ 代入上式

$$2\Delta\geqslant\frac{\sinh(2kd)\sinh(2\pi\mu/\omega)}{2\pi kT^{2}(\cosh kd)^{2}\beta}\equiv 2\Delta_{c}\tag{5.149}$$

式中的 β 可通过实验测定，其理论确定将是今后进一步研究的内容。由于 $\beta<1$，可以证明，在式(5.149)所规定的区域中，式(5.140)和式(5.151)自然得到满足；反之，则不然。

图 5–3 给出了本节理论结果与实验的比较，其中，等幅值理论曲线在大幅值时(如 2.0 cm，1.5 cm)与实验曲线符合较好，而在小幅值时差异较大，但仍具有基本相同的变化趋势。这里，等幅值的理论曲线是利用式 (5.134)、式 (5.136)，将式 (5.114)、式 (5.116)、式 (5.119)及式 (5.120)代入式 (5.19)，并取在 $y=0$ 处的时间变化最大值而得，因为文献



图中:

虚线 ——实验曲线;

点画线 —— Δ_c–Ω理论曲线;

实线 ——孤波等幅值理论曲线线旁数值代表幅值(cm)，且

a: $\beta=1$;

b: $\beta=2/3$;

c: $\beta=0.53$;

d: $\beta=0.5$;

e: 实验

图5–3　孤波等幅值线和 $2\Delta_c$—$2f$ 曲线(简称 Δ_c–Ω曲线)

〔36〕给出的幅值正是这个意义下的值，文献〔47〕也注意到这一点。根据文献〔36〕中的实验拟合曲线，即 $\xi_{max}=\mathrm{sech}(x/1.1.2)\cdot(2.8e^{-1.1y}-0.70)$ cm 可知，某时刻在 $y=0$ 处 $\xi_{max}=2.1$ cm；而在 $y=b=2.54$ cm 处 $\xi_{max}=0.53$ cm，但这时幅值被认定是 2.1 cm。下截止激励振幅 $2\Delta_c$ 随激励频率 $2f$(或 ω/π)的变化曲线与实验曲线有完全一致的趋势，且把实验曲线包含在 $\beta=1$ 和 $\beta=0.5$ 的曲线之间。根据实验曲线，可估计 β 约为 0.53。由于还存在许多因素目前尚无法考虑，理论上不能把 β 确定到较小的范围。此外，上面分析所依赖的式(5.145)也只是在 $f=5.1$ Hz 情况下的实验模拟曲线，对其它频率未必适应。因此，本章理论同前人理论类似，只能部分地解释实验。但结果表明，本章尺度假设是自适应的，因此，它将为今后分析提供又一尺度选择的余地。也许以文献〔65～66〕理论为基础，引入上述新的尺度假设，可能更有利于对实验进行解释。

归纳如下：前面采用一种新的尺度假设，即式(5.105)～式(5.107)，其中包括低功率因素假设，也导出了计及激励、损耗在内的支配方程，并给出了非传播孤波解，也得到了较好的结果；尤其在低频段 (如 $2f=10.2\sim10.4$ Hz) 和大幅值驱动($2\Delta=0.08$ cm 附近)区与实验曲线吻合颇好。因此，本节的新尺度假设一方面给出了较好的结果，同时，又为今后分析提供了又一条尺度选择的余地。此外，通过耗散分析，给出了下截止驱动振幅 Δ_c 随驱动频率 Ω的依赖关系，初步解释了实验曲线。事实上，正是考虑到按过去假设所给出的 $2\Delta_c$ 理论值过低，才提出了能包容低功率因数假设式 (5.106) 的新尺度假设。

此外，从式 (5.136) 可知，如果在$A_0<0$ 但A_0不过大的参数区域，可能出现A_1和A_2项之和大于A_0，以至于式(5.136)的分母大于零，这时在$\omega^2>\omega_0^2$且式(5.136)取负或 $\omega^2<\omega_0^2\pm\sqrt{(kT\Delta\Omega^2/2)^2-(2\mu\omega)^2}$ 时，仍有呼吸子孤波解，在后面的 5.3.4 节中将对此作介绍，实验上已发现$A_0<0$ 时存在类呼吸子孤波。由文献〔41〕，考虑表面张力之后的 A_0随 kd 增加而增加，但随表面张力增大而减小，因此，这种可能性是存在的。

5.4　水槽孤波的其它近似尺度分析

我们已经看到，前面各种理论都只能对特定参数或条件给出较好的解释，而且对多数问题还只能作部分解释。原因是：一方面是还有一些因素，如粘滞、端壁影响等未能考虑；另方面就是尺度假设的局限性。事实上，为得到孤波解或孤波方程，除了 Larraza 和 Putterman 的尺度假设外，还可以有以 Larraza 方程框架的其它的选择。本节给出了一种方法，可作为非线性方程组建立孤波方程的预定性分析，暂且称为多重尺度预分析；然后，作为例子，给出支配孤波演化的、以 Larraza 为框架基础的另一推广的 NLS 方程，并研究其微扰解。

5.4.1　多重尺度预分析

Larraza 和 Putterman 的尺度框架是[39]：

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial}{\partial x}\sim O(\varepsilon^1) & t_1\sim O(\varepsilon^2)t & \dfrac{\partial}{\partial y}\sim\dfrac{\partial}{\partial z}\sim O(1)\\ \omega_1^2-\omega^2\sim\omega^2 O(\varepsilon^2) & \dfrac{g}{\omega}\xi\sim\varphi\sim\dfrac{g}{\omega}WO(\varepsilon^1) & \end{array}\right\}\tag{5.150}$$

W 是孤波特征宽度，我们可以把上式推广成一般形式，即:

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial}{\partial x}\sim O(\varepsilon^{n}) & t_1\sim O(\varepsilon^{l})t & \dfrac{\partial}{\partial y}\sim\dfrac{\partial}{\partial z}\sim O(1)\\ \omega_1^2-\omega^2\sim\omega^2 O(\varepsilon^{m}) & \xi\sim\dfrac{\omega}{g}\varphi\sim W\cdot O(\varepsilon) & \end{array}\right\}\tag{5.151}$$

由前面关于孤波方程的导出过程，可体会到当 $n=m/2$ 且$l=l_1$(当 m=偶数时，$l_1=m$; m=奇数时，$l_1=m+1$)，即可得到支持传播演化孤波的支配方程。若$l>l_1$，则只能得到非传播孤波方程。若 $m/2>n$ 且$l=l_1$时，则只能得到传播孤波方程(即不支持非传播孤波)。可见，在多重尺度分析中，各量之间的匹配是很重要的。每种匹配关系都对应一个方程。其中，有的是 NLS 或推广的 NLS 方程；有的则是其它方程。下面我们提出一种多重尺度预分析方法，它使我们在作具体推导之前，可以预先知道，在给定的匹配关系下，将能得到什么类型的方程。这一点很重要，因为选取匹配关系之后的具体推导是异常繁冗的，包括推导结束后的反复检查校对，通常要费很多时间。如果能预先知道方程的类型，去掉那些不感兴趣的类型(即匹配关系)，就能节省很多时间。这不仅对水槽中的孤波，而且对任何其它需要用到摄动法的问题都可借鉴。下面列举一例说明之。

假定我们的推导从式 (4.60) 出发，并把式 (4.60) 简记为

$$L_1[\varphi]=L_2[\varphi\varphi]+L_3[\varphi\varphi\varphi]\tag{5.152}$$

各项分别表示对 φ 及其二次和三次乘积存在线性依赖关系。对照式 (5－108)，$\cos ky$ 或 $e^{i\omega t}$ 的系数只有一个，即 φ_1；$\cos 2ky$ 或 $e^{i2\omega t}$ 的系数有三个即 φ_2，$\varphi_0^{(2)}$ 和 $\varphi_2^{(0)}$。在下面分析中，用 $\{x\}$ 代表含 x 的线性项，用 $\{\varphi_2\}$ 代表含 φ_2，$\varphi_0^{(2)}$，$\varphi_2^{(0)}$ 中任意一个的线性项。同样，用 $\{\varphi_3\}$ 代表含 φ_3，$\varphi_0^{(3)}$，$\varphi_3^{(0)}$ 中任意一个的线性项，其余类推。乘积 $\{\varphi_2\}\cdot\{\varphi_2\}$ 可能包含的 $\cos 4ky$ 和 $e^{i4\omega t}$ 及其乘积的项用符号 (4，2，0) 中的“4”表示，$\cos 2ky$，$e^{i2\omega t}$ 项用其中的“2”表示，$\cos(0ky)$，$e^{i(0\omega t)}$ 用其中的“0”表示；其余类推。作为例子，在表 5－1 给出一种匹配关系及其方程类型。分析中要注意：根据式 (4.60)，$L_2[\varphi\varphi]$ 包含了 $\varphi\varphi$，$\varphi_x\varphi_x$ 两种类型的项，$L_3[\varphi\varphi\varphi]$ 中包含了 $\varphi\varphi\varphi$，$\varphi_x\varphi_x\varphi$，$\varphi_x\varphi_x\varphi_{xx}$ 三种类型的项。由这种方法，可以针对各种 n，m，l 的选取作出分析，由此判定哪一种选取能够得到孤波方程。

由表 5-1 可以看到:

(A) 式给出了色散关系 $\omega^2\approx\omega_1^2$，由 $\omega^2-\omega_1^2\sim O(\varepsilon^1)$，因此 $\varphi_1(\omega_1^2-\omega^2)\sim O(\varepsilon^2)$，这一项在 ε^2 量级中，仍要考虑，于是得到(C)式，但这只是二级近似。

同样的原因，由于(B)式$\sim O(\varepsilon^3)$，故在 ε^3 量级中需要考虑，因此 (E) 式中有 (B) 式中的两项。

同理，(F) 式中有 (C) 式的两项，(F) 式给出 φ_1 的三级近似，它代表了对 (C) 式给出的波进行“调制”。在 $\omega^2<\omega_1^2$ 的区域被调制成一个非传播明孤波[36~38]；在 $\omega^2\approx\omega_1^2$ 的区域被调制成一个扭结[49]或称暗孤波，调制的过程就是孤波的自“捕捉”过程，“The soliton digs its own hole and builds its own walls”—I. Rudmck[38]。

表 5-1　$t_1 = O(\varepsilon^2)t$，$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots$，$\omega_1^2 - \omega^2 = \omega^2 O(\varepsilon^1)$

	$L_1〔\varphi〕$	$L_2〔\varphi\varphi〕$	$L_3〔\varphi\varphi\varphi〕$	各 阶 方 程
ε^1	$L_1〔\varphi_1〕$ (1)			(1) $\Rightarrow L_1〔\varphi_1〕= 0 \Rightarrow (\omega_1^2 - \omega^2)\varphi_1 = 0$ (A)
ε^2	$L_1[\{\varphi_2\}]$ (2, 0) $\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}$ (1) $(\omega_1^2 - \omega^2)\varphi_1$ (1)	$L_2[\varphi_1\varphi_2]$ (2, 0)		(2, 0) $\Rightarrow L_1[\{\varphi_2\}] + L_2[\varphi_1\varphi_1] = O(\varepsilon^3)$ (B) (1) $\Rightarrow \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} - (\omega_1^2 - \omega^2)\varphi_1 = O(\varepsilon^3)$ (C) 代表等幅慢变波列
ε^3	$L_1[\varphi_1]$ (3, 1) $\frac{\partial^2[\{\varphi_2\}]}{\partial x_1^2}$ (2, 0) $\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x_1^4}$ (1) $\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} - (\omega_1^2 - \omega^2)\varphi_1$ (1) $L_1\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\right]$	$L_2[\varphi_1\varphi_2]$ (3, 1) $L_2[\varphi_{1x}\varphi_{1x}]$ (2, 0) $L_1[\{\varphi_2\}] + L_2[\varphi_1\varphi_1]$ (2, 0)	$L_3[\varphi_1\varphi_1\varphi_1]$ (3, 1)	(3, 1) $\Rightarrow L_1[\{\varphi_3\}] + L_2[\varphi_1\varphi_2] + L_3[\varphi_1\varphi_1\varphi_1] = 0$ (D) (2, 0) $\Rightarrow \frac{\partial^2[\{\varphi_2\}]}{\partial x_1^2} + L_2[\varphi_{1x}\varphi_{1x}] + L_1[\{\varphi_1\}] + L_2[\varphi_1\varphi_1] = 0$ (E) (1,1) $\Rightarrow L_1[\{\varphi_3\}] + L_2[\varphi_1\varphi_2] + L_3[\varphi_1\varphi_1\varphi_1] + L_1\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\right]$ $+ \left[\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x_1^4}\right] + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} - (\omega_1^2 - \omega^2)\varphi_1 = 0$ (F)

当然，还有一点需要说明，就是若完全按照尺度分析，应从 (C) 式解出两个线性无关解，再给它们配以慢变系数构成满足 (F) 式的解，(F) 式只起到确定慢变系数的作用，但这里不是按这个步骤进行的，而是直接从 (F) 式出发，把φ_1中的两个线性无关解及其慢变系数作为一个整体进行求解。事实上，(F) 式也刚好使式 (5.152) 中$O(\varepsilon^4)$项以前的、并含有$e^{i\omega t}$和 $\cos ky$ 的各项系数能干净地为零(或平衡)。因此，(F) 式已包含了 (A) 式及 (C) 式；在准确到$O(\varepsilon^2)$的情况下，(F) 式给出 (A)；在准确到$O(\varepsilon^3)$的情况下，(F) 式给出 (C)。同理，(E) 式使$e^{i2\omega}$，$\cos 2ky$ 等项的数系平衡，(D)式则使$e^{i3\omega t}$，$\cos 3ky$ 等项的数系平衡。因此，从这个角度说，(F) 式有一定的合理性。得到 (F) 式的具体过程是：由 (B) 解出$\{\varphi_2\}=L_1^{-1}L_2[\varphi_1\varphi_1]$，作为$\{\varphi_2\}$的一级近似，代入 ($D$) 式解出$\{\varphi_3\}=L_1^{-1}[\cdots]$，再把$\{\varphi_2\}$，$\{\varphi_3\}$代入 ($F$) 式即可解出$\varphi_1$的三级近似。($F$) 的最终形式是

$$L_1\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}\right]+\left[\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x_1^4}\right]-(\omega_1^2-\omega^2)\varphi_1+L[\varphi_1^3]=0 \tag{5.153}$$

解出φ_1的三级近似后再代入 (E) 式解出$\{\varphi_2\}$的二级近似。按照这个步骤，可以给出式 (5.153) 的具体形式，即式 (5.154)：

$$\mathrm{i}2\omega\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+(\omega_1^2-\omega^2)\varphi_1-c^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}-\beta^2\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x_1^4}-A\left|\varphi_1^2\right|\varphi_1=0 \tag{5.154}$$

$$\varphi_2+\mathrm{i}\lambda_3\varphi_1^2=O(\varepsilon^3)\qquad \varphi_0^{(2)}-\mathrm{i}\lambda_4\varphi_1^2=O(\varepsilon^3) \tag{5.155}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_2+\mathrm{i}\lambda_3\varphi_1^2-\lambda_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}-\mathrm{i}\lambda_2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2=O(\varepsilon^4)\\&\varphi_0^{(2)}-\mathrm{i}\lambda_4\varphi_1^2-\mathrm{i}\frac{1}{4\omega}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2=O(\varepsilon^4)\end{aligned}\right\} \tag{5.156}$$

在得到式 (5.154) 时用到了式 (5.155)，在解出φ_1后，代入式(5.156)可得φ_2和$\varphi_0^{(2)}$的二级近似。在式 (5.154)～式 (5.156) 中：

$$c^2=\frac{g}{2k}[T+kd(1-T^2)]$$

$$\beta^2=\frac{g[T-2kd(1-T)]}{(2k)^3}$$

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{1}{8}k^4[6T^4-5T^2+16-9T^{-2}]\\
\lambda_1&=\frac{\omega_1^2 d(T_2-1)-g[T_2+2kd(1-T_2)]}{2gkT_2-4\omega_1^2}\\
\lambda_2&=-\frac{\omega}{2gkT_2-4\omega_1^2}\\
\lambda_3&=\frac{3k^2(1-T^4)}{8\omega_1 T^2}\\
\lambda_4&=\frac{k^2(1+3T^2)}{8\omega_1}
\end{aligned}\right\}\tag{5.157}$$

在 Wu 等的实验条件下，$c^2\approx 418$，$\beta^2\approx 64$，$A\approx 2.2$，$\omega_1^2-\omega^2=168$(取 $f=10.2$ Hz)，$2\omega\approx 64$，解出 φ_1，φ_2，$\varphi_0^{(2)}$，可得准确到 $O(\varepsilon^3)$ 的速度势 φ

$$\begin{aligned}
\varphi=&\left\{\cos ky\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}[\varphi_1 e^{i\omega t}+\text{c.c.}]\right\}\\
&+\left\{\cos 2ky\frac{\cos 2hk(z+d)}{\cos 2kd}[\varphi_2 e^{i2\omega t}+\text{c.c.}]+\cos 2ky\frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd}[\varphi_2^{(0)}]\right.\\
&+[\varphi_0^{(2)}e^{i2\omega t}+c.c.]-\frac{1}{2k}\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}e^{i\omega t}+\text{c.c.}\right]\\
&\left.\cdot[z\sinh k(z+d)\cdot -de^{-k(z+d)}]\frac{\cos ky}{\cosh k(z+d)}\right\}\\
&+\left\{\cosh 3ky\frac{\cosh 3k(z+d)}{\cosh 3kd}[\varphi_3 e^{i3\omega t}+\text{c.c.}]+\cos 3ky\frac{\cos 3k(z+d)}{\cosh 3kd}[\varphi_3^{(1)}e^{i\omega t}+\text{c.c.}]\right.\\
&+\cos ky\frac{\cos k(z+d)}{\cosh kd}[\varphi_1^{(3)}e^{i3\omega t}+\text{c.c.}]-\frac{1}{4k}\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}e^{i2\omega t}+\text{c.c.}\right]\\
&\cdot\left[z\sinh 2k(z+d)-de^{-2k(z+d)}\right]\frac{\cos 2ky}{\cosh 2kd}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi_0^{(2)}}{\partial x_1^2}e^{i2\omega t}+\text{c.c.}\right]z^2\\
&-\frac{1}{4k}\left[\frac{\partial^2\varphi_2^{(0)}}{\partial x_1^2}\right]\frac{\cos 2ky}{\cosh 2kd}\left[z\sin 2k(z+d)-de^{-2k(z+d)}\right]+\frac{1}{2k}\frac{\cos ky}{\cosh kd}\\
&\left.\cdot\left[\frac{1}{4k}z^2\cosh k(z+d)+\frac{d}{2k}ze^{-k(z+d)}-\frac{1}{4k^2}z\sinh k(z+d)\right]\left[\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x_1^4}e^{i\omega t}+\text{c.c.}\right]\right\}
\end{aligned}\tag{5.158}$$

式中，φ_3，$\varphi_3^{(1)}$，$\varphi_3^{(3)}$ 需在更高阶近似中确定，即由表 5－1 中的 (D) 式确定。在准确到 $O(\varepsilon^3)$ 的近似中取为 0。

5.4.2　孤波方程强微扰分析

按式 (5.69) 做变换，则 5.9.1 节中的式 (5.154) 变成

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}+2|\Phi|^2\Phi-\Phi=-\delta\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} \tag{5.159}$$

式中:

$$\delta=\frac{\beta^2(\omega_1^2-\omega^2)}{c^4} \tag{5.160}$$

为了讨论 δ 项的影响，把它作为强微扰处理[76]。因为这一项在导推过程已假定它与其它项是同一量级的。如果能严格求解，它可能给出全新的孤波解，但因还未探明其可积性，因此还未知它能否严格求解。下面讨论非传播情况，这时 $\partial/\partial\tau$ 项为 0，式 (5.159) 写成

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}+2|\Phi|^2\Phi-\Phi=-\varepsilon\delta\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} \tag{5.161}$$

ε 是小量标志。引入变换:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=\alpha\xi\\&\alpha=\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{5.162}$$

于是有:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}=(\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\cdots)\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi^2}=[\alpha_0^2+2\alpha_1\alpha_0\varepsilon+\varepsilon^2(\alpha_1^2+2\alpha\alpha_2)+\cdots]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4}=[\alpha_0^4+4\alpha_0^3\alpha_1\varepsilon+\varepsilon^2(2\alpha_1^2\alpha_0^2+\alpha_1^2+2\alpha_0\alpha_1)+\cdots]\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \zeta^4}$$

因而式 (5.161) 成为

$$\left(\alpha_0^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}+2|\Phi|^2\Phi-\Phi\right)+\varepsilon\left[\alpha_0^4\delta\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \zeta^4}+2\alpha_1\alpha_0\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}\right]$$
$$+\varepsilon^2\left[4\alpha_0^3\alpha_1\delta\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \zeta^4}+(\alpha_1^2+2\alpha_0\alpha_2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}\right]+\cdots=0 \tag{5.163}$$

再作变换:

$$\Phi(\zeta)=v(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{5.164}$$

$$\eta=\zeta+\varepsilon F[v]+\varepsilon^2 G[v]+\cdots \tag{5.165}$$

于是有:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}=\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \zeta}=v'(\eta)[1+\varepsilon F_\zeta^1+\varepsilon^2 G'_\zeta+\cdots]$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}=v'(\eta)\frac{\partial}{\partial\zeta}[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots]+v''(\eta)[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots]^2$$

$$=v'(\eta)[\varepsilon F''_{\zeta}+\varepsilon^2G''_{\zeta}+\cdots]+v''(\eta)[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots]^2$$

同理:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\zeta^3}=v'''(\eta)[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots]^3$$

$$+3v''(\eta)[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots][\varepsilon F''_{\zeta}+\varepsilon^2G''_{\zeta}+\cdots]+v'(\eta)[\varepsilon F'''_{\zeta}+\varepsilon^2G'''_{\zeta}+\cdots]$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\zeta^4}=v''''(\eta)[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots]^4$$

$$+6v'''(\eta)[1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots]^2[\varepsilon F''_{\zeta}+\varepsilon^2G''_{\zeta}+\cdots)$$

$$+v''(\eta)\left\{4(1+\varepsilon F'_{\zeta}+\varepsilon^2G'_{\zeta}+\cdots)(\varepsilon F'''_{\zeta}+\varepsilon^2G'''_{\zeta}+\cdots)+3(\varepsilon F''_{\zeta}+\varepsilon^2G''_{\zeta}+\cdots)^2\right\}$$

$$+v'(\eta)[\varepsilon F''''_{\zeta}+\varepsilon^2G''''_{\zeta}+\cdots]$$

代入式 (5.163),

$$\begin{aligned}&(\alpha_0^2v''+2v^3-v)+\varepsilon[\alpha_0^2\cdot(v'F''+2v''F')+\alpha_0^4\cdot\delta v''''+2\alpha_1\alpha_0\cdot v'']\\&+\varepsilon^2\Big\{[\alpha_0^2(v'G''+F'^2v''+2G'\cdot v'')]+[\alpha_0^4\delta(4F'\cdot v''''\\&+6v'''F''+4v''F'''+v'F'''')+2\alpha_1\alpha_0(v'F''+v''2F')]\\&+[4\alpha_0^3\alpha_1(v'''')+(\alpha_1^2+2\alpha_0\alpha_2)(v'')]\Big\}+O(\varepsilon^3)=0\end{aligned}\tag{5.166}$$

于是得:

$$\alpha_0^2v''+2v^3-v=0\tag{5.167}$$

$$v'F''+2v''F'=-\frac{1}{\alpha_0^2}(\alpha_0^4\delta v''''+2\alpha_1\alpha_0v'')\tag{5.168}$$

....

式 (5.167) 的解是

$$v(\eta)=\mathrm{sech}\left[\frac{1}{\alpha_0}\eta\right]\tag{5.169}$$

根据式 (5.165) 和式 (5.162), α_0 可取为 1; 对于非传播孤波, 根据式 (5.5) 也可说明 α_0 应取为 1。将式 (5.169) 代入式 (5.168), 可写成

$$F''+PF'=Q\tag{5.170}$$

式中:

$$P=-\frac{(2\mathrm{sech}\,b\eta-4\mathrm{sech}^4\,b\eta)b}{\mathrm{sech}\,b\eta\cdot\tanh b\eta}\tag{5.171}$$

$$Q=\frac{(a_1\operatorname{sech}b\eta+a_3\operatorname{sech}^3b\eta+a_5\operatorname{sech}^5b\eta)b}{\operatorname{sech}b\eta\cdot\tanh b\eta} \tag{5.172}$$

其中:

$$\left.\begin{aligned}&b=\frac{1}{\alpha_0}=1\\&a_1=\delta+2\alpha_1b^2\\&a_3=-20\delta-4\alpha_1b^2\\&a_5=24\delta\end{aligned}\right\} \tag{5.173}$$

式 (5.170) 有解

$$F'=\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}\eta}[\int Q\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\eta+C] \tag{5.174}$$

要说明一点，F' 代表 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\zeta$，但根据式 (5.165)

$$F'_\zeta=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}[1+\varepsilon F'_\zeta] \tag{5.175}$$

于是

$$F'_\zeta=\frac{F'_\eta}{1-\varepsilon F'_\eta}\approx F'_\eta\left[1+\varepsilon F'_\eta+\varepsilon^2\left(F'^2_\eta+F''_\eta\right)+\cdots\right] \tag{5.176}$$

同理可得 F''_ζ，F'''_ζ 等与各 $F_\zeta^{(n)}$ 的关系。这些关系在得到 G_ζ 的方程（即二级近似）时是要用到的。也就是式 (5.166) 中的各个 $F_\zeta^{(n)}$ 和 $G_\zeta^{(n)}$ 用式 (5.176) 等化成 $F_\eta^{(n)}$，$G_\eta^{(n)}$ 后，再分离出相同量级的量。因此，$G(\eta)$ 的微分方程应是

$$\begin{aligned}&v'G''_\eta+2v''G'_\eta\\&=\left\{-F'^2_\eta v''-\frac{1}{\alpha_0^2}\left[\alpha_0^4\delta\left(4F'_\eta v''''+6v'''F''_\eta+4v''F'''_\eta+v'F'''_\eta\right)\right.\right.\\&\quad\left.\left.+2\alpha_1\alpha_0\cdot(v'F''_\eta+2v'F'_\eta)+4\alpha_0^3\alpha_1v''''+(\alpha_1^2+2\alpha_0\alpha_2)v''\right]\right\}\\&\quad\cdot\left\{-\frac{1}{\alpha_0^2}\left[v'\cdot3F'_\eta F''_\eta+2v''\cdot(F'_\eta)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.177}$$

式中用到

$$F''_\zeta=F''_\eta+3\varepsilon F'_\eta F''_\eta+\varepsilon^2\left[5\left(F'_\eta\right)^2F''_\eta+2\left(F''_\eta\right)^2+F'_\eta F'''_\eta\right] \tag{5.178}$$

式 (5.177) 中的第二个 {·} 中来自式 (5.166) 中的 $O(\varepsilon)$ 项中的 $O(\varepsilon^2)$ 部分。

积分式 (5.174) 得

$$F'_\eta=-\frac{1}{2}Cy(y-1)-\frac{a_1}{2}y+\frac{a}{2}(y-1)+\frac{s}{2}(\ln\frac{y-1}{y})y(y-1) \tag{5.179}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} y&=\tanh^2(b\eta)\\ a&=a_1+a_3+a_5\\ s&=2a_1+a_3 \end{aligned}\right\} \tag{5.180}$$

C 是式 (5.174) 中的积分常数，对 (5.179) 进一步积分得

$$F(\eta)=\frac{1}{b}\left\{\left(s+\frac{a_1}{2}-\frac{a}{2}\right)\tanh(b\eta)+\frac{C}{6}\tanh^3(b\eta)-\frac{a_1}{4}\ln[1-\tanh^2(b\eta)]\right.$$
$$\left.+\frac{s}{2}\ln\frac{1-\tanh(b\eta)}{1+\tanh(b\eta)}\right\} \tag{5.181}$$

利用下面关系式:

$$\frac{1-\tanh(b\eta)}{1+\tanh(b\eta)}=\mathrm{e}^{-2b\eta} \tag{5.182}$$

考虑到式 (5.161) 关于 ξ 反演具有不变性，然而式 (5.181) 中 $\ln[1-\tanh^2(b\eta)]$ 的对称性使得式 (5.165) 不具有反对称性，因而使式 (5.169) 不具备对称性，故应去掉。于是

$$a_1=0$$

即

$$\alpha_1=-\frac{\delta}{2b^2}=-\frac{\delta}{2} \tag{5.183}$$

式 (5.181) 中的积分常数 C 需要在求二阶量 $G(\eta)$ 的过程中确定，在一级近似中可取 $C=0$，于是式 (5.181) 是

$$F(\eta)=\left(s-\frac{a}{2}\right)\tanh(b\eta)-s\eta \tag{5.184}$$

由前面关系式及定义，$a_3=-18\delta$，$a_5=24\delta$，$a=6\delta$，$s=-18\delta$，再利用式 (5.162)、式 (5.165)，可得

$$\Phi(\xi)=\mathrm{sech}\left[\left(1+\frac{37}{2}\delta\right)\xi-21\delta\tanh(\xi)\right]+O(\delta^2) \tag{5.185}$$

由于 $\beta^2=59$，由式 (5.160) 可知 $\delta>0$，

图 5−4 中给出了 $\eta(\xi)$ 的曲线。由此可知，式 (5.159) 中的四阶导数项，当被作为强微扰项时，其影响使孤波波峰附近较标准 NLS 孤波变平而在远离波峰区域又使孤形变陡；当 δ 较大时，$\eta(\xi)$ 曲线变成图中点画线所对应情形。这时，孤波峰将出现三峰值。按 Wu 等的实验，由式 (5.160) 可计算得 δ 在 0.016 到 0.062 之间，这时对应图 5−4 中 δ 较小时的曲线，因而孤波为单峰波形，只是顶部变平。我们导出方程时，是按照它与其它项是同一量级为前提的。在文献〔77〕中指出，支持孤波的参数区域有三个，在那里已考虑了表面张力。这里给出的 δ 是没有考虑表面张力的结果，在计及表面张力的情况下，在其它两个参数区域中，δ 有可能取较大的值。

以上微扰分析是在固定幅值为 1 的情况下得到的。事实上，若把 $\Phi=(1+a)\psi(\xi)$ 代入式(5.159)可得到更为准确的微扰解(其中，$a(\xi)=\xi_1a_1+\xi^2a_2$，$\xi=\xi+b(\xi)$):

$$\Phi=(1+c_1\mathrm{sech}\,\xi+c_2\mathrm{sech}^2\xi)$$

$\cdot\ [\ \xi+b_0\xi+b_1\arctan(\sinh\xi)+b_2\tan\xi)\ ]$

式中，$c_1=\delta/18$；$c_2=19\delta/108$；$b_0=-\delta/2$；$b_1=-27/\delta$；$b_2=451\delta/108$。

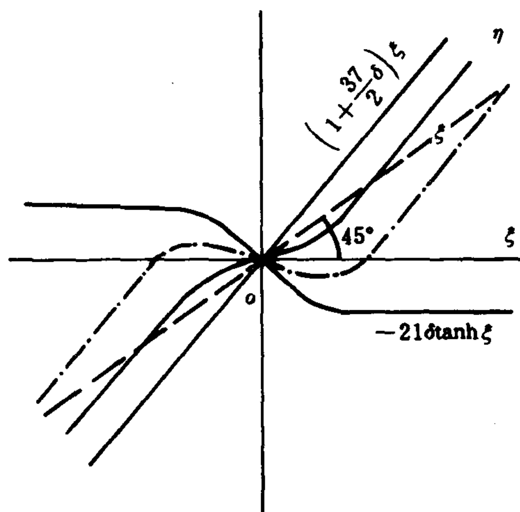


图 5−4 $\eta(\xi)$曲线及其中各项曲线

5.5 水槽中的 kink 波

5.5.1 实验中的 kink 现象及其理论描述

NLS 方程除了具有孤子解外[78]，还存在 kink 解[79]，这是 Zakharov 和 Shabat 用逆散射方法得到的结论。1973 年，Hasegawa 和 Tappert[80] 导出了光纤中的 NLS 方程预言并讨论了 kink 解。Denardo，Wright 和 Putterman[49] 首次在水槽中发现了参数激励下的 kink 孤波。在 NLS 方程中，当式 (4.62) 二阶导数项与立方项同号时，支持孤波或非传播孤波(呼吸子)解，如 Wu 等的实验 ($b=2.54$ cm，$d=2.0$ cm，$L=38$ cm) 即为这种情形；当它们异号时，支持 kink 解，如文献〔49〕取 $b=5.71$ cm，$d=1.0$ cm，$L=76.2$ cm 就属于这种情形，这时立方项系数 $A<0$，当驱动频率在 5.20 Hz 到 5.40 Hz 之间时，便出现 kink 孤波。这时$\omega_1^2\approx 333.6\ (\mathrm{rad/s})^2$。对应于$2f_0=2.9$ Hz，因此有 $2f<2f_0$。一般情况下，对于深水时，$A>0$；对于浅水时，$A<0$；$A=0$ 对应的水深称为临界深度d_c。当考虑水槽流体质量守恒，则式 (4.62) 中的 A 应修正为[39,41]

$$A=\frac{k^4(2T^4+3T^2+12-9T^{-2})}{8} \tag{5.186}$$

这时$kd_c\approx 1.058$。当 $k=\pi/b\approx 0.550$ 时，$d_c\approx 1.92$ cm。按文献〔36〕描述，孤波在倾斜水槽中将向浅水方向移动，而且当斜度为 0.05 时，孤波移动速度是 0.05 cm／s· kink 孤波也有类似特性，即文献〔49〕报道 kink 孤波移动速度与斜度的关系 3.5 cm／deg· s。

在图 5−5(*a*)、(*b*)、(*c*)中分别给出了 kink 孤波的测量波形及速度曲线。

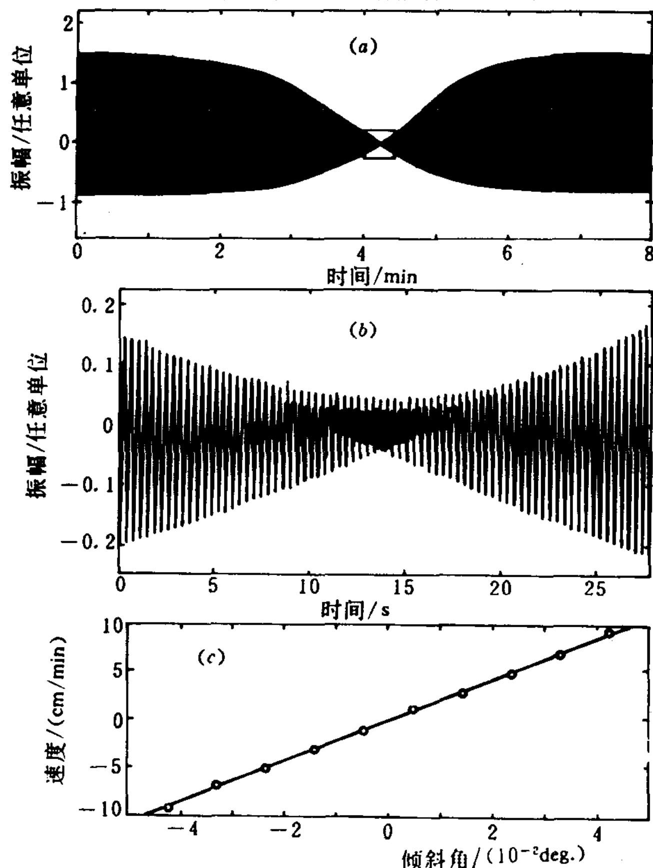
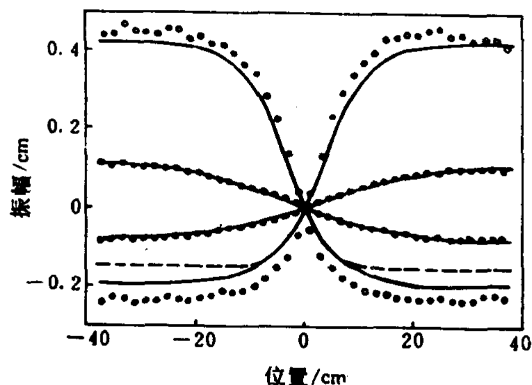


图5-5 实验中的kink孤波现象

(a) 运动 kink 经过固定探针测量到的剖面；(b) 在(a) 中方框处的放大图形；

(c) 移动速度随倾斜角的变化关系

图 5-6 和图 5-7 分别给出了大幅及小幅 kink 孤波的剖面图和 kink 孤波在参数空间存在的区域。



图中：小圈是实验测量值，实线是理论值；
大幅波形参数为 5.37 Hz、0.52 mm，
小幅波形参数为 5.23 Hz、0.46 mm。

图 5-6 kink 波幅剖面

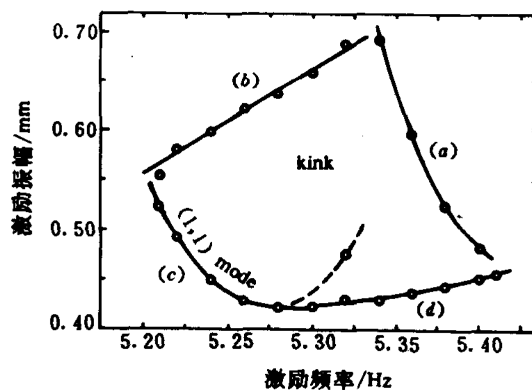


图 5-7 kink 孤波存在的参数区域

在文献〔39〕的公式，即式(4.62)中，当计及激励及损耗，并考虑水槽流体质量守恒时，可修改为

$$-2\mathrm{i}\omega\frac{\partial\xi_1}{\partial t}+c^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}+(\omega^2-\omega_0^2-2\mathrm{i}\omega\beta)\xi_1-2\omega^2\eta\xi_1^*-\Gamma\omega^2k^2|\xi_1|^2\xi_1=0 \quad (5.187)$$

式中:

$$\eta=\frac{\omega^2 a}{g};$$

$$\Gamma=\frac{9T^{-4}-12T^{-2}-3-2T^{-2}}{8};$$

$$c^2=\frac{\omega_0}{k}\frac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}k};$$

$$\omega_0=(gkT)^{1/2};$$

$$T=\tanh(hd)。$$

于是有 kink 解

$$\xi_1(x,\ t)=\frac{c\alpha}{\omega k}\left(\frac{2}{\Gamma}\right)^{1/2}\cdot\tanh[\alpha(x-x_0)]\mathrm{e}^{-I\delta} \quad (5.188)$$

式中:

$$\alpha^2=\frac{\omega^2-\omega_0^2+2\omega\mu}{2c^2};$$

$$\mu=(\omega^2\eta^2-\beta^2)^{1/2};$$

$$\tanh(2\delta)=\frac{\beta}{\mu}。$$

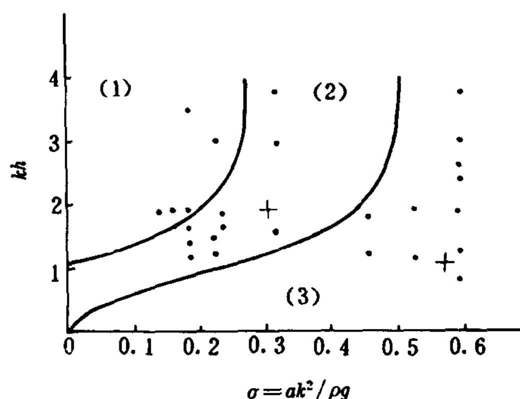
图 5.5(b) 中的放大图展示了 NLS 方程所不能描述的新结构。因为按照解式 (5.188)，当 $x=x_0$ 时 $\xi_1=0$，因而各 ξ_2 等也为零，因此 $\xi(x,\ t)=0$，但图 5－5(b) 中并不为零。文献〔49〕中指出，只要在 $\xi_2(x,\ t)$ 项中加入一项 $B|\partial\xi_1/\partial x|^2$，就可以描述这种现象。式中，$B=-0.04/\alpha^2A$。

我国学者周显初等在文献〔77〕中，也观察到了 kink 波。他们首先经过理论分析提出了计及表面张力的新方程，并预言有三个参数区域支持孤波解，其中之一是 kink 孤波解。图 5－8 给出了 $kd-\sigma$ 平面上的三个参数区域，并首次在区域 (3) 也实验发现了孤波 (呼吸子)；但在区域 (2)，只有在 $kd<1$，$\sigma\approx 0$ 的附近才观察到 kink 波；而在其它点，却观察到了类似于呼吸子的波。他们的主要结果是:

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\varphi_n(x,x_1,x_2,\cdots,y,Z;\ t,t_1,t_2,\cdots) \quad (5.189)$$

$$\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\xi_n(x,x_1,x_2,\cdots,y,Z;\ t,t_1,t_2,\cdots) \quad (5.190)$$

$$\varphi_1=\frac{\cosh k(Z+d)}{\cosh kd}[A(Z+y)+c.c.]+\varphi_{10}(x_1,\ t_1,\ x_1,\ t_2,\ \cdots) \quad (5.191)$$



图中：区域(1)及(3)支持传播及呼吸孤波；
区域(2)为理论上的 kink 孤波区；
Wu 等所观到的孤波处于区域(1)

图5-8　参数平面上的孤波存在区域及实验点

$$\xi_1=\frac{\omega^2}{g(1+\sigma)}[A(Z+y)-\text{c.c.}] \tag{5.192}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2=&\frac{\cosh 2k(Z+d)}{\cosh 2kd}[B_1A^2(Z^2+Y^2)+\text{c.c.}]+[B_2A^2ZY+\text{c.c.}]\\&+\frac{\cosh k(Z+d)}{\cosh kh}[B_0(Z+Y)+\text{c.c.}]+\varphi_{20}(x_1,\ t_1,\ x_2,\ t_2,\ \cdots)\\&+B(x_1,\ t_1,\ x_2,\ t_2,\ \cdots)t\end{aligned} \tag{5.193}$$

$$\begin{aligned}g\xi_2=&b_1[A^2(Z^2+Y^2)+\text{c.c.}]+b_2|A|^2\\&+[b_3|A|^2ZY^*+\text{c.c.}]+\frac{\omega^2}{g(1+\sigma)}[B_0(Z+Y)]\end{aligned} \tag{5.194}$$

式中:

$$\omega^2=gkT(1+\sigma)\quad T=\tanh kd\quad \sigma=\frac{\alpha k^2}{\rho g}\quad k=\frac{\pi}{b};$$

$$Z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ky-\omega t)}\quad Y=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ky+\omega t)}\quad x_n=\varepsilon^n x\quad t_n=\varepsilon^n t\ (n=1,2,\cdots);$$

$$B_1=\frac{3k^2\mathrm{i}}{4\omega}\frac{(1+T^2)[(1-T^2)+\sigma(3-T^2)]}{T^2-\sigma(3-T^2)};$$

$$B_2=\frac{-k^2\mathrm{i}}{2\omega}(1+3T^2);$$

$$b_1=\frac{k^2(T^2-3)}{2[T^2-\sigma(3-T^2)]};$$

$$b_2=2k^2(T^2-1);$$

$$b_3=\frac{k^3(T^2+1)}{1+4\sigma};$$

$$B=b_2|A|^2。$$

其中，激励的形式是:

$$f = \varepsilon^2 \gamma g \cos 2\omega_0 t;$$

$$\gamma = -\frac{4\omega_0^2 a}{\varepsilon^2 g} < 0$$

式中，a 为驱动振幅；$2\omega_0$ 为驱动频率；α 为表面张力系数；γ 为流体密度。

速度势的前面项慢变波幅满足:

$$\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial t_1^2} - gd\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_1^2} = 0 \tag{5.195}$$

$$2\omega \mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{\omega\omega'}{k}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \nu|A|^2 A + k^2(1+\sigma)(1-T^2)\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial t_1} A + \frac{\omega^2 \gamma}{2(1+\sigma)} A^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t_2} = 0 \tag{5.196}$$

式中:

$$\varepsilon^2 \omega_2 = \omega_0 - \omega;$$

$$\omega' = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} > 0; \tag{5.197}$$

$$\nu = \frac{k^4}{2}\left[\frac{(T^2-1)(9-T^2) + \sigma(3-T^2)(T^2-T)}{T^2 - \sigma(3-T^2)} + \frac{9\sigma T^2}{1+\sigma} + \frac{2(1+\sigma)}{1+4\sigma}(T^2+1)^2\right] \tag{5.198}$$

如果令

$$\Phi = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t_2} \tag{5.199}$$

并回到物理变量，可得

$$2\mathrm{i}\omega\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\omega\omega'}{k}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \nu|\Phi|^2 \Phi + \varepsilon k^2(1+\sigma)(1-T^2)\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial t}\Phi + 2\omega(\omega_0-\omega)\Phi \frac{-2\omega^2\omega_0^2 a\Phi^*}{g(1+\sigma)} = 0 \tag{5.200}$$

上式即为孤波基本方程。在上面推导过程中用到可解性条件 $\partial A / \partial t_2 = 0$ 和质量守恒方程

$$\int_{-L}^{L}\int_{0}^{b}\int_{-d}^{\xi} \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}Z = \text{常数}$$

当不考虑质量守恒时，ν应是

$$\nu = \frac{k^2}{2}\left[\frac{(T^2-1)(9-T^2) + \sigma(3-T^2)(T^2-7)}{T^2 - \sigma(3-T^2)} + \frac{9\sigma T^2}{1+\sigma} + \frac{2(1+\sigma)}{1+4\sigma}(T^2+1)^2 + 4(1+\sigma)(T^2-1)^2\right] \tag{5.201}$$

讨论非传播孤波，这时 $\partial / \partial t_1 = 0$，式 (5.200) 变成

$$\frac{\omega\omega'}{k}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\varepsilon^2\nu|A|^2A+2\omega(\omega_0-\omega)A-\frac{2\omega^2\omega_0^2}{g(1+\sigma)}A^*=0 \tag{5.202}$$

当$\nu>0$时，有呼吸孤子解

$$A=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{4}{\nu}(kT\omega_0^2a-\omega\omega_0+\omega^2\right]^{1/2}\operatorname{sech}\left[x\cdot\sqrt{\frac{2k}{\omega\omega'}(kT\omega_0^2a-\omega\omega_0}\right]$$

$$=\left[\frac{-2}{\nu}(\frac{\omega^2\gamma}{2(1+\sigma)}+2\omega\omega_0)\right]^{1/2}\operatorname{sech}\left[x_1\cdot\sqrt{\frac{-k}{\omega\omega'}\left(\frac{\omega^2\gamma}{2(1+\sigma)}+2\omega\omega_2\right)}\right] \tag{5.203}$$

当$\nu<0$时，

$$A=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{-2}{\nu}(\omega\omega_0-\omega^2-kT\omega_0^2a)\right]^{1/2}\tanh\left[x\cdot\sqrt{\frac{k}{\omega\omega'}(\omega\omega_0-\omega^2-kT^2\omega_0^2a)}\right]$$

5.5.2 倾斜水槽中的 kink 孤波解

下面从式 (5.66) 出发进行分析。根据式 (5.67)，由于$T^2\leqslant 1$，因此有总有$c^2>0$。于是，只有在$A<0$的参数区域，才能支持扭结 (kink) 波。这时，式 (5.69) 变换中的第三式应改为

$$\Phi=\sqrt{\frac{|A|}{2(\omega_1^2-\omega^2+a_1)}}\varphi \tag{5.204}$$

这时式 (5.70) 修改成

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-2|\Phi|^2\Phi-\Phi=\alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\mathrm{i}\alpha_2\Phi-\alpha_3\Phi^* \tag{5.205}$$

先讨论$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$的情况，设 kink 解为

$$\Phi=2u_0\tanh[2D(\xi-\nu\tau)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\xi+\mathrm{i}q\tau} \tag{5.206}$$

代入式 (5.205) 可得:

$$\left.\begin{aligned}D^2&=u_0^2\\p&=\frac{1}{2}\nu\\q&=-\left[\frac{1}{4}\nu^2+8u_0^2+1\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.207}$$

当$\nu=0$，$u_0=1/2$时，指数因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\tau}$，利用式 (5.69) 并注意到$\omega_1^2-\omega^2\approx 2\omega(\omega_1-\omega)\gg a_1$，因此，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\tau}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\approx\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_1+2(\omega_1-\omega)]t}$，代表孤波振动频率由在$\omega_1$之下的$\omega$变成（频移）在$\omega_1$之上的$\omega_1+2(\omega_1-\omega)$。在这种情况下，虽然也对应非传播解$\nu=0$，但$\partial\Phi/\partial\tau\neq 0$。要得到完全不随时间变化的 kink 解，在$\omega^2<\omega_1^2+a_1$的区域是得不到的。事实上，前面已看到，频率也移到了ω_1之上，在$\omega^2>\omega_1^2+a_1$的情况下，式 (5.69) 的第二、三式应改为

$$\xi=\sqrt{\frac{\left|\omega^2-\omega_1^2-a_1\right|}{c^2}}\,x$$

$$\Phi=\sqrt{\frac{|A|}{2\left|\omega^2-\omega_1^2-a_1\right|}}\,\varphi \tag{5.208}$$

这时式(5.70)改为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-2\delta_N|\Phi|^2\Phi-\delta_L\Phi=\alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\mathrm{i}\alpha_2\Phi-\alpha_3\Phi^* \tag{5.209}$$

式中，$\delta_N=+1$ 代表 $A<0$；$\delta_N=-1$ 代表 $A>0$；$\delta_L=+1$ 代表 $\omega^2<\omega_1^2+a_1$；$\delta_L=-1$ 代表 $\omega^2>\omega_1^2+a_1$。这时将式(5.206)代入式(5.209)(仍取 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$)可得:

$$\left.\begin{aligned}&D^2=\frac{u_0^2}{\delta_N}\\&p=\frac{1}{2}v\\&q=-\left[\frac{1}{4}v^2+\delta_N 8u_0^2+\delta_L\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.210}$$

可见，支持暗孤子(kink)的必要条件是 $\delta_N=1$，即 $A<0$。当 $\delta_L>0$ 时，即使 $v=0$(非传播)，$\partial\Phi/\partial\tau\neq 0$，但若 $\delta_L<0$(即 $\omega^2>\omega_1^2+a_1$)，这时若取 $v=0$，$u_0^2=1/8$，则支持完全非传播 kink 波。

下面考虑阻尼及激励的作用，暂取 $\alpha_1=0$，并只讨论 $\partial\Phi/\partial\tau=0$ 意义下的非传播 kink 解。设

$$\Phi(\xi)=2u_0\tanh[2D(x-x_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \tag{5.211}$$

代入式(5.209)得:

$$D^2=\frac{u_0^2}{\delta_N}$$

$$\sin 2\varphi_0=-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$$

$$u_0^2=\frac{\alpha_3\cos 2\varphi_0-\delta_L}{8\delta_N}=\frac{-\delta_L\pm\sqrt{\alpha_3^2-\alpha_2^2}}{8}$$

可见，$\delta_N=1$(即 $A<0$)是支持 kink 波的坚定不移的条件。上式中“±”选择之差别就是 $2\varphi_0$ 的两种差值为 π 的差别；究竟选择哪一个，由实验现象确定。如果实验中孤波幅值是随驱动幅值增加而增加的(如图 6－1 中的孤子幅值就是这样)，这时，应取“+”；否则，应取“−”(文献〔49〕中的式(4)相当于取“+”，然而文献〔77〕中的式(32)相当于取“−”——是阻尼 $\alpha_2\to 0$ 的极限情形)。这两种选取都是数学上允许的解。实际情况究

竟属于哪类，就由实验现象确定，也许两种现象在各自适当的条件下都会出现。无论取“+”还是取“−”，在$\delta_L=-1$(即$\omega^2>\omega_1^2+a_1$)时，总是支持 kink 波；但取“−”时，α_3(即驱动幅度)不能过大，即存在一上截止驱动幅度$\alpha_3^2<1+\alpha_2^2$。如果取“+”，若α_3^2足够大，以致$\alpha_3^2>1+\alpha_2^2$，这时即使$\delta_L=+1$ 即$\omega^2<(\omega^2+a_1)$也支持 kink 波。无论上述如何情况，总是存在一个下截止驱动幅值$\alpha_3>\alpha_2$。

5.5.3　倾斜水槽中 kink 的移动

下面的分析从式 (5.205) 开始，先考虑$\alpha_2=\alpha_3=0$的情况，这时需要作变换

$$\Phi=u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau}\tag{5.212}$$

于是式(5.205)化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2|u|u=\alpha_1\frac{\partial u}{\partial\xi}\tag{5.213}$$

再作变换$t=-\tau$，$\xi=x$，则

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2|u|^2u=\varepsilon R[u]=-\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}\tag{5.214}$$

上式与式 (2.250) 的形式相同，于是利用式 (2.246)~ 式 (2.249)，可得试探解 (绝热近似)

$$u(x,t)=2\eta_0(t)\tanh\{2\eta_0[x-x_0(t)]\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mu(t)[x-x_0(t)]+\mathrm{i}\varphi(t)}\tag{5.215}$$

中的慢变参数的演化是:

$$\frac{\mathrm{d}\eta_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh Z\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon R[\omega]\mathrm{d}Z}{\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z}\tag{5.216}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=4\mu-\frac{3}{16\eta_0^2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^2 Z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon R[u]\mathrm{d}Z\tag{5.217}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^2 Z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cdot\varepsilon R[u]\mathrm{d}Z}{\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z}\tag{5.218}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=4(2\eta_0^2+\mu^2)-2\mu\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon R[u]\tanh Z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\left[2\eta_0\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z\right]}\tag{5.219}$$

式中:

$$Z = 2\eta_0(x - x_0)$$
$$\theta = -2\mu(x - x_0) + \varphi$$

推导是简单的，证明如下：把式 (5.215) 代入式 (2.246)，

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\eta_0^2 \tanh^2 Z \mathrm{d}x = 2\eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2 Z \mathrm{d}Z$$

上式积分是不存在的，但应从 2.6.8 节中分析的意义上去理解，这里保留着形式上的积分（对于水槽，可理解为沿长度方向在两端壁间积分）。把式 (5.215) 代入式 (2.249)，并考虑

$$\frac{\delta I_1}{\delta u} = u^*$$
$$\frac{\delta I_1}{\delta u^*} = u$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\left[2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta I_k}{\delta u} \varepsilon R[u] \mathrm{d}x\right]$$
$$= 2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} u^* \varepsilon R[u] \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \tanh Z \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \varepsilon R[u] \mathrm{d}Z$$

因此有

$$2\frac{\mathrm{d}\eta_0}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2 Z \mathrm{d}Z = 2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \tanh Z \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \varepsilon R[u] \mathrm{d}Z$$

此即式(5.216)。再由动量表达式

$$I_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^*\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]\mathrm{d}x = -\,\mathrm{Im}\int u^*\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$$

由于

$$u^*\frac{\partial u}{\partial x} = [(2\eta_0)^3 \tanh Z \cdot \operatorname{sech}^2 Z - (2\eta_0)^2 \mathrm{i}2\mu \tanh^2 Z]$$

因此

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\eta_0)^2 2\mu \tanh^2 Z \mathrm{d}x = 2\eta_0\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2 Z \mathrm{d}Z$$

现在求 $\delta I_2/\delta u$ 和 $\delta I_2/\delta u^*$：

$$\delta u \to \delta I_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^*\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) - \delta u\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^*\mathrm{d}(\delta u) - \delta u\frac{\partial u^*}{\partial x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \mathrm{d}x$$

因此:

$$\frac{\delta I_2}{\delta u} = -\mathrm{i}\frac{\partial u^*}{\partial x}$$

$$\frac{\delta I_2}{\delta u^*} = i\frac{\partial u}{\partial x}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot \varepsilon R^*[u] + \frac{\partial u^*}{\partial x}\varepsilon R[u]\right]\mathrm{d}x = -2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u^*}{\partial x}\varepsilon R[u]\mathrm{d}x$$

$$= -2\mathrm{Re}\int[2\eta_0 \mathrm{sech}^2 Z + \mathrm{i}2\mu \tanh Z \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon R[u]\mathrm{d}Z$$

因此

$$2\eta_0\cdot 2\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z + 2\mu\cdot 2\frac{\mathrm{d}\eta_0}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z$$

$$= -2(2\eta_0)\mathrm{Re}\int \mathrm{sech}^2 Z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon R[u]\mathrm{d}Z + 2(2\mu)\mathrm{Im}\int\tanh Z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon R[u]\mathrm{d}Z$$

此即式 (5.218)。

对于式 (5.217) 及式 (5.219) 是可以用如下方法：将式 (5.215) 代入式 (5.214) 可得

$$\mathrm{i}\Big\{[2\eta'(t)\cdot \tanh Z + 2\eta_0 2\eta_0'(t)(x-x_0)\mathrm{sech}^2 Z - (2\eta_0)^2 x_0'(t)\cdot \mathrm{sech}^2 Z]$$

$$+ 2(\mathrm{i}2\mu)(2\eta_0)^2\mathrm{sech}^2 Z\Big\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \Big\{-2\eta_0\tanh Z[\varphi'(t) - 2\mu'(t)(x-x_0) + 2\mu x'_0(t)]$$

$$+ [2(2\eta_0)^3\mathrm{sech}^2 Z\tanh Z + (2\mu)^2 2\eta_0\tanh Z] + 2(2\eta_0)^3\cdot\tanh^3 Z\Big\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \varepsilon R[u]$$

两端作操作$\int[\cdot]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{sech}^2 Z\mathrm{d}Z$，取虚部得

$$-4\eta_0^2 x_0'(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^4 Z\mathrm{d}Z + 2(2\mu)(2\eta_0)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^4 Z\mathrm{d}Z$$

$$= \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon R[u]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{sech}^2 Z\mathrm{d}Z$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^4 Z\mathrm{d}Z = 4/3$，因此由上式可给出式 (5.217)。若两端作操作 $\int[\cdot]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cdot\tanh Z\mathrm{d}Z$，则实部给出

$$- 2\eta_0[\varphi'(t)+ 2\mu x_0(t)]\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z + 2(2\eta_0)^3\int \operatorname{sech}^4 Z\mathrm{d}Z$$

$$+ (2\mu)^2\cdot 2\eta_0\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2 Z\mathrm{d}Z + 2(2\eta_0)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^4 Z\mathrm{d}Z = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon R[u]\mathrm{e}^{i\theta}\tanh Z\mathrm{d}Z$$

由上式可给出式(5.219)。

把 $\varepsilon R[u]= -\alpha_1\partial u/\partial x$ 代式 (5.216)~ 式 (5.218) 得:

$$\frac{\mathrm{d}\eta_0}{\mathrm{d}t} = 4\alpha_1\mu\eta_0 \tag{5.220}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = 4\mu \tag{5.221}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \alpha_1(2\eta_0)^2\frac{4}{3(L_1-2)} \tag{5.222}$$

其中，L_1 是水槽的归一化长度，是从 $\tanh^2 Z = 1-\operatorname{sech}^2 Z$ 的积分而来的，按照 5.5 节中的分析，η_0 是缓慢变化的，在一级近似下

$$v = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = \frac{4^3}{3(L_1-2)}\alpha_1\eta_0^2 t$$

在实验室坐标系中

$$V = +\frac{\sqrt{c^2(a_1+\omega_1^2-\omega^2)}}{2\omega}v = \frac{4^3}{3(L_1-2)}\eta_0^2\frac{b_1+b_2}{a_1+\omega_1^2-\omega^2}t \tag{5.223}$$

已注意到在得到式 (5.214) 时，在时间上又反了一次号，类似于式 (5.101)，平均速度为

$$\overline{V} = \sqrt{\frac{4^2}{6(L_1-2)}(2\eta_0)^2\frac{b_1+b_2}{a_1+\omega_1^2-\omega^2}x} \tag{5.224}$$

L_1 由式 (5.69) 计算并引入λ，则

$$L_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2-\omega^2+a_1}{c^2}}L$$

$$\lambda = \frac{b_1+b_2}{a_1+\omega_1^2-\omega^2} \tag{5.225}$$

L 是水槽实长，即 $L=76.2$ cm，代入 $b=5.71$ cm(宽)，$d=1.00$ cm(水深)，得到 $k=0.55$，$T=0.618\,7$，$\omega_1^2 = kTg = 333.45$，$2f_1=5.81$，实验中驱动频率范围是在 $2f=5.20\sim 5.40$ Hz，$c^2=853.6$，$b_1=136.1\beta$，$b_2=604.9\beta$，忽略 a_1，当 $2f=5.37$ Hz 时，$L_1=0.239L=18.22$，$\lambda=741\beta/48.8=15.2\beta$，

$$2\eta_0 = \Phi_m = \sqrt{\frac{|A|}{2(\omega_1^2-\omega^2+a_1}})\varphi_m = 0.034\varphi_m$$

$$\varphi_m = \frac{g}{\omega}\xi_{1max} = \frac{g}{2\omega}\xi_{max} = 14.5\xi_{max}$$

$$|A| = \frac{1}{8}k^4[9T^{-2} - 2T^4 - 3T^2 - 12] = 0.115$$

这里，A 是按文献中的〔49〕公式计算的。由文献〔49〕中的图 3 估计，$\xi_{max} = 0.45$ cm（当 $2f = 5.37$ Hz），因此 $2\eta_0 = 0.493\xi_{max} = 0.222$，于是将 $\overline{V} = \sqrt{0.123x}$，$\beta = 0.02° = 0.02 \times 0.0175$ 代入可得，$\overline{V} = 0.00657\sqrt{x}$；当 $x = 25$ cm 时，$\overline{V} = 0.033$ cm/s。但按文献〔49〕中的图 3，$\overline{V}$ 的实验值在 4 cm/min= 0.066 67 cm/s 左右，理论值偏小，可能是由于表面张力被忽略了，这时，两壁对 kink 运动的阻碍作用的大小还难以估计。

第 6 章

双水槽耦合孤波观察及其理论分析

6.1 引　　言

自吴君汝等人[37]于 1984 年首次报道非传播孤立波至今已整整 10 年，其间国内外学者对非传播孤立波的理论和进一步实验都做了积极的并且是富有成效的探讨(见文献〔36～47,65,70,76,77〕)，文献〔77〕指出，水槽孤立波是非线性科学中的一个典型现象。1990 年，Denardo 等人[49]的实验发现了水槽 kink 孤立波，把非传播孤立波的研究大大向前推进了一步。但是，目前的理论及实验都是针对单水槽中的非耦合孤波现象的。然而，非线性耦合是广泛存在的一类非线性现象，如光纤中双通道孤子的耦合[81～84]，这种耦合将带来更为广泛的一类非线性现象，如能量转换、分叉、混沌等等。本书作者之一受光孤子耦合的启发，设计并构造出双水槽耦合实验及其装置，并观察到孤波耦合的各种现象，这将为经历了 10 年的单水槽非传播孤波研究带来新的研究课题。在本章中，首先，描述实验现象；然后，建立耦合孤波的支配方程即耦合非线性 Schrodinger(NLS)方程组；最后，给出一类特殊解，即稳态耦合孤波解。

6.2 实验装置及主要实验现象

实验装置同前人的类似，不同的是用耦合双槽代替了过去的单槽。耦合双槽横截面如图 6–1 所示，即把宽槽沿长度方向加一块不插到底的隔板，构成双槽，底部是连通的，因此，双槽可通过底部发生耦合。整个水槽可充同一种液体(如水)，也可充两种不互溶的液体(如上层为油，下层为水，即$\rho_1=\rho_{油}$，$\rho_2=\rho_{水}$)。还有第三种耦合方式，即隔板是插到底的，但隔板沿垂直方向(即与水槽中水的振动相同的方向)开有许多平行细长缝，缝宽应大于毛细长度，使耦合能达到有效的程度；但缝宽又不能过大，缝距不能过小，以使在隔板上不致于明显地破坏边界条件$\partial\varphi/\partial y=0\ (y=0)$。我们已观察了前两种方式的实验现象，第三种方式将是我们进一步研究的课题。限于篇幅，本文只描述第一种方式的实验现象及其理论分析；第二种耦合的现象及其分析拟另文报道。实验中分别采用了三种尺寸的耦合槽，即短槽$[L\times(b_1+b_2)=15.1\text{ cm}\times 4.55\text{ cm}$，长槽$[L\times$

(b_1+b_2)= 35.0 cm× 4.55 cm] 和宽长槽 [$L\times(b_1+b_2)$= 35.0 cm× 7.8 cm]。在三种槽中都能观察到耦合孤波。实验时，两端壁放置一些棉花形成吸收边界以模拟无穷边界，这样可抑制 Stokes 模，从而便于形成和稳定孤波。对长水槽，还需在水中加入少量皂粉，更有利于形成和稳定孤波。由于短槽特别有利于形成和稳定孤波，因此在长槽中孤波无法维持的情况下，在短槽中仍可维持，因而在短槽中能观察到更多长槽所观察不到的现象。非等宽双槽也同样具有与等宽槽几乎相同的特性(只要宽度较接近)。不同的是，各槽中孤子稳定度(这里指抗破坏能力)不同，这取决于驱动频率是偏向支持里槽的还是外槽的孤波。比如说，宽槽稳定孤波驱动频率区域中心较窄槽的略低，如果驱动频率更接近前者，我们就说偏向支持宽槽中的孤子。

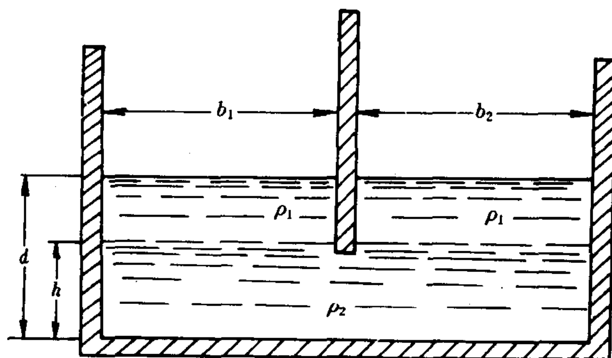


图 6–1　耦合双槽横截面示意图

对于双槽耦合孤子，同相与反相概念与单槽看起来截然不同。当双槽中孤子相对中间隔板具有相同状态时，称为同相；反之，称为反相，如图 6– 2 所示。

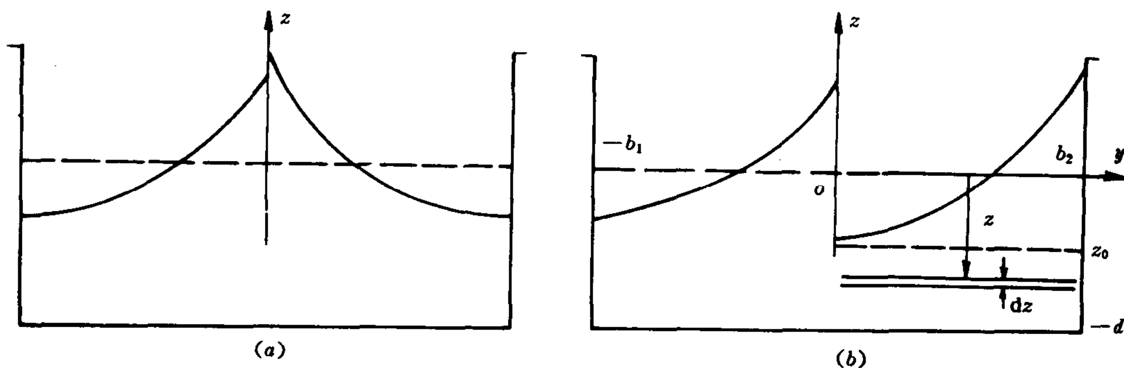


图 6–2　同相孤波横截面示意图

(a) 规定为同相的；(b) 规定为反相的

事实上，如果用对称性来区分同相和反相，则双槽和单槽中的同相和反相却具有相同的意义，即相对孤波系统中心是对称的，称为同相；反对称的称为反相。对单槽，孤波系统中心是沿长度方向的中心；而对双槽，中心则应是沿长度及宽度方向的中心。这里强调的是状态对称性，不是物理量的严格对称性。下面叙述耦合孤波的几种典型特点。

(1) 产生一个孤波需要一定的驱动阈值，但还存在另一个驱动阈值，能使孤子得以维

持。这两个阈值分别称为孤子的产生阈值和维持阈值，后者低于前者。当驱动高于产生阈值时，孤子自动产生，产生阈值主要取决于表面张力及两端棉花放置情况。当孤子产生之后，降低驱动幅度，孤波仍可维持；当驱动低于维持阈值时，孤子不再稳定，最后消失；当驱动介于两个阈值之间时，可通过手拨人工地产生孤子。实验发现，两个孤子、三个孤子及四个孤子都有相应的产生阈值及维持阈值，而且各种孤子的稳定参数范围都有重叠部分，因此，在同样激励幅度及频率下，可能维持一个或两个孤子，或者两个或三个孤子。

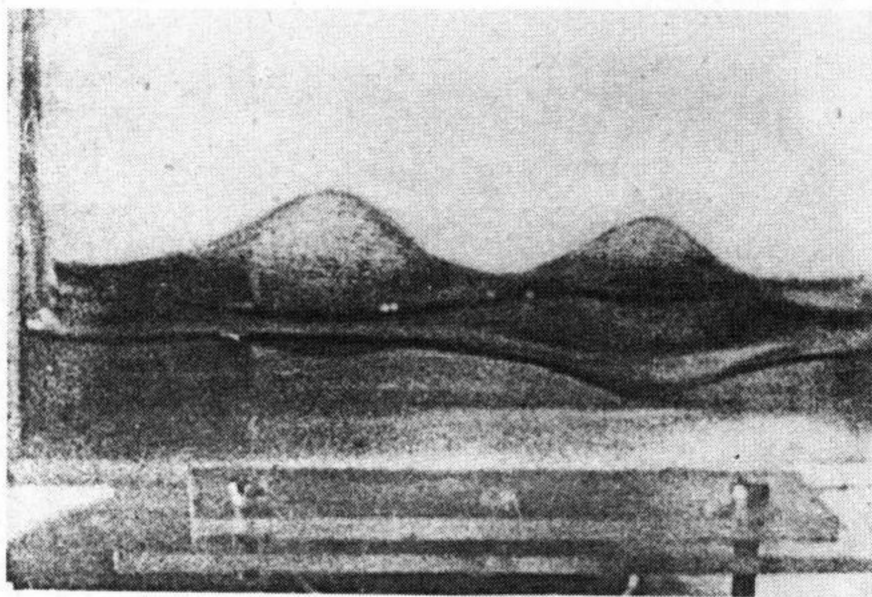
对等宽槽情况，例如，当$b_1 = b_2 = 2.275$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.0$ cm，$2f=11.26$ Hz（激励频率），且当驱动幅度的有效值$\Delta_e = 0.362\sim 0.418$ mm(由 Bruel & Kj∂er 4393 型加速度计所测，驱动的峰—峰值$2\Delta = 2\sqrt{2}\Delta_e$)时，只能在双槽中的里槽($b_2$)或外槽($b_1$)任意一个槽中维持一个孤子。当$\Delta_e > 0.418$ mm时，可维持一对孤子，分别处于里外槽等宽槽应该是这样，对于宽度差较大的非等宽槽，则在同一槽中出现两个孤子，另一槽仍处在阈值之下），如果继续增加Δ_e，则出现三个孤子，然后是四个孤子。

作为例子，对$b_1 = 2.25$ cm，$b_2 = 2.30$ cm，$d = 2.0$ cm，$h = 0.5$ cm，$2f = 11.40$ Hz和$\Delta_e = 0.403$ mm的非等宽槽，手拨可在里槽产生一个孤子，由于这时外槽孤子对比里槽的稳定，故能量由里槽转移到外槽，结果是外面孤子生成，而里面的跨台；当Δ_e增加到0.424 mm时，外槽孤子仍维持着；但当$\Delta_e = 0.445$ mm时，里槽和外槽都可维持孤子，这时耦合成为孤子相互支持的主要原因。即若抑制外槽孤子，里槽也随将跨台；若停止抑制，里外槽同相孤子对立即恢复。当$h = 0.7$ cm，$2f = 11.40$ Hz，$\Delta_e = 0.400$ mm时，手拨只能激发一个孤子（里、外槽均可）；当$\Delta_e = 0.532$ mm时，里槽孤子与驱动共同作用可激发出外槽孤子，形成孤子对，$\Delta_e = 0.541$ mm时，在里槽孤子激发下外槽孤子幅度变大。当$2f = 11.90$ Hz，$\Delta_e = 0.415$ mm时，可激发两个孤子；当$\Delta_e = 0.430$ mm时能激发三个孤子；当$\Delta_e = 0.448$ mm时能激发四个孤子；且第四个能自动激发。

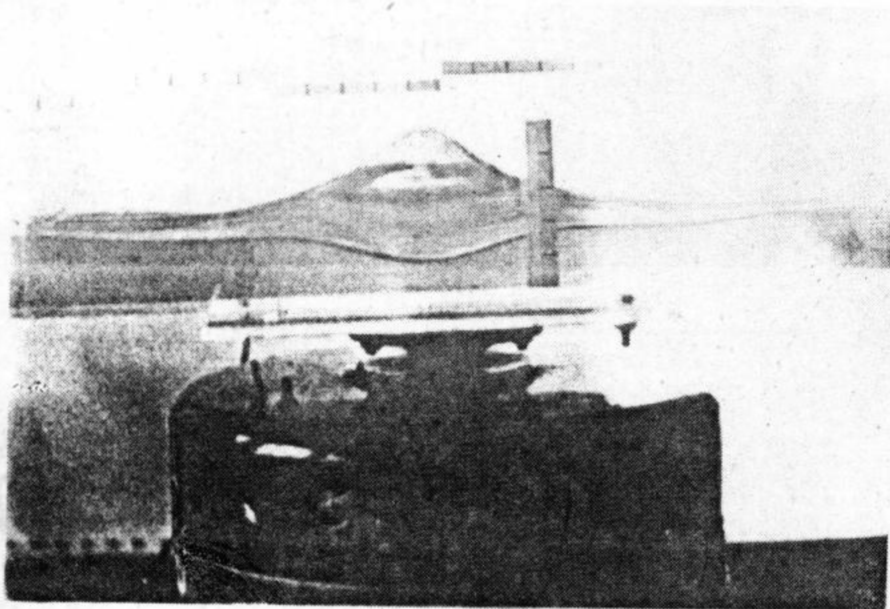
(2) 实验中发现，无论是等宽还是非等宽槽，稳定情况下，只有同相或反相两种形式的耦合孤子；当然在非稳定或过渡状态，不能说总是这样。图 6–3 及图 6–4 给出了短槽，宽长槽及长槽中的孤波照片。

(3) 耦合孤子相互作用与单槽孤子相互作用非常不同。同相耦合孤子合并后，无什么情况都不再分开，反相耦合孤波的位置可以重叠。但在单槽中，只要驱动足够大，同相孤子合并后再分开并是周期性的，但反相孤子是绝对不可能赶到一起去的。然而，反相耦合孤子是可以的，只要每个槽中孤子足够稳定(当然，多数情况是，当两孤子被赶到很近的距离时，耦合孤子跨台)。图 6–5 给出了同相与反相孤子的相互作用曲线。反相孤子总是排斥到一定的距离后稳定下来。在一定条件下，在同地也可产生反相孤子对，如图 6–5(b)中的下面三条相互作用曲线都是从(0, 0)坐标点开始的。

(4) 反相孤子稳定时的间距以及同相孤子的合并时间(即从产生到合并所用时间)与驱动幅值和频率，以及槽的长度有关。前者决定了孤波的幅度及宽度，因而决定了双孤波叠加程度，从而决定了耦合作用(以及与两端壁作用)的大小。因为端壁对孤波也有作用力，故稳定距离及合并时间因情况而异的。从图 6–5 中可看出几种情况的稳定间距和合并时



(*a*)

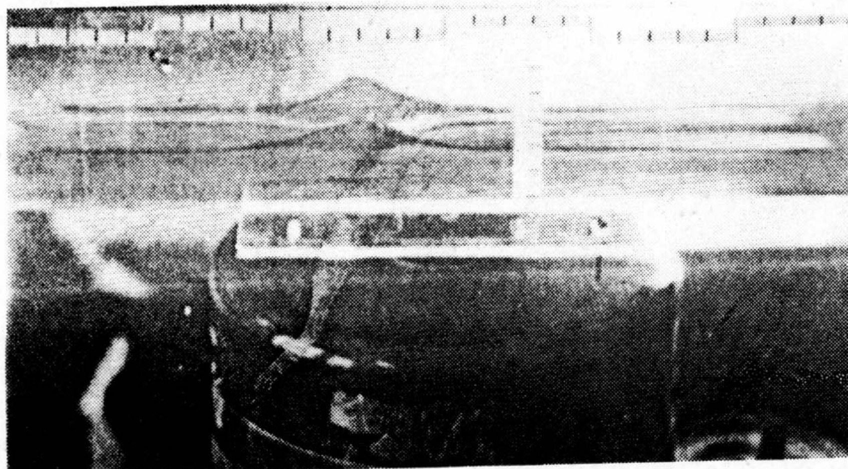


(*b*)

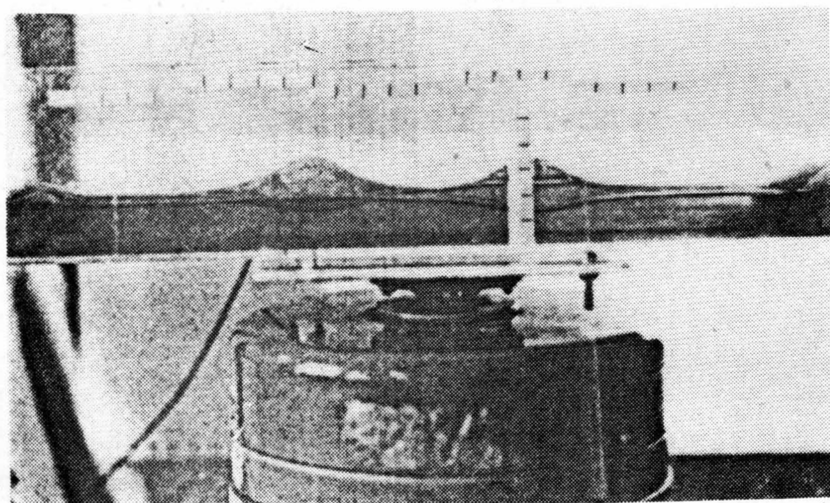
图 6－3　短槽及宽长槽中的耦合孤波

(*a*) 为短槽中的反相耦合孤波，$b_1 = 2.20$ cm，$b_2 = 2.35$ cm，$d = 1.8$ cm，$h = 0.9$ cm，$2f = 11.30$ Hz，$\Delta_e = 0.468$ mm；(*a*)中的标尺刻度可由螺帽间距进行换算。

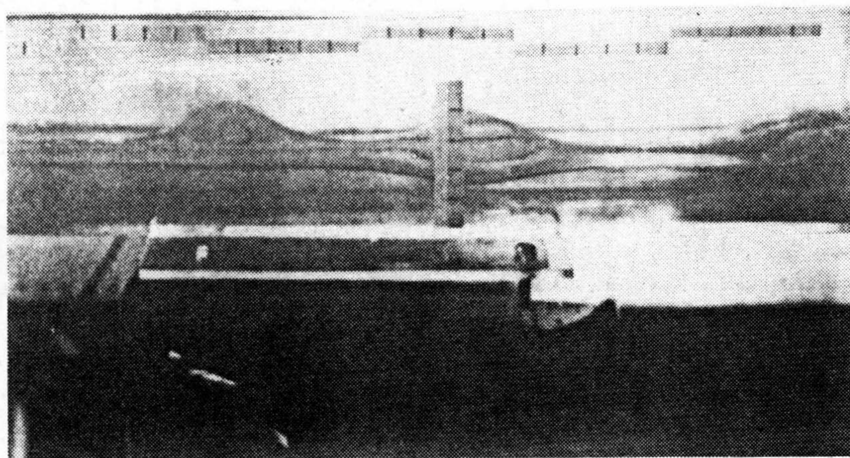
(*b*) 为宽长槽中的同相耦合孤波，$b_1 = 3.85$ mm，$b_2 = 3.95$ mm，$d = 2.0$ cm，$h = 1.0$ cm，$2f = 8.20$ Hz，$\Delta_e = 0.383$ mm；(*b*)中标尺刻度为cm。



(*a*)

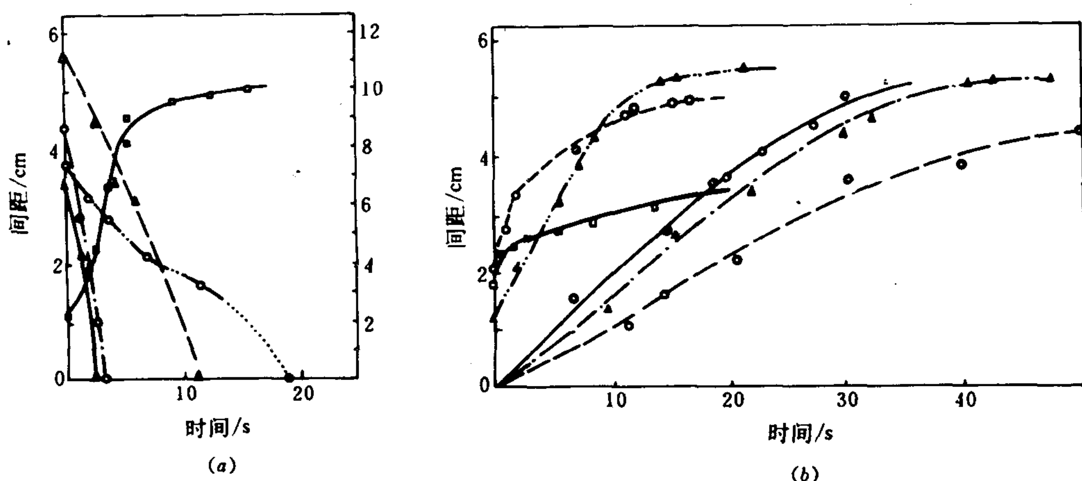


(*b*)



(*c*)

图 6－4　长槽中的耦合孤波 (槽宽 $b_1 = 2.20$ cm，$b_2 = 2.35$ cm，$d = 2.0$ cm，$2f = 11.40$ Hz)
(*a*) 同相耦合孤波，$h = 1.0$ cm，$\Delta_e = 0.383$ mm　(*b*) 反相耦合孤波，$h = 1.0$ cm，$\Delta_e = 0.383$ mm
(*c*)同相耦合孤波，且$h = 1.2$ cm，$\Delta_e = 0.391$ mm



短槽宽度为 $b_1=2.20$ cm，$b_2=2.35$ cm，$d=1.8$ cm，$h=0.9$ cm。

在 (*a*)中，实线是 $\Delta_e=0.462$ mm，$2f=11.26$ Hz；虚线和点画线是 $\Delta_e=0.470$ mm，$2f=11.00$ Hz，且虚线是外槽孤子在左边的情况，点画线是在右边的情况，平均斜率(即速度)的差异是由于槽宽不严格均匀所致；双点画线是 $\Delta_e=0.422$ mm，$2f=11.26$ Hz；粗实线是长宽槽中反相孤子对的曲线，其间距由图中右边标尺给出(其它曲线由左边给出)$b_1=3.85$ cm，$b_2=3.95$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.4$ cm，$\Delta_e=0.315$ mm，$2f=8.21$ Hz。

在(*b*)中，实线和虚线分别是异地和同地产生的反相孤子对(前者需人工赶到一起)，其中 $\Delta_e=0.470$ mm，$2f=11.00$ Hz；点画线是 $\Delta_e=0.462$ mm，$2f=11.26$ Hz；粗实线是 $\Delta_e=0.422$ mm，$2f=11.26$ Hz；短虚线是 $\Delta_e=0.422$ mm，$2f=11.26$ Hz；双画点线是 $\Delta_e=0.442$ mm，$2f=11.26$ Hz。

图 6-5　同相与反相耦合孤子的相互作用曲线(孤子间距随时间的变化曲线)

间。此外，还有下述实验记录：当短槽 $b_1=b_2=2.75$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.0$ cm，$2f=11.26$ Hz，$\Delta_e=0.448$ mm 时，稳定距离是 5.8 cm，合并时间约 91 s(从 6.0 cm 开始)；当 $\Delta_e=0.561$ mm 时，稳定距离是 4.1 cm；当 $b_1=2.25$ cm，$b_2=2.30$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.3$ cm，$f=11.90$ Hz，$\Delta_e=0.415$ mm 时，稳定间距是 5.4 cm；当 $2f=11.40$ Hz，$\Delta_e=0.422$ mm 时，稳定间距是 5.6 cm；对长槽 $b_1=2.20$ cm，$b_2=2.35$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.0$ cm，$2f=11.40$ Hz，$\Delta_e=0.354$ mm 时，稳定间距是 8.0 cm。

(5) 当耦合很强时，异地产生同相孤子后，孤子立即迅速合并，再也不能分离。若人工驱赶一个孤子，使之与另一个孤子分离，则这个孤子会跟随第一个孤子来回运动，两个孤子紧紧地束缚在一起。出现这种情况的实验参数是：短槽 $b_1=2.25$ cm，$b_2=2.30$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.5$ cm，$\Delta_e=0.501$ mm，$2f=11.40$ Hz，这时反相孤子极难产生；在长宽槽中 ($b_1=3.85$ cm，$b_2=3.95$ cm，$d=2.0$ cm，$h=1.0$ cm)，当 $2f=8.30$ Hz，$\Delta_e=0.420$ mm 时，同相孤子非常稳定，其中任意一个孤子都无法消灭，人工消灭后，立即产生；当 $2f=8.20$ Hz，$\Delta_e=0.393$ mm 时，外槽孤子出现周期性地覆灭，周期约为 109 s；当 Δ_e 降到 0.340 mm 时，仍支持同相孤子对，而且无法赶开，反相孤子难产生；当 $2f=$

8.10 Hz，$\Delta_e = 0.344$ mm 时，也出现周期性覆灭，但当 $d= 2.0$ cm，$h= 0.6$ cm(耦合降低)，异地可产生反相孤子，而同相只能在同地产生(异地不能)，这时，若减小 d 值(即耦合增大)，则又只能在异地和同地产生同相孤子对。

(6) 耦合较强的情况下，反相耦合很难同地产生(弱耦合时是可以的)，异地产生的反相耦合孤子也难用人工方法驱赶到一起。事实上，当被驱赶的孤子靠近另一个孤子时，后者也随第一个孤子沿同一方向运动直到端壁附近；这时，若继续驱赶，则孤子跨台，除非激励幅值足够大。这种情况下，从后面的耦合 NLS 方程可看到，激励项相对耦合项变大了，也就等价于削弱了耦合项的作用。支持这种情况的实验参数是：短槽 $b_1 =$ 2.25 cm，$b_2 = 2.30$ cm，$d= 2.0$ cm，$h= 1.3$ cm，$2f= 11.40$ Hz，$\Delta_e = 0.422$ mm，这时异地同相孤子对难产生。但同地同相孤子对可产生且无法手工赶开，一赶开就消失。还有一种情况是：长槽中，$b_1 = 2.20$ cm，$b_2 = 2.35$ cm，$d= 2.0$ cm，$h= 1.0$ cm，$2f=$ 11.40 Hz，$\Delta_e = 0.354$ mm，在同样参数下，短槽中难产生反相孤子，但在长槽中就不一定这样。因为当孤波较宽时，槽长容不下两个孤子——重叠部分太多，耦合排斥很大，导致模式不稳，以至在长槽中仍可能产生反相孤子。

(7) 在某些强耦合中，同相孤子对中任意一个孤子是对方存在(稳定)的前提，即人工产生孤子对时，必须同时“培养”(即抑制杂波)两个槽中的孤子，而不能像通常的做法：先在一个槽中拔出一个，再在另一槽中拔出另一个，这时，让孤子自动产生往往较困难。对于已产生的孤子对，若要破坏其中一个，另一个也随之受到破坏；如果在还未完全跨台之前停止破坏，则孤子对即立刻恢复。观察这种现象的实验参数大概是(注意：对两端棉花放置较敏感)：短槽中上层为油，下层为水(水深 $h= 2.8$ cm，油深 0.6 cm)，$2f= 10.70$ Hz，$\Delta_e = 0.379$ mm，$b_1 = 2.20$ cm，$b_2 = 2.35$ cm。

6.3 耦合孤波动力学方程——耦合 NLS 方程的建立

严格的耦合方程应从流体力学方程组出发，这个问题由四个自由面上的运动学方程和动力学方程以及四个壁和底面的边界条件构成，这是一个比较复杂的问题，其分析，我们将另文专门给出。考虑到实验观察中发现，插板以下的流体流动极其缓慢，尤其是在水平方向，在实验中投入轻浮物，其运动平均速度不超过 1.0 cm／s(板插入较浅时)，一般在 0.5 cm／s 左右，然而孤波峰值处平均速度约为 10.0 cm／s，因此，插板以下的流体流动平均速度要比板上的流体流动速度小一个数量级。因此，槽底部的连通对振动模式不会产生重要影响。于是，作为近似分析，在每个槽中(包括插板以下)，解的表达式仍用单槽中的形式，如按照 Larraza 等在文献〔39〕中的式(10)构造解，即

$$\psi = \frac{\cosh k_n(z+d)}{\cosh k_n d}\cos k_n y[\psi_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.}] + [\psi_{0n}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t} + \mathrm{c.c.}] + \frac{\cosh 2k_n(z+d)}{\cosh 2k_n d}\cos 2k_n y\{[\psi_{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t} + \mathrm{c.c.}] + \psi_{2n}^{(0)}\} + O(\varepsilon^3) \tag{6.1}$$

式中，$k_n = \pi / b_n$，$n=1$，2 分别标志外槽和里槽。如果把 $z=z_0$ 之上的流体抽象为振

动流体，把其下的流体抽象(仅仅是抽象)为静止流体，则 $z=z_0$ 处的界面实质上被抽象成上层流体的一个刚性局域“底面”，这个准局域底面也以一定的频率或加速度$a_n(z_0)$振荡，这个振荡与参数激励振荡合成，构成这个局域底面的总振荡。于是，总加速度为 $a_0-a_n=\Delta\Omega^2\cos(\Omega t+\varphi_0)-a_n(z_0)$。Larraza 等在文献〔39〕中的(5)式中的 $g\xi$ 项应修为$[g+(a_0-a_n)]\xi$，这里 a_n 前有一负号，是因为当 $a_n<0$(向下)时，正好与重力加速度同向，$\Omega=2\omega$ 为激励频率，Δ 为激励幅值，φ_0 为激励初相。$a_n(z_0)$ 可按下面方法计算，在下层流体(即 $-d<z<z_0$)中，任取一薄层(厚为 dz)，其加速度为 $a_n(z)$，于是有

$$S_n\rho_2 \mathrm{d}z a_n(z)=\mathrm{d}p_n(z)S_n \tag{6.2}$$

式中，$S_n=L\times b_n$。

在下层流体中，积分上式

$$p_n(z_0)=p_n(-d)+\int_{-d}^{z_0}\rho_2 a_n(z)\mathrm{d}z \tag{6.3}$$

再对z_0微分上式有:

$$\begin{aligned}a_1(z_0)&=\frac{1}{\rho_2}\frac{\mathrm{d}p_1(z_0)}{\mathrm{d}z_0}\\ a_2(z_0)&=\frac{1}{\rho_2}\frac{\mathrm{d}p_2(z_0)}{\mathrm{d}z_0}\end{aligned} \tag{6.4}$$

由于质量守恒和不可压缩性，因此应该有 $a_1(z_0)=-a_2(z_0)(b_2/b_1)\approx-a_2(z_0)$(只考虑宽度相近的情况)，于是上式为:

$$\begin{aligned}a_1(z_0)&=\frac{1}{2\rho_2}[p'_1(z_0)-p'_2(z_0)]\\ a_2(z_0)&=\frac{1}{2\rho_2}[p'_2(z_0)-p'_1(z_0)]\end{aligned} \tag{6.5}$$

上面$a_n(z)$及$\rho_n(z)$都应是对 y 方向的平均值，因此，

$$p_n(z_0)=\frac{1}{b_n}\int_0^{b_n}\left[\psi_{nt}+gz+\frac{1}{2}(\nabla\psi_n)^2\right]\bigg|_{z=z_0}\mathrm{d}y \tag{6.6}$$

将式(6.1)代入式(6.6)可得

$$p_n(z_0)=gz_0+(\psi_{0n}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}+\mathrm{c.c.})+\frac{k_n^2}{4}\frac{\cosh[2k_n(z_0+d)]}{[1+\cosh(2k_n d)]/2}(\psi_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{c.c.})^2 \tag{6.7}$$

由文献〔39〕中的式(13)，$\psi_{0n}^{(2)}$是与z_0无关的，并考虑到$z_0+d=d-|z_0|=h$，因此:

$$p'_n(z)=g_0+2\rho_2 G_n|\psi_n|^2+\rho_2 G_n(\psi_n^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}+\mathrm{c.c.}) \tag{6.8}$$

$$\rho_2 G_n = k_n^3 \frac{\sinh(2k_n h)}{1+\cosh(2k_n d)} \tag{6.9}$$

于是，由式(6.5)有

$$a_n(z_0)=\left[G_n|\psi_n|^2 - G_m|\psi_m|^2\right] + \frac{1}{2}G_n(\psi_n^2 e^{i2\omega t} + \text{c.c.}) - \frac{1}{2}G_m(\psi_m^2 e^{i2\omega t} + \text{c.c.});$$

$$n,\ m = 1,\ 2;\ n \neq m \tag{6.10}$$

现在把 $a_n(z_0)$ 的贡献加到每个槽的 NLS 方程之中，便有以下的耦合 NLS 方程组:

$$\mathrm{i}\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \beta_1\psi_1 + \mathrm{i}\gamma_1\psi_1 - \delta_1 e^{\mathrm{i}\varphi_0}\psi_1^* - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - N_1|\psi_1|^2\psi_1$$
$$-\frac{1}{2}N_{11}|\psi_1|^2\psi_1 - \frac{1}{2}N_{12}\psi_2^2\psi_1^* + N_{12}|\psi_2|^2\psi_1 = 0 \tag{6.11a}$$

$$\mathrm{i}\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \beta_2\psi_2 + \mathrm{i}\gamma_2\psi_2 - \delta_2 e^{\mathrm{i}\varphi_0}\psi_2^* - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - N_2|\psi_2|^2\psi_2$$
$$-\frac{1}{2}N_{22}|\psi_2|^2\psi_2 - \frac{1}{2}N_{21}\psi_1^2\psi_2^* + N_{21}|\psi_1|^2\psi_2 = 0 \tag{6.11b}$$

式中:

$$\alpha_n = \frac{c_n^2}{2\omega} \qquad \beta_n = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{c_n^2} \qquad \gamma_n = \frac{2\mu' k_n T_n \omega}{c_n^2}$$

$$\delta_n = \frac{k_n T_n \Omega^2 \Delta}{2c_n^2} \qquad T_n = \tanh(k_n d) \qquad \omega_n^2 = g k_n T_n \tag{6.12}$$

$$N_n = \frac{A_n}{c_n^2} \qquad N_{nm} = \frac{k_n T_n k_m^3}{\rho_2 c_n^2}\frac{\sinh(2k_m h)}{1+\cosh(2k_m d)} \tag{6.13}$$

$$A_n = \frac{1}{8}k_n^4(6T_n^4 - 5T_n^2 + 16 - 9T_n^{-2}) \qquad c_n^2 = \frac{g[T_n + k_n d(1-T_n^2)]}{2k_n} \tag{6.14}$$

上面给出了支配耦合水槽中孤波的耦合 NLS 方程组，非线性耦合系数由 N_{nm} 给出。由式 (6.14) 可知，当 d 一定，增大 h 时，耦合系数增加；当 h 一定时，d 减小时，耦合也增强。这些都与前述实验定性一致。式 (6.14) 预示 N_{nm} 与 ρ_2 成反比，这是显然的，因为如果把下层流体换成水银，这实际上是一个硬边界，就不可能有耦合。宽度变化对耦合强弱的影响，应由式 (6.14) 及式 (6.13) 中的 A_n / k_n^4 与 $N_{nm}c_n^2/(k_n k_m^3)$ 的相对变化来定。Miles 在文献〔41〕中 (见其中图 4) 给出了前者随 $k_n d$ 变化的曲线。当 $k_n d$ 减小时，前者急遽衰减，然而由式 (6.14)，后者也随 k_n 减小而衰减。如果前者衰减更快，则会出现槽越宽，耦合越强；在相反的情况下，耦合则越弱。式 (6.11) 中的 $N_{nm}\psi_m^2\psi_n^*/2$ 项与激励项有相同的形式，代表孤子被另一孤子所激励，激励强度正比于孤子 ψ_m 的幅值平方，$N_{nn}|\psi_n|^2\psi_n/2$ 项和 $N_{nm}|\psi_m|^2\psi_n$ 项代表附加的自相位调制项和交叉相位调制

项。前者是孤子自己在增幅时对自己的一种反馈作用。要平衡色散展宽，不需太大的幅值，这是可以理解的，因为当自己幅度大时，就会通过激励项 $\psi_n^2\psi_m^*$ 对另一孤子做功，并把能量转移给孤子 ψ_m，能量受到损失，因而使自己的幅度增加受到抑制。后者可写成 $(N_{nm}|\psi_m|^2/|\psi_n|^2)(|\psi_n|^2\psi_n)$，而且符号与 N_n 及 N_{nn} 项相反，起到相反方向的调制作用，使孤子幅度增大，调制作用强度正比于 ψ_m 的幅度平方。因此，式 (6.11) 中的最后两项都代表另一孤子对自己的加强作用。

6.4　耦合 NLS 方程的稳态解与耦合孤波初步理论分析

对耦合方程式(6.11)一般是不可能严格解析求解的，只能通过数值分析或微扰分析，才能研究其演化问题。限于篇幅，这里不打算讨论其演化问题(包括相互作用在内)，只初步研究其稳态解即非演化解。下面先讨论等宽槽情况，再讨论宽度相近的非等宽槽情况，这正是实验中的实际情况。

(1) 等宽槽同地耦合孤子解

在等宽槽中，由于对称性，双槽中的孤波必有相同的宽度和幅值，而且式(6.11)中两方程的各系数对应相等。在非演化情况下，$\partial/\partial t=0$，于是设

$$\psi_n=\eta_0\operatorname{sech}[D_0x]e^{i\varphi_n}\qquad (n=1,\ 2)\tag{6.15}$$

将式(6.15)代入式(6.11)，可得:

$$2\varphi_2-2\varphi_1=2n\pi\,(n=0,\ \pm 1,\ \cdots)\tag{6.16}$$

$$\sin(\varphi_0-2\varphi_2)=\sin(\varphi_0-2\varphi_1)=\frac{\gamma_1}{\delta_1}\tag{6.17}$$

$$D_0^2=\beta_1-\delta_1\cos(\varphi_0-2\varphi_1)\tag{6.18}$$

$$\eta_0^2=\frac{2D_0^2}{N_1}\tag{6.19}$$

显然，式 (6.16) 及式 (6.17) 都要求 $\varphi_1-\varphi_2=0$ 或 $\pm\pi$，即两孤子必须是同相或反相的，这与实验一致。其中取 $\cos(\varphi_0-2\varphi_n)=-\sqrt{\delta_n^2+\gamma_n^2}/\delta_n$ 以保证激励幅度增加时，孤波幅度是增加的(事实上，取“+”时，解是不稳定的)。在许多情况下，同地反相孤子是不稳定的(要分离)，因此在这时上述解应是亚稳态解。

注意到孤子幅度与耦合系数 N_{nm} 无关。这是可以理解的，因这时完全对称，两个孤子对对方的作用是相等的，因而能量得失相互抵消了。事实上，同相孤子恰好是双倍宽单槽的 (0, 2) 模孤子被插板一分为二的情形(见文献〔85〕)。

(2) 单孤子解

在实验中，仅维持一个槽中的一个孤子也是经常遇到的现象。这时，令式(6.15)中任

意一个 η_n 为零，则有解：

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= 0\\ \psi_2 &= \eta_2 \operatorname{sech} D_2 x e^{i\varphi_2}\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= \eta_1 \operatorname{sech} D_1 x e^{i\varphi_1}\\ \psi_2 &= 0\end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

这时：

$$\sin(\varphi_0 - 2\varphi_n) = \frac{\gamma_n}{\delta_n}$$

$$\cos(\varphi_0 - 2\varphi_n) = \frac{-\sqrt{\gamma_n^2 + \delta_n^2}}{\delta_n} \tag{6.21}$$

$$D_n^2 = \beta_n - \delta_n \cos(\varphi_0 - 2\varphi_n)$$

$$\eta_n^2 = \frac{2D_n^2}{(N_n + N_{nn}/2)} \tag{6.22}$$

这组解也可近似地认为是当双孤子充分远离时，在各自邻域的局域解，后面还将详细地讨论。

(3) 非等宽槽同地耦合孤子解

对于非等宽槽，从耦合方程式(6.11)求出一般同地耦合孤子解是困难的，甚至是不可能的。但实验中，宽度相近时，才会出现耦合孤子，如果认为宽度差是 $O(\varepsilon)$级，因而式(6.11)中对应系数也都相差一个小量。于是定义：

$$\left.\begin{aligned}&\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad \Delta\beta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad N = \frac{N_2 + N_1}{2} \quad \Delta N = \frac{N_2 - N_1}{2}\\ &N_s = \frac{N_{11} + N_{22}}{2} \quad \Delta N_s = \frac{N_{22} - N_{11}}{2} \quad \delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\\ &N_x = \frac{N_{21} + N_{12}}{2} \quad \Delta N_x = \frac{N_{21} - N_{12}}{2} \quad \delta = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

于是可设如下微扰解：

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= [\eta_0 + \eta_1(x)] \operatorname{sech}[D_0 x + D_1(x)] e^{i\varphi_1}\\ \psi_2 &= [\eta_0 + \eta_2(x)] \operatorname{sech}[D_0 x + D_2(x)] e^{i\varphi_2}\end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

式中：$\Delta\beta$，ΔN，ΔN_s，ΔN_x，η_1，η_2，D_1，D_2 均为 $O(\varepsilon)$ 级小量。将式 (6.24) 代入式 (6.11) 后，$O(\varepsilon^0)$ 项及 $O(\varepsilon)$ 项分别给出：

$$2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2n\pi\,(n = 0,\ \pm 1) \tag{6.25}$$

$$\sin(\varphi_0 - 2\varphi_2) = \frac{\gamma_2}{\delta_2} \qquad \sin(\varphi_0 - 2\varphi_1) = \frac{\gamma_1}{\delta_1} \tag{6.26}$$

$$\beta\eta_0-\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_2)\eta_0-\eta_0 D_0^2=0 \qquad \beta\eta_0-\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_1)\eta_0-\eta_0 D_0^2=0 \tag{6.27}$$

$$2\eta_0 D_0^2-N\eta_0^3-\frac{1}{3}N_s\eta_0^3+\frac{1}{2}N_x\eta d_0^3=0 \tag{6.28}$$

和

$$\begin{aligned}&\{(-1)^n\eta_0[\Delta\beta-\Delta\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_n)]+\beta\eta_n-\delta\eta_n\cos(\varphi_0-2\varphi_n)\\&-\eta''_n-2\eta_0 D_0 D'_n\}\mathrm{sech}(D_0x)+\Big\{2D_0^2\eta_n+4\eta_0 D_0 D'_n-3\eta_0^2 N\eta_n\\&-\frac{3}{2}\eta_0^2 N_s\eta_n+2\eta_0^2 N_x\eta_m+\eta_0^2 N_x\eta_n+(-1)^n\Big[\frac{1}{2}\Delta N_x\eta_0^3-\Delta N\eta_0^3-\frac{1}{2}\Delta N_s\eta^3\Big]\Big\}\\&\cdot\mathrm{sech}^3(D_0x)+(2D_0\eta'_n+\eta_0 D''_n)\mathrm{sech}(D_0x)\tanh(D_0x)\\&-(D_m-D_n)\eta_0^3 N_x\mathrm{sech}^3(D_0x)\tanh(D_0x)=0 \quad (n,\ m=1,\ 2,\ n\neq m)\end{aligned} \tag{6.29}$$

显然，式 (6.25) 要求两孤子同相或反相，这样要求式 (6.26) 中的两式给出同一值，因此，无矛盾条件（或有解条件）是

$$\frac{\gamma_2}{\delta_2}=\frac{\gamma_1}{\delta_1} \tag{6.30}$$

或者说比值 $\gamma_n/\delta_n(n=1,\ 2)$ 与 n 无关，即与槽宽无关。幸好，这条件刚好被式 (6.12)（见其中 β_n 及 γ_n 的表达式）满足了（非常幸运!），于是有:

$$\cos(\varphi_0-2\varphi_1)=\cos(\varphi_0-2\varphi_2)=-\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_n}{\delta_n}\right)^2} \tag{6.31}$$

$$D_0^2=\beta-\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_1) \tag{6.32}$$

$$\eta_0^2=\frac{2D_0^2}{\left(N+\frac{1}{2}N_s-\frac{1}{2}N_x\right)} \tag{6.33}$$

线性耦合方程组式(6.29)有解:

$$\eta_1(x)=s_0+s_1\mathrm{sech}^2(D_0x) \qquad D_1(x)=s_2\tanh(D_0x) \tag{6.34}$$

$$\eta_2(x)=q_0+q_1\mathrm{sech}^2(D_0x) \qquad D_2(x)=q_2\tanh(D_0x) \tag{6.35}$$

式中:

$$s_0=\frac{\eta_0\Delta\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_1)-\eta_0\Delta\beta}{\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_1)-\beta} \qquad q_0=\frac{\eta_0\Delta\beta-\eta_0\Delta\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_2)}{\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_2)-\beta} \tag{6.36}$$

$$s_1=\frac{\det[T_1]}{\det[A]} \quad s_2=\frac{\det[T_2]}{\det[A]} \qquad q_1=\frac{\det[T_3]}{\det[A]} \quad q_2=\frac{\det[T_4]}{\det[A]} \tag{6.37}$$

方阵 A、方阵$T_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$和列矢量$A_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$及列矢量 B 分别是:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \equiv [A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4] \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

$$T_1=[B,\ A_2,\ A_3,\ A_4] \qquad T_2=[A_1,\ B,\ A_3,\ A_4]$$

$$T_3=[A_1,\ A_2,\ B,\ A_4] \qquad T_4=[A_1,\ A_2,\ A_3,\ B]$$

$$A_{11}=A_{43}=\beta-\delta\cos(\varphi_0-2\varphi_1) \qquad A_{12}=A_{44}=\eta_0^3 N_x-3\eta_0 D_0^2$$

$$A_{21}=A_{33}=6D_0^2+\left(N_x-3N-\frac{3}{2}N_s\right)\eta_0^2$$

$$A_{22}=A_{34}=6\eta_0 D_0^2-\eta_0^3 N_S \qquad A_{23}=A_{31}=2\eta_0^2 N_x \qquad A_{32}=A_{24}=\eta_0^3 N_x$$

$$B_1=-\left(\Delta N+\frac{1}{2}\Delta N_s-\frac{1}{2}\Delta N_x\right)\eta_0^3+\left(3N+\frac{3}{2}N_s-N_x\right)\eta_0^2 s_0-2N_x\eta_0^2 q_0$$

$$B_4=\left(\Delta N+\frac{1}{2}\Delta N_s-\frac{1}{2}\Delta N_x\right)\eta_0^3+\left(3N+\frac{3}{2}N_s-N_x\right)\eta_0^2 q_0-2N_x\eta_0^2 s_0$$

以上给出了同地非等幅非等宽耦合孤子微扰解。

(4) 异地耦合孤子解

实验中发现，当两孤子相距较远时，无论是反相，还是同相都能稳定其间距(之所以这样，是因为孤子运动时，沿运动方向由壁与水之间粘性造成的阻尼所致。此外，还有两端壁的作用)，但是其相位关系只有同相或反相，没有其它相位关系(演化情况除外)。这一点也可通过耦合方程式(6.11)得到解释，设两孤子分别位于$x=x_1$和$x=x_2$处，则解可设为:

$$\psi_1=\eta_1\text{sech}\,[D_1(x-x_1)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$$
$$\psi_2=\eta_2\text{sech}\,[D_2(x-x_2)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} \tag{6.38}$$

在ψ_1的峰值附近，ψ_2已指数衰减到很小，因而式(6.11)第一式中含ψ_2的非线性项可以忽略，其结果是得到ψ_1的准单孤子近似解，其表达式与式(6.20)～式(6.22)完全一致。同理，还可得ψ_2的准单孤子近似解；所不同的是式(6.20)～式(6.22)给出的ψ_n $(n=1,\ 2)$解是在另一个孤子完全不存在(即$\psi_m\equiv 0,\ m\neq n$)的情况下得到的。因此，式(6.21)的相位关系式没有任何约束(分别满足，不是同时满足)，即$\sin(\varphi_0-2\varphi_1)$和$\sin(\varphi_0-2\varphi_2)$是独立的。事实上，它代表两种可能孤子解的相位，而不是同一耦合解的两个孤子的相位——后者正是现在讨论的情况。在现在的情况下，两孤子在二者间的区域有微小的耦合，下面讨论这种耦合的后果。在两孤子之间且不靠近每个孤子峰值的区域

$$\psi_n=\eta_n\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}}{\mathrm{e}^{D_n(x-x_n)}+\mathrm{e}^{-D_n(x-x_n)}}\approx 2\eta_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}\mathrm{e}^{D_n(x-x_n)(-1)^n} \qquad (\text{设}\,x_1<x_2) \tag{6.39}$$

是小函数，因而在式 (6.11) 中，所有非线性项相对线性项是小量，可以忽略之。于是，将上式代入式 (6.11) 可得:

$$2\beta_n\eta_n - 2\delta_n\cos(\varphi_0 - 2\varphi_n)\eta_n - 2\eta_n D_n^2 = 0 \tag{6.40}$$

$$\gamma_n - \delta_n\sin(\varphi_0 - 2\varphi_n) = 0 \qquad \left(\sin(\varphi_0 - 2\varphi_n) = \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) \tag{6.41}$$

显然，式 (6.22) 第一式保证了式 (6.40) 能够满足 (又一幸运 !)。由于这时要求

$$\sin(\varphi_0 - 2\varphi_1) = \frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = \sin(\varphi_0 - 2\varphi_2)$$

同时满足，这里已用到式(6.12)和式(6.13)，上式规定φ_1与φ_2只能同相或反相，因此这就解释了实验中的现象。注意到，由式(6.22)所确定的幅值及宽度与式(6.24)中的幅值及宽度并不相同。可见，在反相孤子排开和同相孤子吸引的演化过程中，幅值及宽度是演化的。

6.5　小　　结

本章首先介绍了耦合水槽中耦合孤子新实验的装置及其设计，叙述了所观察到的耦合孤子新现象；然后建立了解释耦合孤子的动力学方程(耦合非线性 Schröpdinger 方程)；最后，给出了稳态耦合孤子解，包括等宽槽同地耦合解、单孤子解、非等宽槽同地微扰耦合解和异地耦合近似解。遗憾的是，由于耦合方程式(6.11)的复杂性，目前还无法严格解析地分析耦合孤子的演化问题，如相互作用等；同时，还需进行数值分析。对于上、下两层充有互不相容的两种流体的耦合孤子实验及其耦合方程的建立，作者已整理成英文稿(现正在审定之中，发表后，读者可根据 Science Abstract 检索到)，在其中首次引入了下层流体的等效厚度概念，使理论分析大为简化。总之，对本文所报道的新的实验现象的理论解释以及对本文所建立的耦合 NLS 方程作进一步数学上的研究，尚需要花很大的气力。

第 三 部 分

光孤子理论

"You make experiments and I make theories. Do you know the difference? A theory is somethings nobody believes except the person who made it, while an experiment is somethings everybody believes except the person who made it."

——A. Einstein

第 7 章

光孤子与光孤子通信

在光学中，至少有四种情况可以支持孤波现象：其一是自感应透明现象所支持的 Sine–Gordon 孤子；再就是二级非线性效应引起的三波相互作用过程所支持的 Sine–Gordon 孤子；第三种是由三阶非线性效应即 Kerr 效应支持的自聚焦空间孤子通道；第四种就是非线性介质波导中，由三阶非线性效应支持的传输孤子。后两种都属于 NLS 孤子。在这四个方面的实验及理论都得到迅猛的发展，下面先讨论各类孤波方程，然后再介绍孤子的基本特性及通信应用。

7.1　自聚焦空间孤子

在非线性光学中，存在着折射率随光强成比例地变化的现象。例如，具有各向异性的分子在光作用下作整体旋转而产生折射率各向异性的光 Kerr 效应；或者由于电场而发生压力变化，引起密度变化，进而引起折射率变化的电致伸缩效应等。这些变化与电场值二次方成正比，即

$$n=\sqrt{\varepsilon_1}+\left(\frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1}}\right)|E|^2=n_1+\frac{n_2^2}{2n_1}|E|^2 \tag{7.1}$$

或$\varepsilon_r=(\varepsilon_1+\varepsilon_2|E|^2)$，其中 $\varepsilon_2>0$。这里不考虑色散，则 Maxwell 方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\left(\frac{n_1}{c}\right)^2\boldsymbol{E}_{tt}=\left(\frac{n_2}{c}\right)^2(|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{E})_{tt} \tag{7.2}$$

设一频率为 ω、波数为 k、在 x 方向传播的线偏振准平面波，它在 y，z 方向是慢变的，在 x 方向(传播方向)波包缓慢地受到调制，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=\varepsilon\varphi(x_1,\ y_1,\ z_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\mathbf{e}_x \tag{7.3}$$

且

$$x_1=\varepsilon^2x\quad y_1=\varepsilon y\quad z_1=\varepsilon z \tag{7.4}$$

代入式(7.2)，$O(\varepsilon)$项可得到线性色散关系

$$k^2=\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2$$

无$O(\varepsilon^2)$，而$O(\varepsilon^3)$项得到非线性 Schrodinger(NLS)方程（其中已把 x_1 用 x 表示）。

$$i\varphi_x+\frac{1}{2k}\nabla_T^2\varphi+\frac{k}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2|\varphi|^2\varphi=0$$
$$\nabla_T^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.5}$$

式(7.5)中，若在 $y-z$ 方向均匀，则有

$$\varphi=\varphi_0 e^{i\frac{1}{2}k\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2|\varphi|^2 x} \tag{7.6}$$

即由非线性，发生了与$|\varphi|^2$正比例的相位改变，结合式(7.3)，有效波数为

$$k_{\rm eff}=k+\frac{1}{2}k\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2|\varphi|^2 \tag{7.7}$$

波数增大，意味着等相位面(波阵面)变密。因此，对某一波束，由于中心$|\varphi|^2$大，故波阵面发生如图 7.1 所示的弯曲，即所谓自聚焦[1~2]。在一维情况下（即$\partial/\partial z=0$），式(7.5)即为标准 NLS 方程，支持孤波解。但对于二维自聚焦（即$\partial/\partial z\neq 0$, $\partial/\partial y\neq 0$），求解是困难的，在某些情况下甚至不存在一般解，发生聚焦束的坍塌[3]。自聚焦现象到 1964 年才被 Hercher 发现[4]。自聚焦完成后，光束还会在介质中传播很长距离并保持其直径不变，把这种现象称为光束自陷(Self-trapping)，Chiao 等人[5]很快提出用这一模型来解释强光束在固体中传播时出现的直径仅几 μm 的损伤斑点形成的长丝。有关自聚焦的进一步研究、可参考有关文献[6~9]。

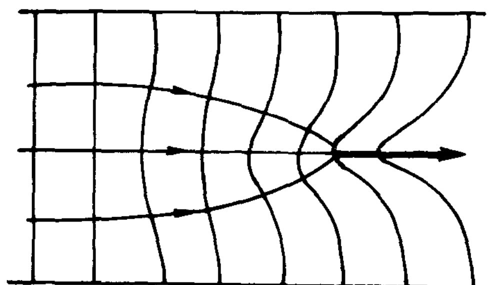


图 7-1 自聚焦过程

7.2 自感应透明与 Sine—Gordon 方程

考虑双能级原子系统，设基态为 E_1，激发态为 E_2，如果入射电磁波的频率 ω 与跃迁频率$\omega_0=2\pi(E_2-E_1)/h$一致，则由于电磁波的共振吸收，产生从 E_1 向 E_2 的跃迁。在多原子系统中，跃迁到激发态上的原子由于碰撞等而发生弛豫，但是当把电磁波以脉冲形式注入，而且其宽度比弛豫时间足够短时，被脉冲感应的系统的能级分布和伴随它的系统的高频极化同入射电磁波保持一定的相位关系。因此，如果非常强的短脉冲入射到双能级原子系统中时，在脉冲前面部分，由于电磁波被吸收，处于 E_2 上的原子数变得比 E_1 的

多，形成粒子数瞬间反转分布；另一方面在脉冲的后面，由于受激辐射，再发射电磁波，因此脉冲能得以传播，把这种现象叫做自感应透明，是一种瞬态相干效应。

设电磁波在 x 方向传播的是圆偏振平面波。

$$\boldsymbol{E}(x,t)=E(x,t)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\mathbf{e}_y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}\mathbf{e}_z\right] \tag{7.8}$$

$$\theta(x)=kx-\omega t+\varphi(x) \tag{7.9}$$

这里 $k=\omega n(\omega)/c$，$\varphi(x)$，$\boldsymbol{E}(x,t)$都是 x，t 的慢变函数，因而有：

$$\left|\frac{\partial E}{\partial t}\right|\ll|\omega E|$$

$$\left|\frac{\partial E}{\partial x}\right|\ll|kE| \tag{7.10}$$

对 φ 也同样。

把式(7.8)代入 Maxwell 方程

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2}-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{7.11}$$

$\boldsymbol{P}$ 是电磁波产生的介质极化，只要 $\boldsymbol{P}$ 对 $\boldsymbol{E}$ 的关系给出，便可得到 $\boldsymbol{E}$ 的方程。$\boldsymbol{P}$ 是大量（设为 N 个）双能级原子的集体贡献，由于每个原子的能级可能使 ω_0 与入射波的 ω 不严格相同，使得谱线在 ω 附近形成一定的宽度。设谱线的密度函数 $g(\omega')$分布在入射波 ω 的附近，则

$$\boldsymbol{P}(x,\ t)=N\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega')\boldsymbol{p}(\omega',\ x,\ t)\mathrm{d}\omega' \tag{7.12}$$

式中:

$$N\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega')\mathrm{d}\omega'=1 \qquad \omega'=\omega_0-\omega \tag{7.13}$$

$\boldsymbol{p}(\omega',\ x,\ t)$是双能级原子的极化。可以认为，$\boldsymbol{p}(\omega',\ x,\ t)$仍然具有式(7.8)～式(7.10)的形式，并把 $\boldsymbol{p}$ 中与 $\boldsymbol{E}$ 同相和相差 90° 相位的部分分开，则

$$\boldsymbol{p}(\omega',x,t)=u(\omega',x,t)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathbf{e}_y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\mathbf{e}_z\right]+v(\omega',x,t)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\mathbf{e}_y-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathbf{e}_z\right] \tag{7.14}$$

这时 u，v 相当于电场调制部分，是 x，t 的慢变函数。到此，只要求给出 u，v 对 $\boldsymbol{E}$ 的依赖关系(即响应)即可。可以由入射电场作用于双能级原子时的量子力学问题得到，即求解双能级原子系统的 Schrödinger 方程。在电偶极子近似下，忽略弛豫效应，McCall 和 Hahn[10,11] 得到:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v\omega' \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-u\omega'-\left(\frac{\kappa^2}{\omega}\right)EW \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=vE\omega \tag{7.17}$$

式中，$\kappa=4\pi p/h$；p 是偶极矩大小，W 是双能级原子的能量，对于基态 $W=-h\omega/4\pi$，对激发态，$W=h\omega/4\pi$。

通常把 u，v 叫作电偶极子的色散分量和吸收分量。把式(7.8)，式(7.13)，式(7.14)代入式(7.11)，并考虑慢变近似，则得：

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{2\pi\omega N}{nc}\int_{-\infty}^{+\infty}vg\mathrm{d}\omega' \tag{7.18}$$

$$E\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2\pi\omega N}{nc}\int_{-\infty}^{+\infty}ug\mathrm{d}\omega' \tag{7.19}$$

到此，式(7.15)～式(7.19)可以描述自感应透明。特别地，当 N 个双能级原子的 ω_0 完全相同且 $\omega=\omega_0$ 时，$\omega'=0$，则式(7.15)～式(7.16)可归结为 Sine—Gordon 方程。根据式(7.15)和式(7.18)、式(7.19)，可取 $u=0$，$\varphi=0$，这时式(7.16)、式(7.17)、式(7.18)变成：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\left(\frac{\kappa^2}{\omega_0}\right)EW \tag{7.20}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=vE\omega_0 \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{2\pi\omega_0 N}{nc}v \tag{7.22}$$

如果引入

$$\Phi=\kappa\int_{-\infty}^{t}E(x,t')\mathrm{d}t' \tag{7.23}$$

则

$$W(x,t)=W_0\cos\Phi(x,t)\qquad W_0=-\frac{h\omega_0}{4\pi} \tag{7.24}$$

$$v(x,t)=p\sin\Phi(x,t) \tag{7.25}$$

利用边界条件，当 $t\to-\infty$ 时

$$W(x,-\infty)=-\frac{h\omega_0}{4\pi} \tag{7.26}$$

即双能级原子全部处于基态 W_0，则式(7.24)、式(7.25)变为

$$\Phi_{xt}+\frac{1}{c'}\Phi_{tt}=-\gamma^2\sin\Phi \tag{7.27}$$

式中：

$$c'=\frac{c}{n}\qquad \gamma^2=\frac{N\omega_0 h}{2nc} \tag{7.28}$$

这就是 Sine—Gordon 方程。归一化后可写成

$$\Phi_{tx}-\Phi_{tt}=\sin\Phi \tag{7.29}$$

令：

$$x_1 = \frac{5x+t}{2}$$

$$t_1 = \frac{3x-t}{2}$$

则式(7.29)化为

$$\Phi_{x_1x_1} - \Phi_{t_1t_1} = \sin\Phi \tag{7.30}$$

若再作变换

$$x_2 = \pm\frac{x_1 - t_1}{2}$$

$$t_2 = \frac{x_1 + t_1}{2}$$

则变成

$$\Phi_{x_2t_2} = \pm\sin\Phi \tag{7.31}$$

关于 Sine–Gordon 方程及自感应透明现象的详细深入研究可参考文献〔12～16〕。

7.3　三波相互作用与参量过程

当二阶非线性较弱时，三阶非线性起着主导作用，就可以支持光纤孤子或自聚焦通道。但当不同的模共同存在时，二阶非线性所支持的现象成为重要，三波相互作用的参量过程就是一例。参量过程也叫参量或参数激励过程。

现以打秋千为例说明参量过程。当小孩在秋千下降时(一周期内有两次)下降自己的重心；而当秋千上升时，重心上升使秋千摆幅增加；由于在摆一个周期中，上升下降重心各两次，即小孩的激励频率是秋千固有频率的二倍时，秋千即可共振。由于这时可认为秋千的两个模退化为一个的情形，即认为秋千的本征模是二重态兼并的。对于两个独立的模式，其固有频率为 ω_1 和 ω_2，则这时激励频率应满足匹配条件(共振条件)

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{7.32}$$

这时模间发生相互作用(耦合)，激励的能量转变为两个模的能量，把这种过程叫参量过程。电磁波照射到二阶非线性介质时，介质中的偶极振荡也与此类似，这时入射电磁波即为激励，介质中有三种波的耦合作用，频率分别为 ω，ω_1，ω_2（$\omega=\omega_1+\omega_2$）。在有色散的介质中，波数也必须满足匹配条件

$$k_0 = k_1 + k_2 \tag{7.33}$$

为简单计，设电磁波是直线偏振，三波偏振方向都相同，于是 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}$ 可用标量代替，因而有

$$E_j(x,\ t) = \varphi_j(x,\ t)e^{j(k_jx-\omega_jt)} \qquad (j=0,\ 1,\ 2) \tag{7.34}$$

Maxwell 方程是

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P})_{tt} = \left(\frac{4\pi}{c^2}\right)\boldsymbol{P}_{tt}^{(\mathrm{NL})} \tag{7.35}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^{(NL)}$为线性极化矢量和非线性极化矢量，非局域的表象一般可写成:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'\chi^{(1)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t')E(\boldsymbol{r},\ t') \tag{7.36}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{(NL)}(\boldsymbol{r},\ t)=&\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'd^3\boldsymbol{r}''\mathrm{d}t''\chi^{(2)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t';\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'',\ t-t'')\ :\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\ t')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'',\ t'')\\&+\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'd^3\boldsymbol{r}''\mathrm{d}t''d^3\mathrm{r}'''\mathrm{d}t'''\chi^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t';\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'',\ t-t'';\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''',\\&t-t''')\vdots\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\ t')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'',\ t)''\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}''',\ t''')+\cdots\text{①}\end{aligned} \tag{7.37}$$

将式(7.34)代入式(7.35)并作 Fourier 变换有

$$\sum_{i=0}^{2}\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}(1+4\pi\chi_{k_j,\ \omega_j})\right]a_j\delta(k-k_j)\delta(\omega-\omega_j)=0 \tag{7.38}$$

其中已假定式(7.36)中 $\chi^{(1)}\propto\delta(t)\delta(r)$，$\chi_{k,\ \omega}$是$\chi^{(1)}$的Fourier变换，即

$$\chi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega\chi_{k,\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\qquad \chi_{k,\omega}=\chi^*_{-k,\omega}$$

式(7.38)给出了线性色散关系

$$D(k_j,\ \omega_j)=1+4\pi\chi_{k_j,\ \omega_j}-\frac{k_j^2c^2}{\omega_j^2}=0 \tag{7.39}$$

上面是没有考虑 $\varphi_j(x,\ t)$变化的平面波近似。当 φ_j 慢变时，将式(7.34)代入式(7.35)并利用色散关系，作 Fourier 变换后得到:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+v_{g0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=\mathrm{i}8\pi\omega_0\left[\frac{\partial(\omega D)}{\partial\omega_0}\right]^{-1}\chi_{k_0,\ k_1,\ -k_2}\varphi_1\varphi_2 \tag{7.40}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+v_{g1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\mathrm{i}8\pi\omega_1\left[\frac{\partial(\omega D)}{\partial\omega_0}\right]^{-1}\chi_{k_1,\ k_0,\ -k_2}\varphi_0\varphi_2^* \tag{7.41}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+v_{g2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\mathrm{i}8\pi\omega_2\left[\frac{\partial(\omega D)}{\partial\omega_0}\right]^{-1}\chi_{k_2,\ k_0,\ -k_1}\varphi_0\varphi_1^* \tag{7.42}$$

式中:

$$\chi_{k_j,k_l,k_m}\equiv\chi_{k_l,k_m}\equiv\chi^{(2)}_{k_l,\omega_l,k_m,\omega_m}$$

$$\chi^{(2)}(\boldsymbol{r}',t';\boldsymbol{r}'',t'')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}k''\mathrm{d}\omega''\chi^{(2)}_{k',\omega',}k''\omega''\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'x'-\omega't)+\mathrm{i}(k''x''-\omega''t'')}$$

$$\chi_{k_j,k_l,k_m}=\chi_{-k_l,-k_j,k_m}=\chi_{-k_m,k_l,-k_j}=\chi^{(NL)}$$

---

①：和⋮分别表示二次点积和三次点积。

$$\chi^*_{k_j,k_l,k_m} = \chi_{-k_j,-k_l,-k_m} = \chi_{k_j,k_l,k_m}$$

$$v_{gj} = \frac{\partial \omega_j}{\partial k_j} = \frac{2k_j c^2 / \omega_j - 4\pi\, \omega_j (\partial \chi / \partial k_j)}{2(1+4\pi \chi_{k_j}) + 4\pi\, \omega_j (\partial \chi / \partial \omega_j)} \tag{7.43}$$

$$\frac{\partial(\omega D)}{\partial \omega_j} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega_j}[\omega_j D(k_j,\ \omega_j)]$$

式(7.40)~ 式(7.42)可写成如下形式:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + v_{g0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \beta_0 \varphi_1 \varphi_2 \tag{7.44}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + v_{g1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\beta_1 \varphi_0 \varphi_2^* \tag{7.45}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + v_{g2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\beta_2 \varphi_0 \varphi_1^* \tag{7.46}$$

显然，式(7.44)~式(7.46)有孤波解:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= \alpha_0 \tanh \gamma(x-\lambda t) \\ \varphi_1 &= \alpha_1 \operatorname{sech} \gamma(x-\lambda t) \\ \varphi_2 &= \alpha_2 \operatorname{sech} \gamma(x-\lambda t) \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

式中，各参数满足

$$(v_{g0}-\lambda)\frac{\alpha_0^2}{\beta_0} = (v_{g1}-\lambda)\frac{\alpha_1^2}{\beta_1} = (v_{g2}-\lambda)\frac{\alpha_2^2}{\beta_2} = \gamma^2 \frac{(v_{g0}-\lambda)(v_{g1}-\lambda)(v_{g2}-\lambda)}{\beta_0 \beta_1 \beta_2} \tag{7.48}$$

有关这一问题的详细、深入研究可参见文献〔17~21，15，16〕。

7.4　光纤中的 NLS 方程

1973 年，Hasegawa 从计及非线性项的色散方程

$$k(\omega,\ |E|^2) = K(\omega)\left\{1+\alpha(\omega)E_0^2\right\} + \mathrm{j}\,k_i \tag{7.49}$$

出发，导出了 NLS 方程〔22〕，并在文献〔23〕中作了推广。其主要点如下:

将$k(\omega,\ |E|^2)$在 $\omega=\omega_0$ 及 $E_0=0$ 处展开，则

$$\begin{aligned} k-k_0 = {} & \frac{\partial k}{\partial \omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega_0^2}(\omega-\omega_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 k}{\partial \omega_0^3}(\omega-\omega_0)^3 + \cdots \\ & + \frac{\partial k}{\partial E_0^2}E_0^2 + \frac{\partial^2 k}{\partial \omega_0 \partial E_0^2}(\omega-\omega_0)E_0^2 + \cdots + \mathrm{j}\,k_i \end{aligned} \tag{7.50}$$

上式乘上包络的 Fourier 变换 $\tilde{q}$(k，ω) 后再作逆变换，即得包络的演化方程

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial q}{\partial X} + k'_0\frac{\partial q}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}k''_0\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \mathrm{j}\frac{1}{6}k'''_0\frac{\partial^3 q}{\partial t^3} + \mathrm{j}\,k_i q + \frac{\partial k}{\partial E_0^2}|q|^2 q$$

$$+ \mathrm{j}\, a_1 \frac{\partial}{\partial t}(|q|^2 q) + \mathrm{j}\, a_2 q \frac{\partial |q|^2}{\partial t} = 0 \tag{7.51}$$

其中，已考虑到 q 是用 E_0 归一化而来，因此 $E_0 = q$，$E_0^2 = |q|^2$。在上式中，$k_0''' = 0$，$k_i = 0$，$a_1 = 0$，$a_2 = 0$ 时，即为标准 NLS 方程[22]

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + k'_0 \frac{\partial q}{\partial t}\right) - \frac{1}{2} k''_0 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial k}{\partial E_0^2} |q|^2 q = 0 \tag{7.52}$$

若从

$$\omega - \omega_0 = \omega'_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \omega''_0 (k - k_0)^2 + \cdots \tag{7.53}$$

出发，还可得到另一与式(7.52)完全等价的方程

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial q}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} \omega''_0 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial E_0^2} |q|^2 q = 0 \tag{7.54}$$

上面方程还可由光波导的径向模式平均和准单色(慢变波包)近似导出。下面使用多重尺度法导出上面方程。由于准单色近似，频谱主要分布在 $\omega = \omega_0$ 附近，因此可假设

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) \approx \frac{1}{\mu_0 c^2}\left[n_1^2(\omega_0) + 2n_1(\omega_0) n_2(\omega_0) |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{7.55}$$

结合Maxwell旋度方程，给出

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{D} \tag{7.56}$$

对于弱导光纤，$\boldsymbol{E}$ 几乎只有横向分量且 $\nabla_t \boldsymbol{E} \approx 0$，考虑到慢变波包近似，即 $\Delta\omega / \omega_0 = (\omega - \omega_0) / \omega_0 \sim O(\varepsilon)$ 为小量，可设 $\boldsymbol{E} = \mathbf{e}_y E(\boldsymbol{r}, t) = \mathbf{e}_y u(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ 且 $\boldsymbol{D} = \mathbf{e}_y D_0(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$，其中 ω_0 为载频。对式 (7.56) 关于 $(\omega - \omega_0)$ 作 Fourier 变换（可用 $\tilde{u}$ 或 $F[\cdot]$ 等表示），因而有

$$\nabla^2 \tilde{u} = -\omega^2 \mu_0 \tilde{D}_0(\omega - \omega_0) \tag{7.57}$$

将式(7.55)代入式(7.57)有

$$\nabla^2 \tilde{u} = -k^2 \tilde{u} - \frac{2n_2}{n_1} k^2 F[|u|^2 u] \tag{7.58}$$

由于 $k^2 = \omega^2 n_1^2 / c^2$ 和 n_2 / n_1 都是 ω 的函数，把它们在 ω_0 点附近展开，再代回式(7.58)，然后对 $(\omega - \omega_0)$ 作逆 Fourier 变换，于是有

$$\nabla^2 u = -k_0^2 u + \mathrm{i}2k_0 k'_0 \frac{\partial u}{\partial t} + (k_0 k''_0 + k'^2_0) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cdots - 2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0 k_0^2 |u|^2 u + \cdots \tag{7.59}$$

设 $u(\boldsymbol{r}, t) = R(\boldsymbol{r}) \varphi(x, t)$，$\nabla_T^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$，注意到 $\nabla_T^2 R + k_c^2 R = 0$，$k_c^2 = k^2 - \beta^2$，$\beta$ 是传播常数。对于 HE_{11} 模（或 PL_{01} 模）$k_c = 0$，即 $\beta = k$，代入式 (7.59) 并对

每一项作径向模式平均有

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}+k_0^2\varphi-2\mathrm{i}k_0k'_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\left[k_0k_0''+k_0'^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\cdots+2\frac{bn_2k_0^2}{n_1}|\varphi|^2\varphi+\cdots=0 \tag{7.60}$$

式中，$b=\iint_S |R|^4\mathrm{d}S \Big/ \iint_S |R|^2\mathrm{d}S$。设 D_0 是孤子空间特征宽度，$T^0=D_0/v_g$ 是时间特征宽度，作如下尺度假设（对于暗孤子存在于正常色区 $k''_0>0$，对明孤波存在于反常色区 $k''_0<0$）：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{D_0k'_0}\sim \omega_0 O(\varepsilon)\\&\frac{|k''_0|}{D_0^2k'^2_0}\sim k_0O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{7.61}$$

上式分别等价于慢变时间 $\sim O(\varepsilon)\cdot t$ 或 $\Delta\omega\sim\omega O(\varepsilon)$ 和慢变空间尺度 $\sim O(\varepsilon^2)\cdot x$，且第二式结合 E 的小幅度约定。即式 (7.55) 中 $2n_1n_2|E|^2/n_1^2\sim O(\varepsilon^2)$。可立即给出：

$$|E_{\max}|\sim\frac{1}{D_0k'_0}\left[\frac{n_1|k''_0|}{2n_2k_0}\right]^{1/2}\sim\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}O(\varepsilon) \tag{7.62}$$

因此作尺度变换：

$$\left.\begin{aligned}&x_0=x\\&\xi=\frac{|k''_0|x}{D_0^2k'^2_0}\\&\tau=\frac{1}{D_0k'_0}\left(t-\frac{1}{v_g}x\right)\\&\varphi=\frac{1}{D_0k'_0}\left[\frac{n_1|k_0''|}{n_2bk_0}\right]^{1/2}\cdot\psi(\xi,\ \tau)f(x_0,\ \xi)\end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

代入式 (7.60)，分离 $O(\varepsilon)$，$O(\varepsilon^2)$ 及 $O(\varepsilon^3)$ 各给量，分别给出 $f=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_0x}$，$v_g=\mp1/k'_0$ 和

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z}\pm\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+|\psi|^2\psi=0 \tag{7.64}$$

其中，出于直观，已将 ξ，τ 分别用 z，t 表示了。

在式 (7.64) 中，当取"＋"时 ($k_0''<0$)，支持明孤子；当取"－"时 ($k_0''>0$)，支持暗孤子。

7.5　推广 NLS 方程

上面关于 NLS 方程的推导可以说是较不严格的，Kodama 和 Hasegawa[23, 24] 给出较严格的方法，所用方法是约化微扰法(Reductive Perturbation Method)。他们在 1987 年给出了如下方程:

$$\mathrm{j}\frac{\partial q_1}{\partial \xi}-\frac{1}{2}k''_0\frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2}+\hat{v}|q_1|^2 q_1-\varepsilon\mathrm{j}\frac{1}{6}k'''\frac{\partial^3 q_1}{\partial \tau^3}$$
$$+\varepsilon\mathrm{j}\hat{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial \tau}(|q_1|^2 q_1)+\varepsilon\mathrm{j}\hat{\alpha}_2 q_1\frac{\partial}{\partial \tau}|q_1|^2=O(\varepsilon^4) \tag{7.65}$$

式中，$\xi=\varepsilon^2 z$，$\tau=\varepsilon(t-z/v_g)$。其具体推导过程，可参见文献〔23〕。

在文献〔25〕中，从多重尺度方法出发，也导出了与式(7.65)相近的推广NLS方程

$$\mathrm{j}\frac{\partial q}{\partial \xi}-\frac{1}{2}\beta''_1\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+v|q|^2 q-\mathrm{j}\frac{1}{6}\beta'''_1\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3}$$
$$+\mathrm{j}\,v'\frac{\partial}{\partial \tau}(q|q|^2)-\mathrm{j}\,lq\frac{\partial}{\partial \tau}(|q|^2)=0 \tag{7.66}$$

式 (7.65)、式 (7.66) 中的符号完全按原文给出，读者不难看出其对应关系。

在饱和光纤中，NLS 中的非线性项发生较大的变化，如对于半导体掺杂饱和光纤，NLS 方程修正为[26, 27]

$$\mathrm{i}q_\xi+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+q\left(1-\frac{1}{|q|^2}+\frac{\mathrm{e}^{-|q|^2}}{|q|^2}\right)=0 \tag{7.67}$$

考虑高阶色散的方程是[26]

$$\mathrm{i}q_\xi+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+qf(|q|^2)=\mathrm{i}\delta q_{\tau\tau\tau}-\mathrm{i}\alpha q_\tau f(|q|^2)-\mathrm{i}\alpha q\frac{\partial}{\partial \tau}(|q|^2)g(|q|^2) \tag{7.68}$$

式中:

$$f(|q|^2)=1-\frac{1}{|q|^2}+\frac{\mathrm{e}^{-|q|^2}}{|q|^2}$$

$$g(|q|^2)=\frac{1}{|q|^4}-\left(\frac{1}{|q|^2}+\frac{1}{|q|^4}\right)\mathrm{e}^{-|q|^2}$$

$$\alpha=\frac{1}{V_g}\left(\frac{n_2}{n_0\chi(-k_0'')}\right)^{1/2}$$

$$\delta=-\frac{1}{6}\frac{k'''_0}{(-k''_0)}\left(\frac{k_0 n_2}{n_0\chi(-k_0'')}\right)^{1/2}$$

非线性饱和光纤中方程的一般形式是（不计高阶色散项）

$$\mathrm{i}q_\xi+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+qN(|q|^2)=0$$

$N(|q|)^2$ 是$|q|^2$ 的非线性函数，例如还可能有如下几种形式:

$$\left.\begin{aligned}
&N(\eta)=1-e^{-\eta} && \text{(见〔28〕)}\\
&N(\eta)=\frac{(k^2/2)\eta}{1+[n_0^2/(n_s^2-n_0^2)]\eta} && \text{(见〔28,29〕)}\\
&N(\eta)=\frac{\eta(\gamma\eta+2)}{(1+\gamma\eta)^2}\\
&N(\eta)=\frac{\eta-\alpha\eta^2}{1+\gamma\eta}\\
&N(\eta)=1-\frac{1}{\eta}+\frac{e^{-\eta}}{\eta}
\end{aligned}\right\} \tag{7.69}$$

对于飞孤子脉冲，除了要考虑高阶色散项[30]外，还要考虑 Raman 效应，如在文献〔31～36〕中给出的更一般形式是:

$$\begin{aligned}
&j\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}-j\beta\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3}+\left(1+\frac{j}{\omega_0 T}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\\
&\quad\times\left[\alpha|q|^2 q+(1-\alpha)q\int_{-\infty}^{\tau} f_R(\tau-\tau')|q|^2\mathrm{d}\tau\right]=0
\end{aligned} \tag{7.70}$$

或[37]

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial \xi}+j\frac{\beta(\xi)}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}-\gamma(\xi)\frac{\partial^3}{\partial \tau^3}\right]q\\
&=iq\int|q(\tau-\tau',\ \xi)|^2 r(\tau')\mathrm{d}\tau'-\sigma\frac{\partial}{\partial \tau}\times\left[q(\tau,\ \xi)\int|q(\tau-\tau',\ \xi)|^2 r(\tau')\mathrm{d}\tau'\right]
\end{aligned} \tag{7.71}$$

在考虑增益色散和增益饱和的光纤放大传输过程中，支配方程是

$$\begin{aligned}
&j\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+N^2|q|^2 q\\
&=N^2\tau_k\frac{\partial|q|^2}{\partial \tau}q-j\frac{1}{2}\alpha L_D q+j\frac{1}{2}L_D g_0\left(u+\tau_D^2\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}\right)e^{-s\int_{-\infty}^{\tau}|q|^2\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{7.72}$$

式中，τ_P 为增益色散参数，s 为饱和参数，τ_k 为 Raman 自泵(intrapulse stimulated Ramang scattering)参数，L_D 为色散长度，α 为光纤损耗系数。

Gagnon 和 Belanger 给出的推广 NLS 方程[38]，可以说是考虑因素最多的一个，即

$$\begin{aligned}
iq_z+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+q|q|^2=&(t_c-i\beta_1)q_{\tau\tau\tau}+i\gamma_2 q_{\tau\tau}+Aq_\tau+i\gamma_0 q+i\gamma_n q|q|^2\\
&+(t_d-i\beta_2)(q|q|^2)_\tau+(t_d-i\beta_3)q(|q|^2)_\tau\\
&+(B+iC)q\int_{-\infty}^{\tau}|q|^2\mathrm{d}t+(D+iE)q_\tau\int_{-\infty}^{\tau}|q|^2\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{7.73}$$

考虑的因素已包括了材料的三阶项、增益色散、增益饱和和高阶非线性效应等。

7.6 光纤孤子的应用前景、研究进展及存在的问题

光纤孤子理论及其通信应用是80年代和90年代初最活跃的前沿领域重要课题。在理论意义上，光孤子在光纤中的表现行为和特性乃是当今非线性年代的首要论题之一。在应用方面，孤子在光纤中无形变地传输以及基于其绝热特性可实现全光通信的特性使它成为通信的最优信息载体。自从光孤子的概念于1973年提出，1980年首次实验发现[39]至今，光孤子通信理论及实验得到迅猛、全面的发展。目前Bell实验室已将孤子无再生地传输到14 000 km[40]，NTT已展示了一种将2.5 Gb／s的光孤子脉冲序列无形变地传输到1×10^6 km[41]。

光孤子通信方面的理论与实验研究现已得到长足的发展，其发展过程大致可分以下四个阶段:

1973～1980年，主要以理论研究为主，以形成机理，传输可能性，产生方法为主要标志;

1980～1985年以通信应用为明确目标，着重研究传输理论、能量补偿放大等问题;

1985～1988年是光孤子通信研究蓬勃发展、取得多方面突破的年代，完善传输方程，深入到影响孤子传输的各种因素的理论分析。例如，多模理论(包括双折射)、波分复用设想先后被提出，实验上也实现了6 000 km无形变传输等。

1989年以后是理论与实验纵深发展的时代。理论上，更加深入考虑多方因素的影响，如Kerr介质中同向反向耦合模[42～49]、耦合波导[50～52]、波分复用[53～56]、双模耦合[57～60]、双折射[61～68]的理论的提出和横向效应[48, 69～73]的广泛研究。在实验方面，色散位移技术(DSF)，掺铒放大技术(EDFA)，动态孤子通信技术等业已成熟和完善，这些技术的突破，使孤子传输无再生距离达到14 000 km，码率达2.5 Gb／s[40]，实现了1×10^6 km超长距离传输[41]，这一实验通过每隔510 km加一$LiNbO_3$调制器对孤子脉冲进行再生，突破了Gordon-Haus极限[74]（码率距离乘积$<(3\times 10^4$ Gb／s·km)，实现了10 Gb／s，距离为1×10^4 km的孤子传输[75]和双通道光孤子传输[76]，建立了直通式孤子光通信系统[77]。表7-1给出了实验系统一览表。

光孤子必将是未来光通讯的优良信息载体(它或许是以光电为媒介的通信的极限)，由于理论及实验方面的卓越成就，1989年，Bell实验室计划用八年时间将光孤子通信投入实用。光孤子这样的传输距离完全可以代替通讯卫星的许多功能，因此，西德专家Grall等人甚至预言: 20年后，天上不再有通讯卫星。孤子通信之所以有如此巨大的潜力，是因为它有如下几方面的特性:

(1) 高容量。

码率可达100 GHz以上(普通光纤通信极限为10 GHz)。

(2) 中断距离长。

可实现50～100 km无放大传输，两中继(用于再生)之间可设若干级放大，因此再生距离至少在500 km以上。事实上，Bell实验室的无再生距离是1.4×10^4 km。

(3) 放大设施极其简单。

利用光孤子的绝热特性，即当传输系统存在损耗时，孤子峰值减小、变宽，但其面积

表 7-1 光纤孤子通信实验系统

年	研制者	实验室	码率 (Gb/s)	L(km)	Z(km)	光源	脉宽 (ps)	放大器	光纤	D (ps/km·nm)	Z_0 (km)	参考文献
1980	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	0.1		0.7	ML-CC	7		SIF			Phy.REV.Lett.45(1980), 1095
1985	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	0.1		10	ML-CC	10	Raman	SIF	15		Opt.Lett.10(1985), 229
1988	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	0.1	41.7	4000	ML-CC	55	Raman	SIF	17	66	Opt.Lett.13(1988), 675
1989	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	0.1	41.7	6000	ML-CC	50	Raman	SIF	17	55	Opt.Lett.14(1989), 751
1990	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	0.2	25	10000	ML-CC	50	EDFA	DSF	1.38	750	Opt.Lett.15(1990), 1203
1991	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	2.4	25	12000	ML-EC-LD	70	EDFA	DSF	1.38	1460	Electron.Lett.27(1991), 178
1991	L.F.Mollenauer	AT&T Bell	2.5	27	14000	ML-EC-LD	50	EDFA	DSF	1.36	740	Electron.Lett.27(1991), 2055
1991	N.A.Olsson	AT&T Bell	2× 2	30	9000	ML-EC-LD	60	EDFA	DSF	2.4	600	Electron.Lett.27(1991)695
1991	K.Iwatsuki	NTT	10	19	1000	GS-DFB-LD	12	EDFA+Raman	DSF	3	190	ECOC'91 PDP,88
1991	M.Nakazawa	NTT	10	50	1000000	GS-DFB-LD	40	EDFA	DSF	1.5	430	Electron.Lett.27(1991)1270
1989	K.Iwatsuki	NTT	3	20	20	GS-DFB-LD	14	EDFA+Raman	DSF	3.15		Electron.Lett.25(1989)1004
1990	I.W.Marshall	BTRL	19.2	50	100	ML-EC-LD	75	EDFA	SIF	17		OFC'90 PD4
1990	N.A.Olsson	AT&T Bell	4	30~70	130	ML-EC-LD	20	EDFA	DSF	2.2	72	Electron Lett 26(1990) 551
1990	M.Nakazawa	NTT	5	25	250	GS-DFB-LD	10	EDFA+Raman	DSF	0.35		OFC'90 PD6
1990	M.Nakazawa	NTT	20	25	200	GS-DFB-LD	20	EDFA	DSF	2.4	66	Electron Lett 26(1990)1592
1991	M.Nakazawa	NTT	20	25	350	GS-DFB-LD	18	EDFA	DSF	1.8	70	Electron Lett 27(1991)1662
1991	M.Nakazawa	NTT	10	50	1000	GS-DFB-LD	45	EDFA	DSF	2.1	390	Electron Lett 27(1991)1289
1991	A.D.Ellis	BTRL	5	71.5	357(1000)	ML-EC-LD	20	EDFA	DSF+SIF	0.7	230	Electron Lett 27(1991)878
1991	Kubota	NTT	32									IEICE Trans., VE-74,1373

保持不变。得到增益时，在峰值增加的同时，孤子宽度自动变窄，即能实现自动整形。因此，只要通过简单的受激 Raman 放大或其它方式的光放大对孤子能量进行补充，孤子就能得到放大并自动复原(即恢复原形)。这样就免去了普通光纤通信中继站的复杂再生过程——对脉码光电转换、重新整形、放大、检查误码、电光转换和再重新发送。

(4) 误码率低及抗噪能力强。

上面已经看到，光纤孤子理论与实验发展已经非常成熟，但是理论研究在许多方面仍然很不深入。例如，在下述各方面还需要作深入研究：即孤子的碰撞；裂变及散射；半导体掺杂光纤及各种饱和光纤中的孤子传输问题；二阶孤子、二阶与一阶混合孤子以及一阶反相混合孤子序列的相互作用；光孤子的边界反射及透射；暗孤子序列的相互作用；孤子开关过程；边值问题；孤子的等价粒子理论；小振幅明、暗孤子；自变陡效应及 Raman 效应的影响与作用；各类耦合 NLS 方程的求解及其等价粒子理论；双折射光纤中的孤子耦合问题；横向效应等等。在后几章，将重点介绍作者在这方面的工作。对于前人业已成熟的理论，本书只作了适当简短的引用，关于其详细内容，因篇幅限制，本书不宜过多地介绍，读者自己可参考后面给出的文献或有关著作，例如，有关光孤子序列相互作用及其通信应用，可参考后面文献〔96～126 等〕；有关饱和非线性光纤中孤子的传输及相互作用等问题，可参考文献〔127～131 等〕；有关高阶效应对光孤子的作用，包括对小幅孤子的作用，可参考文献〔132～145 等〕；关于孤子反射和等价粒子等问题，可参考文献〔146～154 等〕；有关光孤子的耦合传输与相互作用等方面可参考文献〔155～166 等〕。

7.7 各阶光孤子的演化特性

前面已经看到，光孤子为实现远距离超大容量通信开辟了一条新途径，实现孤子通信的主要问题有：基态孤子光源，现在已研究制出各种孤子源，如文献〔39，78～84〕中的报道。其次是能量补偿，Raman 放大是一种行之有效的补偿方法[85～87]，此外，人们也要探讨掺耳光放大器[88～94]。第三是孤子间的相互作用对传输的影响，文献〔95～99〕对二孤子的相互作用进行了数值分析和解析分析，我国学者杨祥林教授等[100～102]。系统地研究了一阶孤子序列的相互作用，包括损耗、高阶色散、啁啾，Raman 效应对传输的影响进行了广泛的研究；刘颂豪教授、廖常俊教授、高以智教授、黄德修教授、陈宗蕴及黄念宁教授等在孤子光源、光放大器、孤子激光器、孤子开关等分单元技术方面和孤子理论研究方面做了大量有益的工作[25，103～107]。下面将简要介绍各阶孤子的各种传输及演化特性。

在反常色散区 $k_0''<0$，经过适当的归一化变换，NLS 方程可写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2 q=0 \tag{7.74}$$

在 1972 年，Zakharov 和 Shabat 指出[108]，若$|q|$在$|x|\to\infty$ 时急剧减小，则式 (7.74) 可用逆散射方法求解，这个问题在第三章中已作介绍。日本著名学者 Satsuma 等人[109] 用逆散方法研究了式 (7.74) 的初值问题，即设初始条件

$$q(\tau,\ \xi=0)=A\mathrm{sech}(\tau) \tag{7.75}$$

当 $A=N$ 为整数时，则其解具有优美的形式。

当$N=1$时:

$$q(\tau,\ \xi)=\operatorname{sech}(\tau)e^{i\xi/2} \tag{7.76}$$

称为基本孤子 (fundamental soliton)，显然$|q(\tau,\ \xi)|$是永形的，

当$N=2$时:

$$q(\tau,\ \xi)=\frac{4[\cosh(3\tau)+3e^{4i\xi}\cosh(\tau)]e^{i\xi/2}}{\cosh(4\tau)+4\cosh(2\tau)+3\cos(4\xi)} \tag{7.77}$$

称为二阶孤子，这时$|q(\tau,\ \xi)|^2$随 ξ 是周期变化的。

对于 $N=3$，其表达式更为复杂，但$|q(\tau,\ \xi)|$仍是周期变化，称为三阶孤子。

无论是二阶，还是三阶孤子，其变化周期都是 $\xi_0=\pi/2$，对应到归一化前的实验室坐标系，周期是

$$z_0=\frac{\pi}{2}L_D=\frac{\pi T}{\left(2\frac{\partial v_g^{-1}}{\partial\omega}\right)}=\frac{\pi T^2}{2|k''_0|}=0.322\frac{\pi T^2_{\mathrm{FWHM}}}{2|k''_0|} \tag{7.78}$$

式中，$T=t/\tau$ 是 $T_{3dB}/1.76$(T_{3dB} 即 FWHM 是孤子的 3 dB 宽度)。

基本孤子峰值光强和峰值功率为:

$$I_1=\frac{\lambda_0 n_0 c}{16\pi z_0 n_2}=\frac{\lambda_0 n_0 c|k'_0|}{8\pi^2 T^2}$$

$$P_1=\frac{|k''_0|}{\gamma T^2}=\frac{3.11|k''_0|}{\gamma T^2_{\mathrm{FWHM}}} \tag{7.79}$$

式中:

$$\gamma=\frac{n_2\omega_0}{cA_{\mathrm{eff}}}$$

$$A_{\mathrm{eff}}=\frac{\left[\iint_{\infty}^{+\infty-}|F(x,y)|_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^2}{\iint_{-\infty}^{+\infty}|F(x,y)|^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

v 是非线性系数，A_{eff} 是有效纤芯截面，孤子面积 A_s 为

$$A_s=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\mathrm{d}\tau \tag{7.80}$$

图 7－2 和图 7－3 给出了一、二、三阶孤子演化对照和三阶孤子的演化全貌。

当 A 不为整数，即 $A=N+\alpha(|\alpha|<1/2)$ 时，式 (7.74) 的解包括孤子部分和非孤子部分。但当 $\xi\to\infty$ 时，解有渐近结构，并趋向孤子解，非孤子部分很小，所占能量比例是 $\alpha^2/(N+\alpha)^2$，以准一阶孤子为例说明之

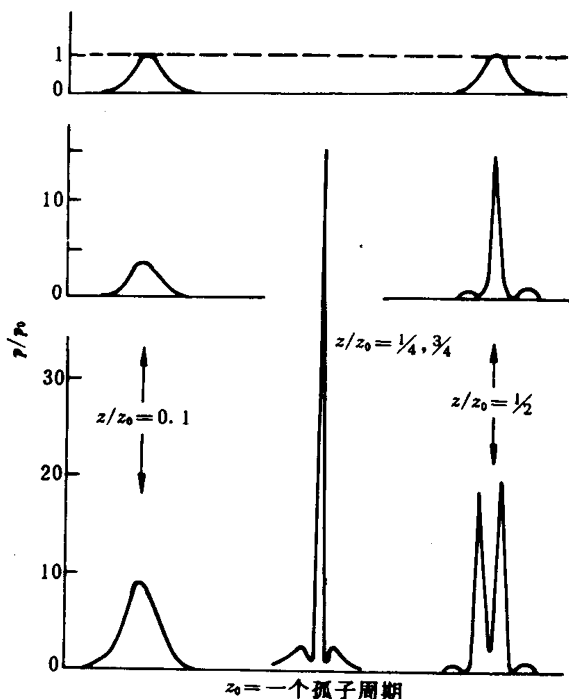


图 7—2 一阶、二阶、三阶孤子演化对照

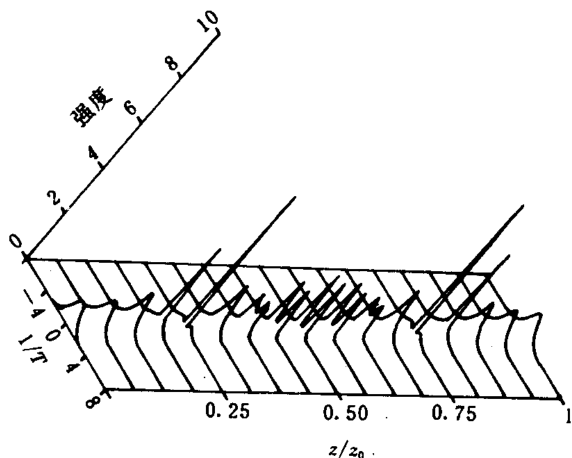


图 7—3 三阶孤子演化全貌

$$(1+\alpha)\mathrm{sech}(\tau,\ 0)\to(1+2\alpha)\mathrm{sech}[(1+2\alpha)\tau]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+2\alpha)^2\xi/2}$$

左边能量为 $2(1+\alpha)^2$，右边为 $2(1+2\alpha)$，二者相差$2\alpha^2$。这个渐近过程是这样，波幅先随 ξ 增大，即从$(1+\alpha)$开始增加(这时孤波宽为 1，3 dB 宽为 1.76)，超过$(1+2\alpha)$后继续增加，几乎达到$(1+2\alpha)+[(1+2\alpha)-(1+\alpha)]/2$ 后再减少。这样周期振荡地趋近稳定值$(1+2\alpha)$。对于任意 $A=N$，其解可以认为是 N 个中心重叠的单孤波的“叠加”，其“叠加”相位因子是周期性变化的，这 N 个单孤波具有形式：

$$(2j-1)\mathrm{sech}[(2j-1)\tau]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j(\xi)}\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\tag{7.81}$$

这时总能量为$\sum_{j=1}^{N}2(2j-1)=2N^2$ 与初始注入能量相同。当 $\alpha\neq0$ 时，$N>1$ 时的解也可认为仍可分解为上述形式的 N 个孤波叠加，但每个孤波的幅值不再像式(7.81)那样是稳定的，而是在下述式(7.82)中的稳定值$[(2j-1)+2\alpha]$附近周期振荡地趋近各自稳定值〔$(2j-1)+2\alpha$〕

$$[(2j-1)+2\alpha]\mathrm{sech}[\{(2j-1)+2\alpha\}\tau]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j(\xi,\ \alpha)}\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\tag{7.82}$$

这时总能量为 $\sum_{j=1}^{N}[2(2j-1)+2\alpha]=2N^2+4N\alpha$，与初始注入能量 $2(N+\alpha)^2=2N^2+4N\alpha+2\alpha^2$ 相差 $2\alpha^2$，因此非孤子能量所占比例是 $2\alpha^2/2(N+\alpha)^2$。

7.8　光纤损耗与孤子绝热特性

在 NLS 方程加入高阶色散及损耗—增益项时，NLS 方程变成

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2 q=-\mathrm{i}\Gamma_G q+\mathrm{i}H\frac{\partial^3 q}{\partial t^3} \tag{7.83}$$

式中，$\Gamma_G=(\gamma-g)$，γ 代表损耗，g 代表无饱和无色散增益。γ 的量级估计如下，对于 1 ps 宽，光场 10^6 V／m 的光脉冲，损耗约为 0.2 dB／km，换算成 $\gamma\approx 3\times 10^{-2}$。当 $\Gamma\xi_{\max}<1$ 且 $H=0$ 时，把 Γ 项看成是微扰项，则由微扰法[110]（还可由等价粒子方法，见第二部分文献〔74〕）

$$q(\tau,\ \xi)=B\mathrm{sech}(B\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{7.84}$$

$$B=B_0\mathrm{e}^{-2\Gamma\xi} \tag{7.85}$$

$$\theta=\frac{B^2}{8T}[1-\mathrm{e}^{-4\Gamma\xi}] \tag{7.86}$$

由前面式(7.79)关于孤子面积的定义，则

$$A_s=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}(B\tau)\mathrm{d}(B\tau)=1 \tag{7.87}$$

即无论有无损耗或增益，面积是守恒的。是因为 $\Gamma>0$（损耗）时，波的宽度指数增加，虽然幅值减小，其乘积是一定的；相反，当 $\Gamma<0$（增益）时，幅值增加的同时，孤子宽度变窄而可以复原，这一特性才是**孤子通信区别于一般光通信的关键所在**。

7.9　一阶孤子对的相互作用与通信码率

码率是通信系统设计的一个关键问题。光纤孤子通信中，由于孤子之间存在相互作用(见文献〔81，95，96，98，99，112，113，148，167～171〕)，因此码率必然受到限制，相邻码或脉冲之间的时间间隔 T_B 决定了一个通信系统的比特率 $B(B=1/T_B)$，所以应该明确在多远时才几乎无相互作用。束缚一个单个孤子的同一非线性也在相邻孤子之间建立一个孤子互作用力，Gordon[167] 基于逆散射理论给出了两个一阶孤子间的相互作用力公式(相距不太近时成立)，对式(7.74)所支配的一阶孤子可写成如下的归一化形式:

$$q(0,\ \tau)=\mathrm{sech}(\tau-\tau_0)+r\mathrm{sech}[r(\tau+\tau_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}$$

式中，r 是相对振幅，2θ 是相对相位差。当 $r\approx 1$ 且 $\tau\gg 1$，Gordon 给出的公式是[99]：

$$\frac{\partial^2\tau_0}{\partial\xi^2}=-4e^{-2\tau_0}\cos(2\theta)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}=4\mathrm{e}^{-2\tau_0}\sin(2\theta)$$

初始间隔τ_0与比特率的关系为

$$B=\frac{1}{2\tau_0 T_0}\approx\frac{0.88}{\tau_0 T_{\mathrm{FWM}}}$$

当$\theta=0$，$r=1$时，对于$\tau_0\gg1$的情况有

$$\exp[2(\tau_0(\xi)-\tau_0(0))]=\frac{1}{2}[1+\cos(4\xi e^{-\tau_0(0)})]$$

即$\tau(\xi)$沿光纤是周期性变化，振荡周期为

$$\xi_p=\frac{\pi}{2}e^{\tau_0(0)}$$

微扰理论也得到了相同的结果。对任意值$\tau_0(0)$，一个有效的更精确的表达式是[170]

$$\xi_p=\frac{\pi\sinh[2\tau_0(0)]\cosh[\tau_0(0)]}{2\tau_0(0)+\sinh[2\tau_0(0)]}$$

对$\tau_0(0)>3$，ξ_p的第一个方程是相当精确的，数值解也有此结果[98]。

图 7-4 给出了$\tau_0(0)=3.5$、$\theta=0$和$r=1$时孤子对被周期性离合的演化情形[112]。从整个系统来看，不希望发生相邻孤子间周期性离合。一种避免互相作用的方法是增加孤子之间的间距，即使$z_p\gg L_T$，其中，L_T是传输距离，$z_p=z_0\exp[\tau_0(0)]$是离合距离，z_0是孤子周期并由式(7.78)给出。因为对$\tau_0(0)=10$，$z_p/z_0\approx 22\,000$，这样的间距对大多数通信系统来讲是足够大的。这样，比特率就受到上面关系式的限制，但是如果我们用脉宽为 2 ps 的孤子进行数据传输，仍能达到 45 Gb／s。有几种方法可以使孤子间距大大减小。已经知道孤子间产生的吸引力对相对相位θ和相对振幅r很敏感，实际上，当$\theta\neq0$时虽然一开始时是吸引的，但最终将变成排斥力，以致于尽管对相对很小的θ值，孤子最终还是分离开的。

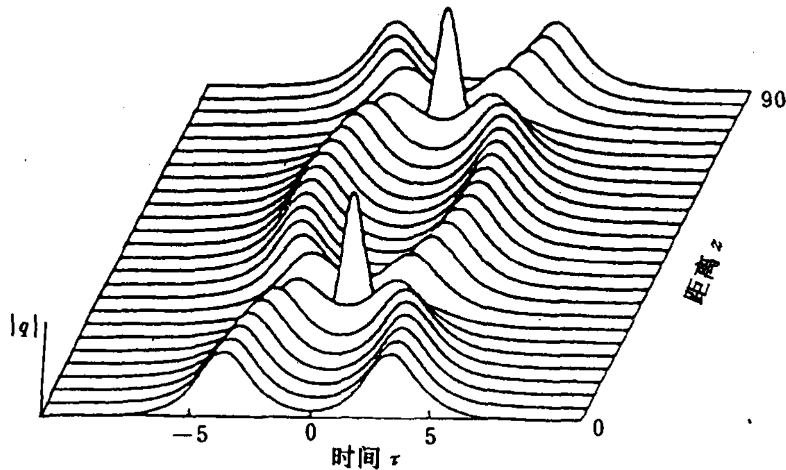


图 7-4 孤子对沿光纤的演化(由于相互作用其表现为周期性离合)
参数是 N=1，$\theta=0$，$r=1$ 以及$\tau_0(0)=3.5$[170]

图 7-5 给出了用$\theta=\pi/4$代替$\theta=0$时的变化情况，其他条件同图 7-4。对$\theta=\pi$的极端情况，孤子间隔$\tau_0(\xi)$遵守由前面将余弦函数换成双曲余弦函数所得到的关系式。如果孤子对具有相同的相位($\theta=0$)，但振幅不同，互作用仍是周期性的但离合消

失[170]。即使对 $r=1.1$，如果 $q_0>4$，在每个周期内间隔改变不超过 10%。很显然，这种技术对增加比特率和传输容量是很有用的。许多别的因素，如初始啁啾[169,112]、高阶色散[113]和高阶非线性效应[81,172]也会改变孤子互相作用。另一个必须考虑的因素是损耗和周期性放大对孤子互作用的影响。现在已经发现，当相邻孤子以不同的振幅入射时，可达到稳定的传输[112]。

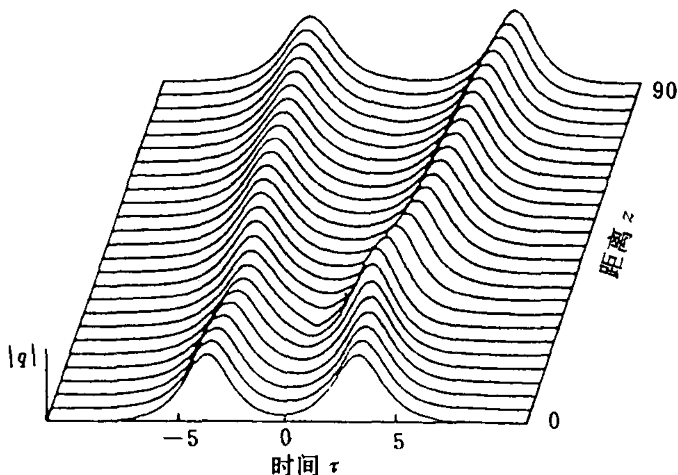


图 7–5　孤子对的演化(除 $\theta=\pi/4$ 外其他条件与图 7.4 一样，所以这两个孤子在 $\xi=0$ 处是不同相的(见文献〔170〕)。

7.10　一阶孤子序列的相互作用

杨祥林教授等[101~102,111]数值模拟了一阶孤子序列的相互作用，得出如下结论[101]：

(1) 二等幅孤子相互作用时，有周期地靠近而又分开的现象，周期由初始间距 Δ 决定，这与解析结果一致。三等幅孤子相互作用时，中心孤子幅值逐渐减小，但位置不变，两边孤子幅值增大并向中心孤子靠近，达到最大相互作用后，反相的过程又发生了，最后回复原状态完成一个周期。

(2) 在非等幅注入的情况下，可减弱相互作用强度，推迟达到最大相互作用状态。若相邻孤子间距愈小，要消除相互作用所需要的幅值差愈大。

(3) 损耗对二孤子和多孤子的相互作用有相同的影响，都使波形恶化，造成不可恢复性畸变，且损耗增大时，非等幅孤子的无相互作用距离缩短。

(4) 三阶色散虽能使二孤子相互作用基本消失[96]；但对三孤子相互作用，非但不能改善，反而大大增强了相互作用强度，对非等幅注入序列还有破坏作用，尽管无三阶色散时，非等幅注入可消除孤子间的相互作用。

图 7–6 给出了无损耗三等幅孤子的相互作用过程，图 7–7 给出了有损耗三非等幅孤子的演化，图 7–8 及图 7–9 是高阶色散对二孤子及三孤子传输的影响。

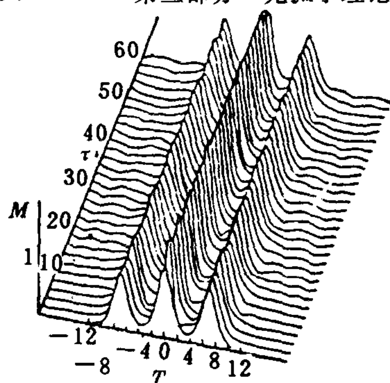


图7−6 无耗非等幅注人幅值交替取1.0和1.25，Δ=7.0，Γ=0.007 3

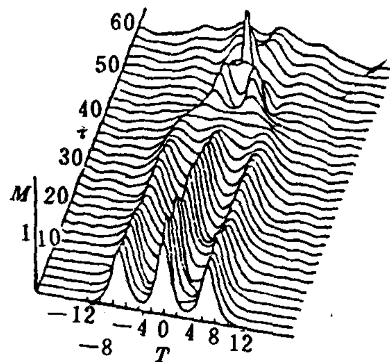


图7−7 有耗非等幅注入，幅值交替取1.0和1.25，Δ=7.0，Γ=0.007 3

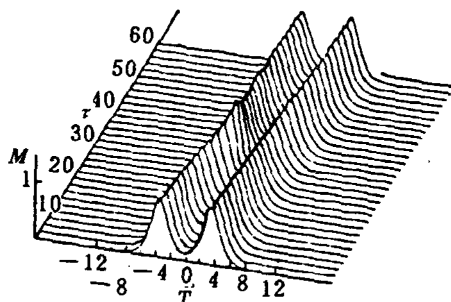


图7−8 三阶色散(H=0.051)对二等幅孤子的作用，Δ=7.0。

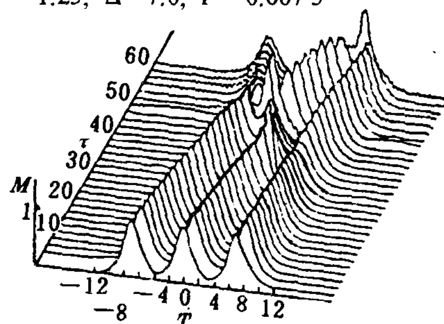


图7−9 三阶色散(H=0.051)对三等幅孤子的作用，Δ=7.0。

7.11 孤子啁啾与自相位调制

孤子形成原因是色散扩展(在非常色散区)与非线性压缩相互平衡(对应一阶孤子)或周期动态平衡(对应高阶孤子)的结果，下面要说明其具体过程。色散具有展宽作用，对于线性色散媒质

$$i\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{1}{2}k''_0\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=0 \tag{7.88}$$

用 Fourier 变换法求解式 (7.88) 初值问题，则容易得到

$$A(z,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{F}[A(0,\ t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_0\omega^2 z/2-\omega t)}\mathrm{d}\omega \tag{7.89}$$

式中，$\mathrm{F}[A(0,\ t)]$ 代表 $A(0,\ t)$ 的 Fourier 变换，即

$$\mathrm{F}[A(0,\ t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}A(0,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.90}$$

以 Gauss 准孤子脉冲注入为例（注孤子条件见〔102〕），即

$$A(0,\ t)=\mathrm{e}^{-t^2/2\sigma^2} \tag{7.91}$$

代人式(7.89)可得

$$A(z,\ t)=\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2-\mathrm{i}k''_0 z}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-t^2/2(\sigma^2-\mathrm{i}k''_0 z)}$$

上式进一步化为:

$$A(z,\ t)=\frac{1}{\left[1+(z/L_{\mathrm{D}})^2\right]^{1/4}}\mathrm{e}^{-t^2/2\sigma^2\left[1+(z/L_{\mathrm{D}})^2\right]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z,\ t)} \tag{7.92}$$

$$\varphi(z,\ t)=-\frac{\mathrm{sgn}(k''_0)(z/L_{\mathrm{D}})}{2\left[1+(z/L_{\mathrm{D}})^2\right]}\frac{t^2}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\arctan\left[\mathrm{sgn}(k''_0)\frac{z}{L_{\mathrm{D}}}\right] \tag{7.93}$$

$$L_{\mathrm{D}}=\left[\left|K''_0\right|/\sigma^2\right]^{-1}$$

式中，L_{D} 为色散长度。

式 (7.92) 的物理意义是，无论在反常还是正常色散区随着传输距离 z 增大，色散都将引起波包展宽，波峰减小；同时，在传输过程中产生啁啾。所谓啁啾就是频移沿脉冲形成一种分布[3]。例如，火车“迎面而来后背道而驰”时所发生的频率变化就是这样的。如果火车正在这个时节发出一个短鸣，对听者来说，可看作是一个脉冲，这脉冲前沿频率被压“密”，后沿的频率被拉“疏”，沿脉冲形成了一种频率（相对中心频率而言即为频移）分布。由式 (7.93) 可计算相对中心频率的频移

$$\Delta\omega=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\mathrm{sgn}\,(k''_0)\frac{z/L_{\mathrm{D}}}{1+(Z/L_{\mathrm{D}})^2}\cdot\frac{t}{\sigma^2} \tag{7.94}$$

啁啾的强度用

$$C(t)=\frac{\partial\Delta\omega(t)}{\partial t}=\mathrm{sgn}(k''_0)\frac{z/L_{\mathrm{D}}}{\left[1+(z/L_{\mathrm{D}})^2\right]\sigma^2} \tag{7.95}$$

来标志。在 t 表象中，脉冲前沿及后沿分别在波形图的左边 $(0<t)$ 及右边 $(t>0)$，与在 z 表象中的情况正好相反。

对于 $k''_0<0$ 的反常区，在前沿 $(t<0)$，$\Delta\omega>0$，在后沿 $(t>0)$，$\Delta\omega<0$。于是，在 $k''_0<0(\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega>0)$ 的区域，v_y 随 ω 增加而增加，因此，前沿 $\Delta v_g>0$，后沿 $\Delta v_g<0$，故脉冲被“拉开”（展宽）。

在 $k''_0>0$ 的正常区，前沿 $\Delta\omega<0$，后沿 $\Delta\omega>0$，但这时 Δv_g 随 ω 增加而减小 $(\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega<0)$，故脉冲仍然展宽。

对于暗(灰)脉冲，设

$$A'(0,\ t)=a-\mathrm{e}^{-t^2/2\sigma^2}\qquad(a\geqslant 1) \tag{7.96}$$

则同理可得

$$A'(z,\ t)=a-A(z,\ t) \tag{7.97}$$

$A(z,\ t)$ 由式 (7.92) 给出。到此我们已看到了色散对脉冲的展宽作用。

上面分析了色散对脉冲展宽的一面，下面再来分析非线性对脉冲的展宽与压缩作

用。由于折射率 $n=n_0+n_2|E|^2$ 中非线性项，在 z 点产生附加相移

$$\Delta\varphi(t,\ z)=kn_2z\langle E^2(t)\rangle \tag{7.98}$$

与此对应的频移是

$$\Delta\omega=-\frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t}=-kn_2z\frac{\partial\langle E^2(t)\rangle}{\partial t} \tag{7.99}$$

于是啁啾是

$$C(t,\ z)=-kn_2z\frac{\partial^2\langle E^2(t)\rangle}{\partial t^2} \tag{7.100}$$

由于 $v_g=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$，因此 k''_0 与 v_g 有关：

$$k''_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)=-\frac{1}{v_g}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega} \tag{7.101}$$

因此，对于钟形包络注入，在脉冲顶部（中央）$C(t,\ z)>0$。在脉冲两侧（底部）$C(t,\ z)<0$。在脉冲顶部附近 $C(t,\ z)>0$ 代表 $\Delta\omega$ 沿脉冲（也就是随时间）是增加的。在反常色散区 ($k''_0<0$, $\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega>0$)，$\Delta v_g$ 沿脉冲增加，因此顶部左侧 ($t<0$) v_g 小，顶部右侧 ($t>0$) v_g 大。即脉冲顶部是前慢后快，被压缩；而其底部是前快后慢，被展宽；结果波形变尖成为明钟形孤波（通常所说的明孤波）。这里已认为 n_2 的驰豫时间极短（相对脉冲宽度）。但在正常区 ($\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega<0$)，这时 $C(t,\ z)>0$ 代表 Δv_g 沿脉冲减小，因此，脉冲中部是前快后慢，而其底部是前慢后快，使脉冲顶部变平，前沿、后沿变陡，逐渐展宽形成明“方波”。

对于灰脉冲(或暗脉冲)注入，脉冲中部 $\partial^2<E^2>/\partial t^2>0$，即 $C(t)<0$。对于反常区，中部的 Δv_g 沿脉冲是减小的，即前快后慢，两侧是前慢后快，这时脉冲也会逐渐展宽形成灰(暗)“下方波”。但在正常区，中部的 Δv_g 脉冲是前慢后快，两侧是前快后慢，则中部被压缩形成灰(暗)钟形尖波(通常称为暗孤波或灰孤波)。当上述非线性压缩与前面色散展宽相平衡时，就形成一阶明、暗孤子；当非线性压缩强于色散展宽时，形成高阶孤子。脉冲非线性对自身相位这样的调制作用称为自相位调制。

7.12 光孤子通信设计问题

孤子通信系统具有很大的发展前景。如果利用一个合适的孤子放大方案来补偿光纤的损耗，可以获得近 100 Gb/s 比特率和 1 000 km 长度的数据传输。目前，看来最有希望是如图 7－10 所示的喇曼增益方案[173]。在图中，孤子发射到由许多段长度为 L 的光纤构成的光纤网络节中，在每一段的终端泵浦激光器通过与波长有关的定向耦合器双向注入连续光。

数据传输一般是在接近光纤最小损耗波长 ($\lambda\approx 1.56\ \mu\mathrm{m}$) 附近进行，在每个周期间隔长度 L 处，将工作在 $1.46\ \mu\mathrm{m}$ 附近的泵浦激光器发出的连续光通过与波长有关的定向耦合器双向注入光纤。系统中重要参数是：比特率 B，脉冲宽度 T_{FWHM}、放大周期 L 以及

总跨度 L_T。L_T 决定于在孤子传输没有变得不稳定之前用到的放大级个数。下面讨论决定这些系统参数的重要设计问题。

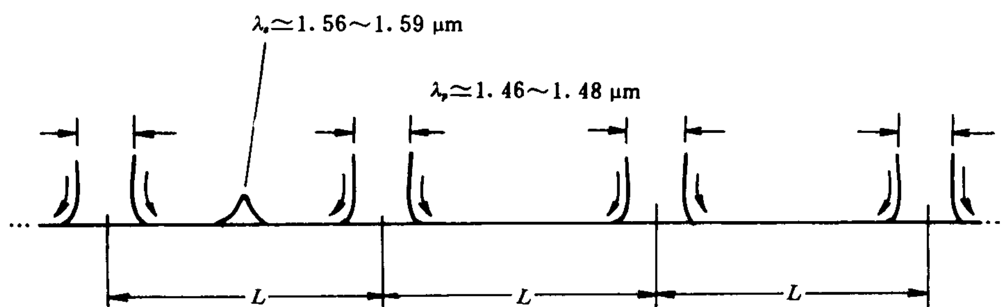


图 7-10　孤子光通信系统示意图

首先考虑的是，在喇曼放大方案中是否存在着一个对系统性能的根本限制。相干放大总是伴随自发辐射噪声，这种噪声可导致探测器上脉冲到达时间的抖动。这种抖动的物理机制是由于每个放大级的载频很小的随机移动引起的群速度的随机移动，如果脉冲在其探测器规定的时间间隔内没有到达，就会产生误码，这就是所谓的 Gordon-Haus 极限[74]。如果误码率在 10^{-9} 以下，对色散位移光纤 $|k''_0| \approx -2\ \mathrm{ps^2/km}$)，其比特率－距离积 BL_T 就被限制在

$$BL_T \leqslant 3\times 10^4 (\mathrm{Gb/s\cdot km}) \tag{7.102}$$

这个值比色散对线性系统性能的限制约大两个数量级。方程式 (7.102) 表明，一个孤子通信系统可以以 10 Gb／s 的比特率、在 3 000 km 的长度上，或以 100 Gb／s 比特率、在 300 km 长度上，进行信息传输而不会出现由噪声引起的定时抖动带来的麻烦。比特率的选取决定了两个放大级之间的间隔 L。若 B 增加，则脉宽 T_{FWHM}（或 T_0）减小，所以孤子周期 z_0 也减小，因而 L 一般按 B^{-2} 变化。通过对大量的放大级放大过程详细的数值模似表明[53,85]，当 $L\approx 8z_0$ 时，长距离孤子传输变得不稳定。实际上，需要将 L 值限制在 $L\leqslant 6z_0$。利用孤子周期公式 (7.78)，L 与比特率有下面的关系：

$$L\leqslant \frac{3\pi}{4q_0^2\left|k_0''\right|B^2} \tag{7.103}$$

式中，$\tau_0(0)$ 是孤子间的相对间隔。为了使孤子互作用最小，典型的 $\tau_0(0)=10$。如果我们考虑 $\lambda=1.55\ \mu\mathrm{m}$、$|k''_0|=-2\ \mathrm{ps^2/km}$ 的色散位移光纤，并且用 $\tau_0(0)=10$，由方程式 (7.103) 得

$$B^2L\leqslant 1\times 10^4\ (\mathrm{Gb/s})^2\cdot \mathrm{km} \tag{7.104}$$

信号和泵浦波的光纤损耗 α_s 和 α_p 也限制 L 的值。因为泵浦功率在光纤中并不是常数，所以即使在每个放大周期的端部孤子完全复原，在光纤中孤子能量也是变化的。数值模拟指出[53,85]，对长距离稳定的孤子传输，其能量变化应小于 20%。目前能够达到

的最小值 $\alpha_s = 0.18$ dB／km 和 $\alpha_p = 0.29$ dB／km，受此限制 L 小于 50 km。从成本考虑，L 值应尽量大，所以在大多数实际情况中，L 值在 30—50 km 范围内。

下面来考虑一个具体的设计例子。对 $k''_0 \approx -20\ \mathrm{ps}^2$／km 的普通光纤，$BL_T$ 和 B^2L_T 比方程式(7.102)和方程式(7.104)的值减小 1／10，所以必须用较低的比特率。如果选取 $L=40$ km 作为放大周期的实际值，则比特率 $B=5$ Gb／s。设 $\tau_0(0)=10$，由比特率公式得脉宽 $T_{\mathrm{FWHM}}=17.6$ ps。基态孤子所需的峰值功率由式 (7.79) 得出，如果用典型值 $\gamma=5\ \mathrm{W}^{-1}\mathrm{km}^{-1}$(对应于有效纤芯面积约 25 $\mu\mathrm{m}^2$)，可得 $P_1=40$ mW。因为噪声引起定时抖动，总跨度限制在约 600 km。用 $|k''_0| \approx -2\ \mathrm{ps}^2$／km的色散位移光纤可以大大改善孤子通信系统的性能。如果我们考虑比特率为 15 Gb／s，由式 (7.104) 可得放大周期 $L=44$ km，由此得总跨度 $L_T \approx 2\,000$ km，这个系统所需的脉冲宽度和峰值功率是 $T_{\mathrm{FWHM}}=5.87$ ps 和 $P_1=36$ mW。通过降低比特率至 5 Gb／s，跨度可增加到 6 000 km，如果需要较高的比特率，B 可在 20～30 Gb／s 范围内选取，但需以减小 L 和 L_T 为代价。很明显，孤子通信系统有能力提供一个约 10 Gb／s 的比特率，约 1 000 km 左右长的数据传输系统。这已在实验中得到证明，脉宽为 55 ps 的孤子脉冲可以在 42 km 长的光纤环中循环 96 圈，脉冲宽度没有显著的增加[174]。在光纤环的每一圈循环中，喇曼增益几乎都补偿了光纤的损耗。这一实验表明，孤子在大于 4 000 km 距离上传输是可以实现的。然而，孤子通信系统的发展将需要对实用的波长选择耦合器和泵浦激光器作进一步的研究。

第 8 章

光孤子序列的相互作用

8.1　二阶光孤子的相互作用与双源耦合注入孤子

8.1.1　引言

在有关一阶孤子的传播特性及其通信应用的可行性和实施方案方面，人们已进行了广泛深入的研究。前面已提到，Chu 和 Desem〔96, 112〕发现非等幅注入能减小孤子间的相互作用。文献〔102, 113〕分别研究了高阶色散对两孤子和多孤子序列的影响。文献〔113〕指出，高阶色散虽能消除两孤子的相互作用，但对多孤子序列却不甚有效。

从通信角度看，一阶孤子通信只限于二进制编码体系，如果能把编码由二进制改为三进制，则比特率将增加 lb 3≈1.6 倍。受非等幅孤子弱相互作用的启示，我们提出将准二阶孤子(包括双源注入准二阶孤子)与一阶孤子混合注入，可预料在使相互作用受到抑制的同时，又使比特率增加约 1.6 倍。此外，本节相应地提出了低功率双源耦合注入方案，它可降低对光源的要求。

本章的数学模型是标准 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+|\psi|^2\psi=0 \tag{8.1}$$

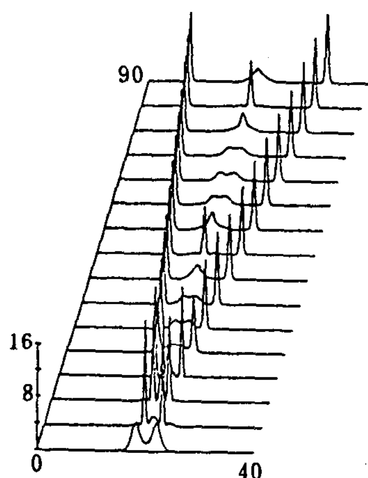
8.1.2　二阶孤子的相互作用特性

设初始条件是

$$\psi(t,\ z=0)=N_1\operatorname{sech}\left(t-\frac{1}{2}\Delta\right)+N_2\operatorname{sech}\left(t+\frac{1}{2}\Delta\right)$$

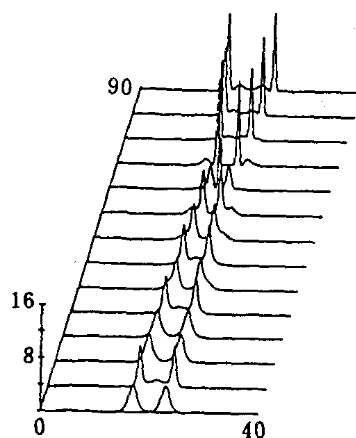
我们利用分裂步长 Fourier 变换法数值模拟了二阶孤子在几种不同的初始间隔下的演化情况。图 8-1～图 8-4 分别给出了 $N_1=N_2=2$ 和 $\Delta/2=2.0$、3.0、4.0 四种情况的演化。由图 8-2 和图 8-3 可见，二阶孤子也存在着与一阶孤子类似的相互吸引作用，而且 Δ 越小，出现最大相互作用的距离越小；对于 $\Delta=2.0$，3.0，3.5，最大相互作用大约发生在 12，54，60 归一化距离处。然而当 $\Delta/2=4.0$ 时，这种吸引作用转化为排斥作用，这正是二阶孤子不同于一阶孤子的特性。事实上，大峰值输入的孤子中包含着两个亚孤子(准

二阶孤子和一阶孤子)，在无外界作用时，它们保持不分离的相对亚稳态；一旦受到外界作用，出现分离，不妨把此现象叫做孤子裂变。孤子裂变在 Raman 效应的影响下也会发生[114]，但这里是由相互作用而诱发的。图中，裂变后的四个亚孤子间的幅值和相位关系决定了它们是呈现排斥还是吸引。因此，图 8-4 中，即使是大间距同初相注入，也使各对亚孤子出现排斥。这里引入的孤子裂变出亚孤子的概念类似于核裂变产生多个新核的概念。图 8-3 中，在两孤子经过最大相互作用之后，两孤子间出现了能量横向周期性地转移，而各自在纵向(z 方向)都是周期地振荡，这时两孤子各自的行为受一耦合非线性 Schrodinger 方程组来支配。



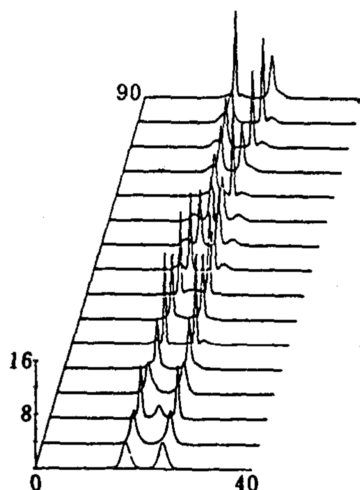
$\Delta=4\quad N_1=N_2=2$

图 8-1



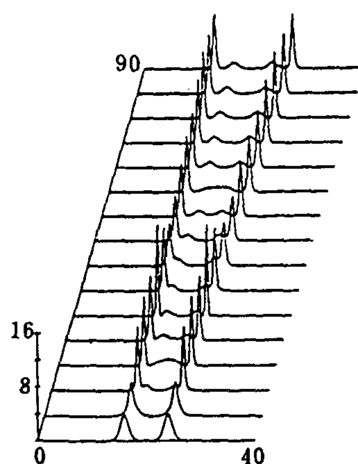
$\Delta=6$、$N_1=N_2=2$

图 8-2



$\Delta=7$，$N_1=N_2=2$

图 8-3



$\Delta=8$，$N_1=N_2=2$

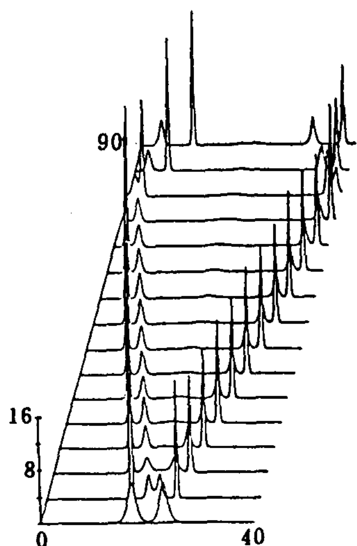
图 8-4

8.1.3 准二阶孤子的相互作用

我们在图 8-5～图 8-7 中给出了准二阶孤子对的相互作用演化情况。一般地说，当

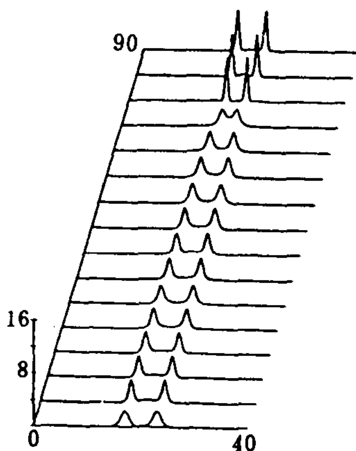
$1.5 < N_i < 2.5 (i=1, 2)$时，都属于准二阶孤子(当 $N_i \neq 2$)。由图 8-5、8-6 可知，幅度越大，亚孤子裂度越明显，而且相互作用越强。例如，当 $N_1 = N_2 = 2.45$ 时，最大相互作用距离在 6 以内；但当 $N_1 = N_2 = 1.55$ 时，最大相互作用距离约为 72。在图 8-5 中，由于时间 t 的总宽度是 40，孤子遇到数值边界时就出现了“数值边界的反射”。事实上，由于 Fourier 展开的周期性，在左数值边界的反射实质上是右支孤子在右数值边界“透射”(延伸)到右边的周期段中的那一部分，对于右边界反射也是如此。

非等幅注入同一阶(准一阶)孤子一样，可以在一定程度上消除孤子对间的相互作用，从图 8-7 中可看到这一点。虽然仍有一阶亚孤子从大幅孤子中分离出来，但总可调整相对比例和间距，使这种裂变受到最大程度的减小。这一特性可望是一阶、二阶孤子混合作用于光纤孤子通信的基础，在后面将给出准二阶孤子与一阶孤子的相互作用的特点。初步研究表明，这种设想有必要作进一步的工作。



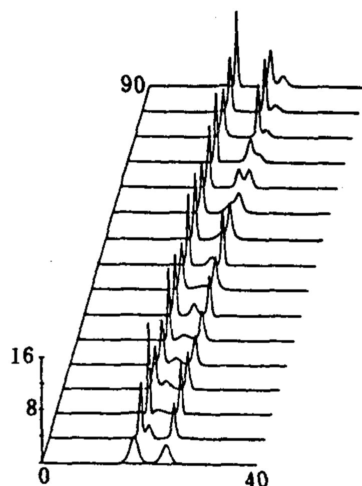
$\Delta=6$，$N_1 = N_2 = 2.45$

图 8-5



$\Delta=6$，$N_1 = N_2 = 1.55$

图 8-6



$\Delta=6$，$N_1 = 2.25$，$N_2 = 1.75$

图 8-7

8.1.4 一阶与准二阶孤子的相互作用

Chu 等人研究了非标准一阶孤子间的相互作用，非等幅注入能显著地减小相互作用对通信的不利影响。当两个孤子幅值之比 $r = q_2 / q_1$，且取 $q_1 = 1$，例如在 1.1 与 1.025 之间时，两孤子还存在较强的作用；但 $r \geq 1.175$ 时，这种相互作用明显减弱到可以忽视的程度，他们在计算中，r 的最大值取到 1.325。

对于准二阶孤子($N \cdot \operatorname{sech} t$ 注入，$2.5 > N \geq 1.5$)与一阶孤子的相互作用规律，目前尚未见报道。本节由光纤孤子 NLS 方程通过数值模拟，给出了 1.5 阶孤子(我们不妨把 $N=1.5$ 的孤子称为 1.5 阶孤子)与一阶孤子的相互作用过程，见图 8-8。在前半段距离上，1.5 阶孤子(图 8-8(a))和 1.6 阶孤子(图 8-8(b))的行为非常接近二阶孤子演化行为，并

与一阶孤子互不干扰地传输着，虽然在后半段距离上，1.5 阶孤子偏离了二阶孤子所具有的那种周期性，但它相对一阶孤子的距离几乎始终保持不变。模拟表明其他准二阶孤子与一阶孤子也有类似的相互作用规律。这可能成为二阶孤子通信的依据。

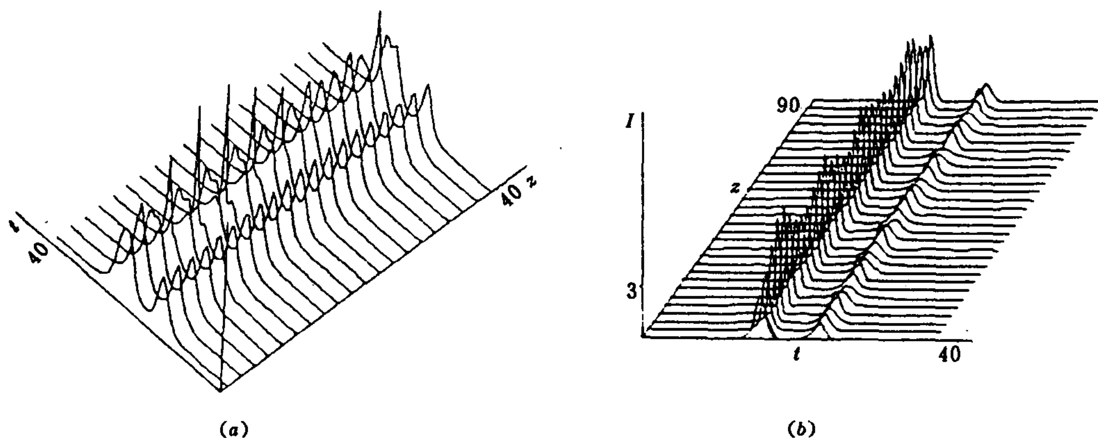


图8−8　一阶与准二阶孤子的相互作用

(*a*) 与 1.5 阶孤子的相互作用 ($D=9$);　(*b*) 与 1.6 阶孤子的相互作用 ($D=8$)

8.1.5　双源耦合注入和叠加原理

在实际应用过程中，大功率工作状态常是不可取的，它对光源等设备的要求相对较高。我们提出用两个一阶孤子源的两个脉冲以小于 2.5 倍脉宽(即 2.5／1.763≈ 1.4 的 3 dB 脉宽)间距注入光纤，以代替一个准二阶孤子注入(这样的孤子，简称双源准二阶孤子)，即以下式

$$\varphi(0,\ t)= n\cdot\ \mathrm{sech}\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)+n\cdot\ \mathrm{sech}\left(t+\frac{\Delta}{2}\right) \tag{8.2}$$

替代 $\varphi(0,\ t)=N\mathrm{sech}(t)$进行注入。其中，通过控制 n 和 Δ 模拟不同的 N，一般取 $\Delta\leqslant 2.5$，$n=1$(对应 N 最大为 2)。图 8−9(*a*)所示的结果表明这种处理是可行的。其中，在取 $\Delta=2.5$ 时，可以看到，图 8−9(*a*)的初始状态，事实上非常接近图 8−1 中 1.5 阶孤子演化

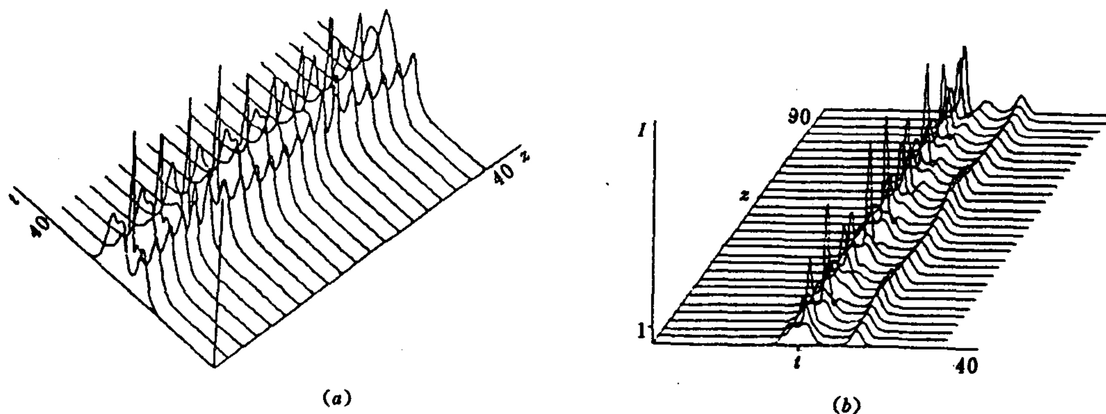


图 8−9　双源注入二阶与一阶孤子(“21”码)的演化($n=1$，$\Delta=2.5$)

(*a*) $D=6.25$;　(*b*) $D=8$

过程中的一个中间状态。图 8−9(*a*)中的等价的阶(*N* 值)稍大于 1.5；图 8−9 给出了 $\Delta=6.25$ 和 $\Delta=8$ 的双源注入二阶孤子与一阶孤子的相互作用过程。

应该指出式(8.2)并不违背非线性领域场的不可叠加性。首先需要了解不可叠加性的实质。非线性电磁光学过程可由两部分构成，强光首先在介质内感应出非线性响应——非线性极化，然后介质在产生反作用时非线性地改变该光场。非线性极化意味着二倍的光场不能引起二倍的极化，而非线性地改变光场意指二倍的极化不能刚好使光场发生与之成比例地改变，这就是不可叠加性的本质。我们已经看到，不可叠加性并没有否定在某一时空点总场可由两个分场叠加而成的特性，只是否定了极化与场的线性关系。事实上，在非线性领域 Maxwell 方程仍然成立，这是公认的，只要将源 J (ρ 由 $\nabla\cdot\tilde{J}+\partial\rho/\partial t=0$ 确定)由下式取代即可[115]

$$J=J_{dc}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{8.3}$$

式中:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}=&\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}^{(1)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\ t-t_1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1,\ t_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}t_1\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}^{(2)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\ t-t_1;\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2,\ t-t_2):\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1,\ t_1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2,\ t_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\&+\cdots\end{aligned} \tag{8.4}$$

是场的时空非局域函数。如果式(8.2)中的 J 一旦确定，它作为源对场的贡献是线性的(即 Maxwell 方程形式上与线性情况相同)，即 $2J$ 将产生 2 倍的场，因此 Maxwell 方程实质蕴含了场的局域可叠加性。极化非线性地改变光场只体现在非局域方面，即场的整体空间分布及其历史与未来(亦即式(8.4)与 Maxwell 方程的耦合)。

此外，光纤中非线性压缩及色散展宽是以时间积累效应而表现出来的，孤子在经过自身宽度这样短的时间内，这些效应还不足以使波形发生变化。以 SiO_2 芯光纤为例[95]，$\lambda_0=1.27\ \mu\mathrm{m}$，与归一化距离相当的距离为 1.3 km，图 8−9(*a*)中，由初态(第一条线)演化成第一个尖峰(第二条线)所经历的距离是 2.6 km，而对于一个 10 ps 宽的孤子传播自身宽度的距离约为 3.0×10^{-3} m，二者相差 6 个数量级！在这样短的时间内，孤子波形是不会发生变化的。

8.1.6 三进制码通信方案及其可行性

据文献〔102，103，113〕及本节的模拟结果，可提出三进制码通信方案。由于文献〔113〕指出当 r 在 1.175～1.325 之间，相互作用就已经很弱；而当 $r\geqslant1.5$ 时，又表现为一阶孤子与准二阶孤子互不干扰地传播。因此，可以在接收端设置两个判断电平，把准二阶、一阶孤子及空缺检测出来，分别作为三进制的“2”,“1”和“0”。在注入端按相反程序把三进制码转换成孤子序列，当序列中连续出现两个以上“1”即一阶孤子时，为避免相互作用，采用 $r=1$ 及 $r=1.25$ 交替注入；出现准二阶孤子时(即“2”)，采用 $n=1$，$\Delta=2.5$ 注入。我们知道，对于话音可懂度而言，信号量化级数 $L=8$ 或 16 就足够了。若用二进

制，需要三个码来传输一个信息码；但若用三进制，只需两个码即可。对于商用通信，$L=32$ 是起码的，因此需要 5 个或 6 个二进制码来传输一个信息码，但只需要 3 个或 4 个三进制码就足够了。在电话通信中，通常取 $L=128$ 或 256，需要 7 至 8 个二进制码，但只需要 5 个三进制码可使 $L=243$，从而获得优质的话音。当然为了减少通信差错率，应适当地增加一些冗余度，冗余度的设计取于孤子的相互作用特性及纠错码理论。此外，还有光纤损耗及高阶色散对相互作用的影响及抗噪特性等。

这个方案能否实现，关键在于当一个多孤子序列(准二阶、一阶和空缺的随机混合)注入光纤后，也能像图 8-9 所示那样几乎互不干扰地传输。我们模拟了几种情况的多孤子相互作用，结果表明，序列中各孤子间的相互作用的确很小，这种方案在理论上是可行的。图 8-10～图 8-13 分别给出了“22”码、“121”码、“222”码和“211”码的传输演化过程。从中可以看到，各个孤子几乎互不扰乱地传输着。其它类型的序列也有相似的特点，它们都有一个共同点，这就是准二阶孤子与相邻一阶孤子之间虽不都相互靠扰，但存在少量的能量周期性地转移，如图 8-9 及图 8-11 中的一阶孤子幅值出现两次增加减少过程，幅值增加最大时约为 1.4，这将给接收端的检测带来混淆。这一困难可通过适当增加孤子初始

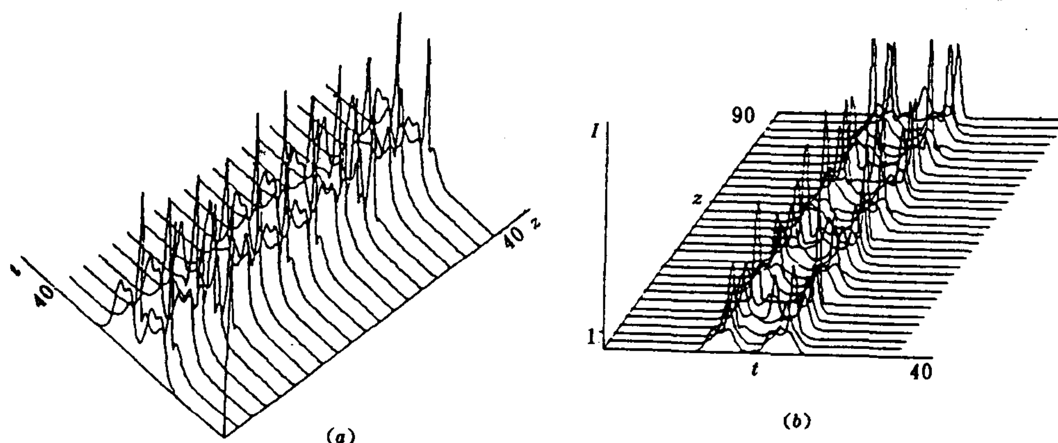


图 8-10 “22”码孤子序列的演化($n=1$，$\Delta=2.5$)

(a) $D=6.25$; (b) $D=8$

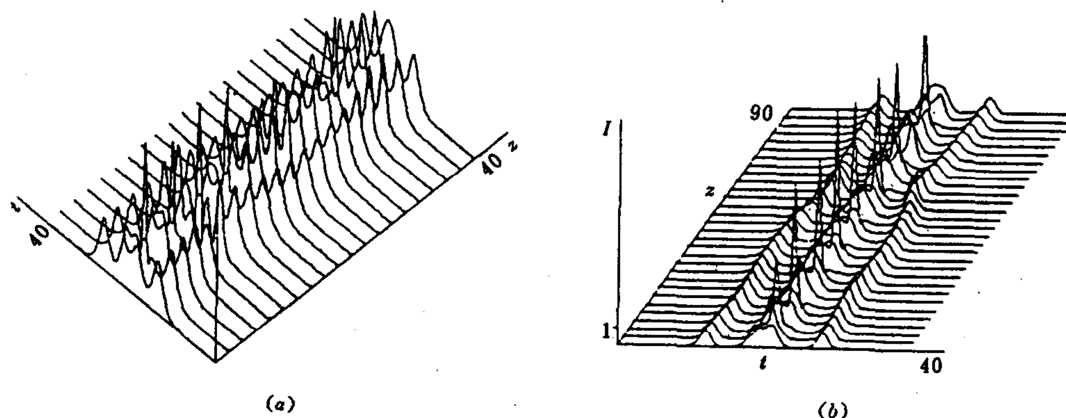


图 8-11 “121”码孤子序列的演化($n=1$，$\Delta=2.5$)

(a) $D=6.25$; (b) $D=8$

间距或采用积分检测器件来解决。因为，用幅值电平很难区别准二阶孤子的某些小幅值状态(这时孤子很宽)与一阶孤子状态，但用积分器件检测出孤子的能量面积，就一目了然了，图 8-14 给出了图 8-12(b)双源注入($n=1$，$\Delta=2.5$)时的能量面积演化。

需要强调，我们的模拟还没有考虑损耗及高阶色散对孤子相互作用的影响。前面指出了这两个因素的不利影响。但对于高阶色散的影响，可通过选择工作点或制造光纤时进行适当的控制，以使三阶色散相对二阶色散达到可以忽略的程度，从而消除高阶色散的影响。对于光纤损耗的影响，可用文献〔116～118〕中提出的光纤补偿方案进行消除，这就是不断减小纤芯或群速色散来维持孤子。

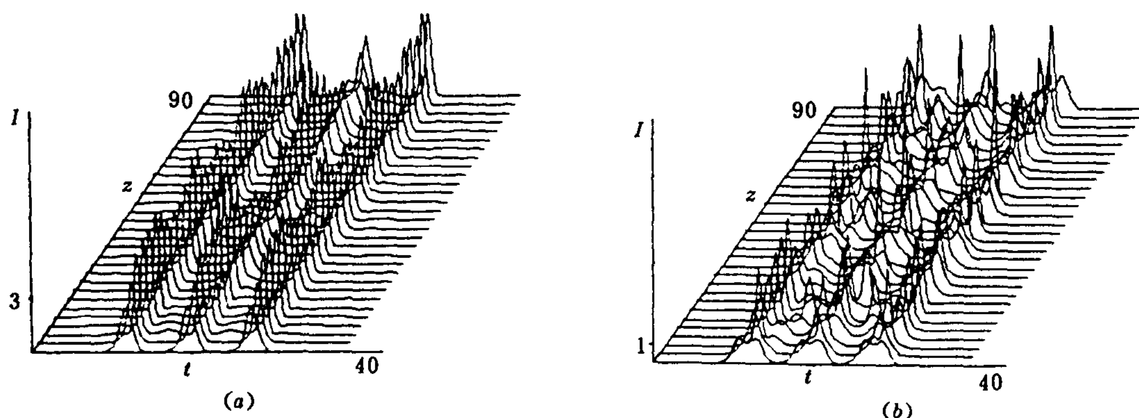


图8-12　“222”码孤子序列的演化($D=8$)

(a) 单源注入($N=1.6$)；(b) 双源注入($n=1$，$\Delta=2.5$)

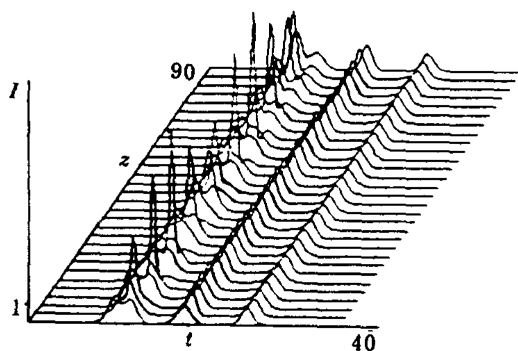


图8-13　“211”码孤子序列的演化

一阶孤子为非等幅注入($N_2=1.1$，$N_3=1.0$)；

二阶孤子为双源注入($n=1$，$\Delta=2.5$)

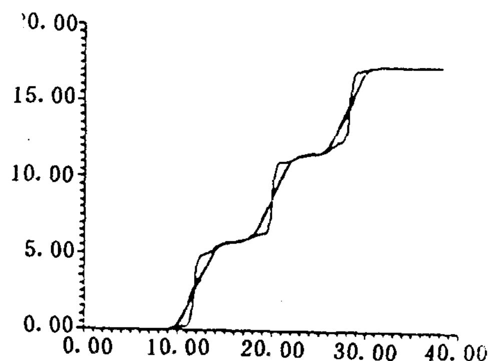


图8-14　图8-12(b)的能量面积的演化

8.1.7　小结

本节提出了利用二阶孤子与一阶孤子混合注入的三进制通信方案，并从理论上论证了其可行性，它将使孤子间的相互作用受到抑制的同时，又使比特率增加约 1.6 倍。

通过数值模拟二阶孤子对的相互作用，可以得出如下结论：

(1) 大幅值孤子在有外界作用时，将裂变亚孤子，其吸引、排斥及其相互作用大小取

决于裂变后各亚孤子的相对相位和幅值。

(2) 在一定的条件下，即使等幅同相注入，也可能出现能量在孤子间周期性地转移。

(3) 注入幅值越大，相互作用越强。

(4) 非等幅值注入，也可减少二阶孤子的相互作用。

此外，本节还提出了双源耦合注入方案(当然也可以直接用单源高功率注入)，可降低对光源的要求，同时分析了非线性领域中叠加原理的适应性问题，它在现有的各种文献及书籍中一直没得到正面论述。本节指出，一定情况下，场的叠加原理仍然适用，并非绝对失效。

对于二阶孤子(包括准二阶孤子及双源准二阶孤子)相互作用及其应用问题，本节只是就上述方面作了初步尝试，还有待于作进一步的深入探讨。

8.2 反相光孤子序列的相互作用

8.2.1 引言

在反相孤子相互作用方面，Hermansson 等人[95]研究了反相孤子对与同相孤子对相互作用的特点。本节将数值模拟反相孤子序列的相互作用。此外，考虑到通信中的实际情况，也给出了非等间距序列的演化规律，并模拟了同相反相孤子混合序列的传播过程。指出通过利用这种序列可实现三进制编码通信并提高比特率，或可用双极性编码来增加冗余度以减小误码率，这些设想都有一定的实际意义。

8.2.2 反相孤子序列的演化与相互作用

对于明孤子，工作频率处于反常色散区，即 $k''<0$，这时支配孤子传播的演化方程是式(8.1)。我们已经知道反相孤子对之间存在排斥作用[99]。按照等价粒子理论，由上式所确定的孤子序列中的相互作用取决于孤子间的交叠积分[119~120]，当相邻孤子反相时(包括暗孤子和反相明孤子)，总是呈现排斥作用，因此，对于多孤子序列，暗孤子和反相明孤子的演化规律完全类似，只是相互作用强度有所不同。我们模拟了各种不同长度的反相明孤子和暗孤子序列的相互作用过程。

在等初始间距(Δ)的情况下，他们都保持着单调的排斥和一致远离，而且随初始 Δ 增大，这种远离明显度逐渐减弱；当初始 Δ 增到一定程度后，即可在 40～90 的归一化距离以上的长度几乎等距地传输。对于明孤子，这个初始间距为 8～10 (对于暗孤子，这个间距大约为 5，见下节)。作为例子，图 8–15 和图 8–16 给出了三个和四个反相明孤子的演化图形。可以看到，在初始间距都为 5 的情况下，三个与四个孤子相互作用特点是相同的。对于暗孤子来说(见下节)，归一化间距 5 即可实现恒距传输。然而从图 8–16 可知，反相明孤子的初始间距至少为 8 甚至 10 (当 $\Delta=12$，已几乎无相互作用)才可恒距传输。虽然反相明孤子在抗相互作用方面仍比暗孤子逊色得多，但通过同相明孤子序列的结论与图 8–16 的结果，可了解到反相孤子序列在减小误码率方面明显地优于明孤子序列。因为，同相明孤子序列在这样的初始间隔及经过这样传输距离情况下，将会因相互靠近而引起误码率增加。

然而，对非等初始间距注入，反相明孤子不再具有等初始间距注入那样排斥并一致远

离(其间距同时增大，但仍保持着等间距)。事实上，由于孤子间的排斥势能(由孤子间距决定)和动能(孤子的固有惯性)二者共同支配的多样性，导致了非等间距情况下孤子相互作用的多样性。我们模拟了(−1，+1，−1，0，+1)、(−1，+1，0，−1，+1)、(−1，+1，0，−1)、(−1，+1，−1，0，+1，−1)等各种情况下的相互作用过程，都表现出各种不同的相互作用特点。但当初始间距大于 8～10 时，序列将像等初始间距注入一样，也能间距地、无排斥地传输。后面将要讲到的图 8−23(*d*)给出了 Δ=8 时的演化过程。

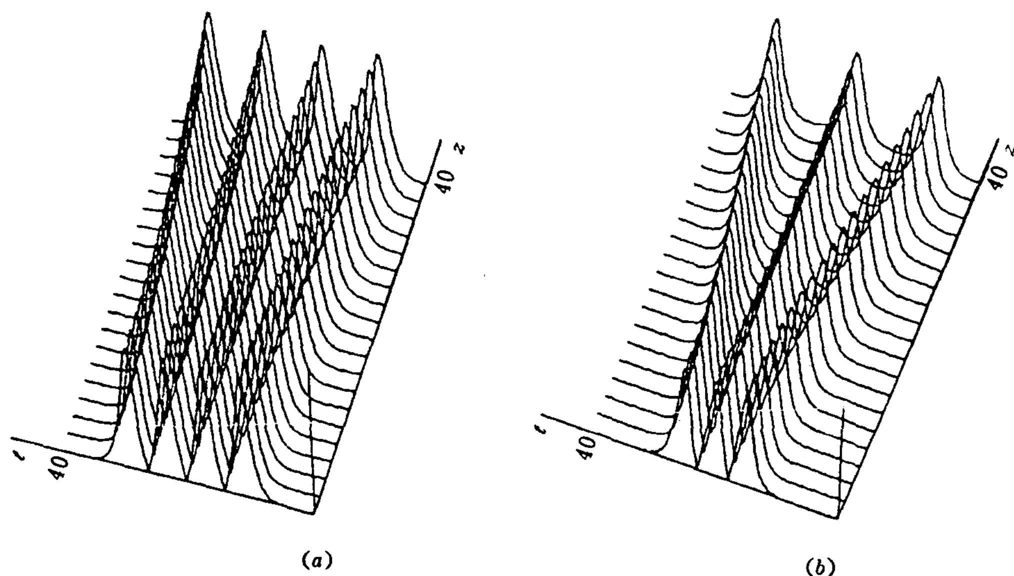


图 8−15　反相明孤子传播演化

(*a*) Δ=6；(*b*) Δ=5

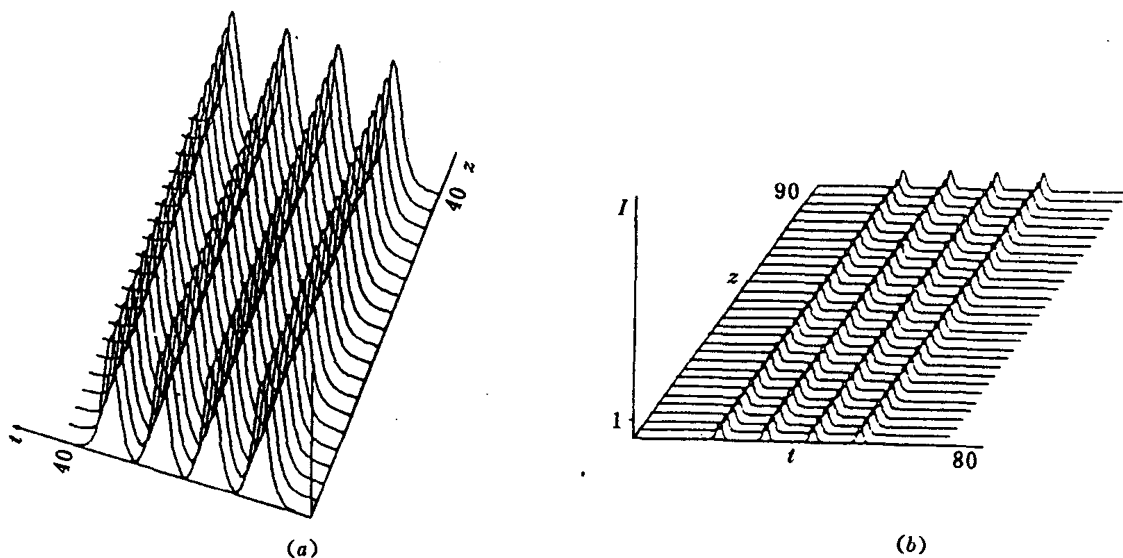


图 8−16　四反相孤子传输演化

(*a*) Δ=8；(*b*) Δ=12

8.2.3　反相序列间的演化与相互作用

为区别于前面表述的“反相孤子序列”，这里的“反相序列”是指每个序列中孤子彼此同相而各序列之间是反相的。如果我们试图引入双极性编码(对光孤子通信，其必要性还有待研究)或基于同、反相孤子的三进制编码，将会遇到这种序列。因此，我们模拟了几种组型，即反相孤子并没有使邻近的同相孤子序列合并速度明显地加快(即使在 $\Delta=5$ 时)，虽然同相孤子序列中边缘的那个孤子除受到的其它同相孤子的吸引作用外还受到了相邻反相孤子的排斥作用，这两个力指向同一方向，能使同相孤子序列加速靠近，但数值结果表明这种加速作用并不明显。

图 8−17 给出(+1，+1，−1，−1)组合的在两种情况下演化情况，当 $\Delta=8$ 时，同相序列中的二孤子最大相互作用发生在约为 39 的归一化距离上；但当 $\Delta=12$ 时，相互作用已经消失。

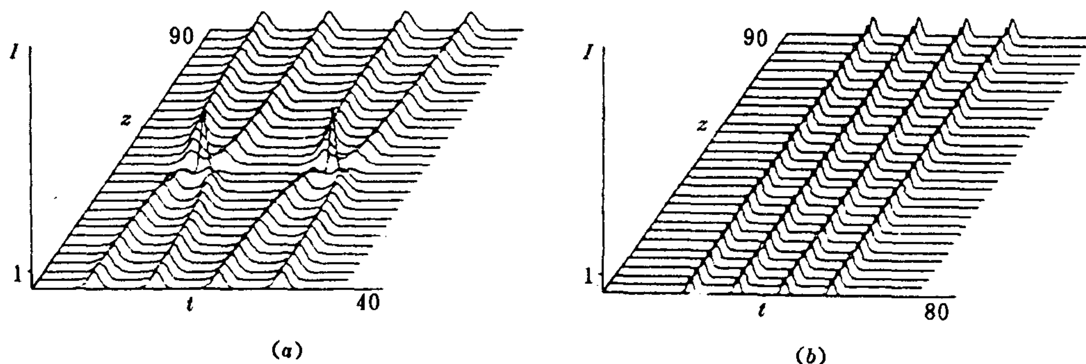


图 8−17　(+1，+1，−1，−1)码的演化情况

(*a*) $\Delta=8$；(*b*) $\Delta=12$

图 8−18 给出了(+1，+1，+1，−1)码的演化情况。$\Delta=8$ 时，最大作用距离大约为 48；$\Delta=12$ 时，相互作用几乎消失。

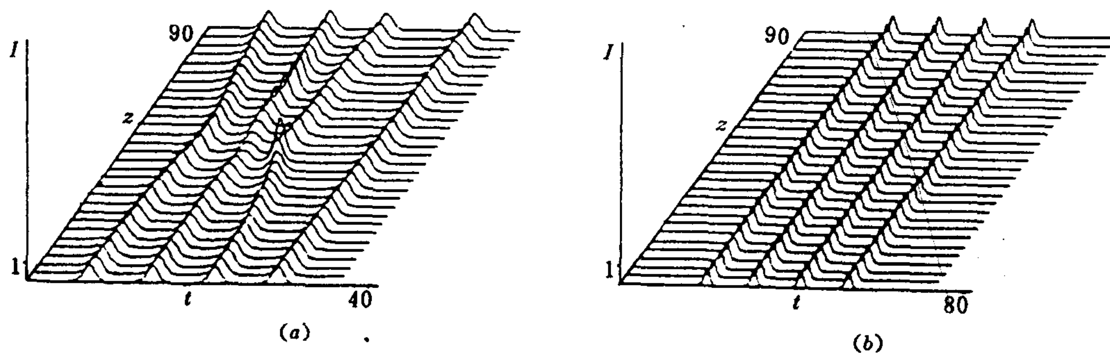


图 8−18　(+1，+1，+1，−1)码的演化情况

(*a*) $\Delta=8$；(*b*) $\Delta=12$

图 8−19 给出了(+1，−1，+1，+1)码和(+1，+1，−1，−1，+1，+1)码的演化情况。前者中的反相孤子对在长距离上出现了明显的排斥(在 40 归一化距离上，还不明显)，而

同相孤子对的最大相互作用距离为 39。说明初始归一化距离应在 10 以上。由此可见，通过同相反相孤子的混合，能够实现二极性编码或三进制编码。

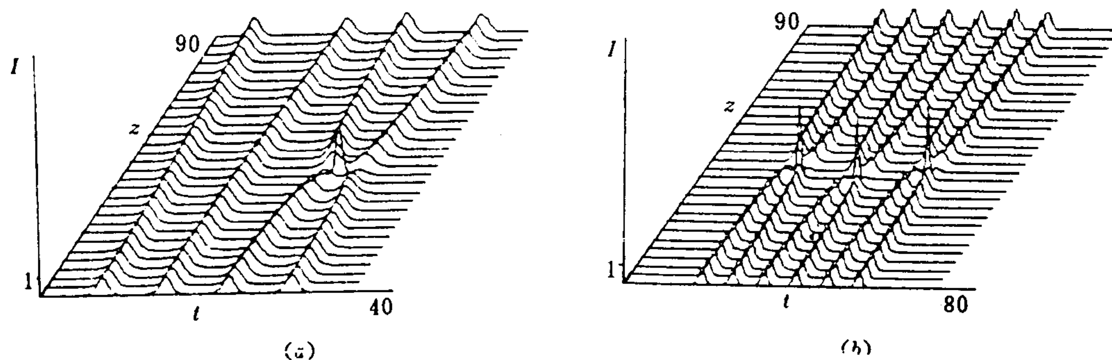


图 8−19　(+1，−1，+1，+1)码和(+1，+1，−1，−1，+1，+1)码的演化情况($\Delta=8$)

8.2.4　小结

本节的数值模拟表明，对于反相孤子序列在减小因相互作用而引起的误码率方面是优于同相孤子序列的；而且无论是等初始间距还是非等初始间距序列，只要 $\Delta\geqslant 10\sim12$，序列便可恒距传输到 90 的归一化距离。对于阶跃 SiO_2 芯光纤来说，这相当于 117 km。此外，本文还研究了反相同相孤子混合序列的演化特点，并指出反相孤子串的加入，使同相孤子序列的相互作用没有发生严重的变化，这使得试图通过利用这种序列实现三进制编码通信来提高比特率或实现双极性编码来增加冗余度以减小误码率的设想有一定的实际意义。

8.3　暗孤子及其序列的相互作用

8.3.1　引言

在光纤暗孤子方面，自 Hasegawa[121] 等人于 1973 年提出直到最近，对其研究才开始全面展开。W.Zhao 和 E.Bourkoff[122] 的数值模拟表明，暗孤子在抗损耗衰减和噪声方面比明孤子有更优越的特性。苏联学者 E.M.Dianov 等[123] 通过数值模拟提出了产生暗孤子序列的方法。S.A.Gredeskul 和 Y.S.Kivshar[124] 从理论上阐明产生暗孤子不像明孤子那样存在阈值。W.Zhao 和 E.Bourkoff[125] 数值观察了两个暗孤子的相互作用，暗孤子在抗相互作用方面仍然而且显著优于明孤子。明孤子序列相互作用[102, 99] 与孤子对相互作用存在明显的差异，暗孤子是否亦有类似特点？本节基于暗孤子演化方程对暗孤子序列进行数值研究。

在正常色散区孤子演化方程是

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2|\varphi|^2\varphi=0 \tag{8.5}$$

或

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+|\varphi|^2\varphi=0 \tag{8.6}$$

8.3.2 暗孤子的解析解

式(8.6)的一般单孤子(暗孤子)解是

$$\varphi(z,\ t)=\varphi_0\frac{(\lambda-\mathrm{i}v)^2+E(z,\ t)}{1+E(z,\ t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi_0^2 z} \tag{8.7}$$

式中:

$$E(z,\ t)=\mathrm{e}^{2v\varphi_0(t-t_0-\lambda\varphi_0 z)} \tag{8.8}$$

$$\lambda^2=1-v^2 \tag{8.9}$$

当$\lambda=0$时，$v=\pm1$，式(8.7)退化为

$$\varphi(z,\ t)=\varphi_0\tanh(\varphi_0 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0 z} \tag{8.10}$$

此即基本暗孤解。

当$v^2\ll1$时，$\lambda\approx\pm(1-v^2/2)$，这时

$$\varphi(z,\ t)\approx\left[\varphi_0-\frac{1}{2}\varphi_0 v^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{Z}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0^2 z-\mathrm{i}2v/(1+e^Z)} \tag{8.11}$$

式中:

$$Z=2v\varphi_0\left[t-t_0\mp\varphi_0\left(1-\frac{1}{2}v^2\right)z\right] \tag{8.12}$$

式 (8.11) 代表了小振幅暗孤子；对于一般 v 值或 λ 值，式 (8.7) 代表了灰孤子解；基本暗孤子解式 (8.10)，通常也称为扭结 (Kink) 解。

8.3.3 暗孤子序列相互作用的数值模拟

基于支配方程式(8.6)，借助于光束传播法，可以模拟多暗孤子的相互作用。计算时采用等幅和等间距及非等间距注入，例如，对于四个等间隔孤子，由下式注入:

$$\psi(0,\ \tau)=\begin{cases}+\tanh(\tau+1.5\Delta) & -\infty<\tau\leqslant-\Delta\\ -\tanh(\tau+0.5\Delta) & -\Delta<\tau\leqslant0\\ +\tanh(\tau-0.5\Delta) & 0<\tau\leqslant\Delta\\ -\tanh(\tau-1.5\Delta) & \Delta<\tau<+\infty\end{cases} \tag{8.13}$$

图 8-20 给出了不同初始间隔下的双孤子相互作用的演化过程。可以看出：暗孤子表现出排斥特性；当初始间距 $\Delta=2.5$ 时，排斥势能很大，因此两孤子迅速分离；当 $\Delta=5$ (约 2.8 个 3 dB 脉冲宽度)时，在归一化距离为 60 至更长的距离范围内，因其初始排斥势能极弱，孤子几乎保持着不变的间距。这里关于双孤子相互作用的结论同文献〔125〕是完全一致的。四等间隔孤子相互作用同双暗孤子相似，当 Δ 较小时，几乎是等间距地排斥，见图 8-21。在图 8-21(*c*)中，给出了 $\Delta=5$ 的反相明孤子序列的演化过程，以作比较，显然，明孤子的排斥作用要强得多，这显示出暗孤子的通信应用前景。图 8-22 分别给出了六孤子((*a*) $\Delta=2.5$，(*b*) $\Delta=5$)，八孤子和十二孤子序列仍然是一致地远离的演化情

况。但与四孤子相比，在 $\Delta=2.5$ 时，六、八、十二孤子在传输距离接近 60 时，已出现等距传输的趋势，且序列中孤子数越多，越明显，等距传输间隔越小，尤其在序列的中部，这是因为这部分孤子处于排斥作用很弱(因相互抵消)的综合势中。

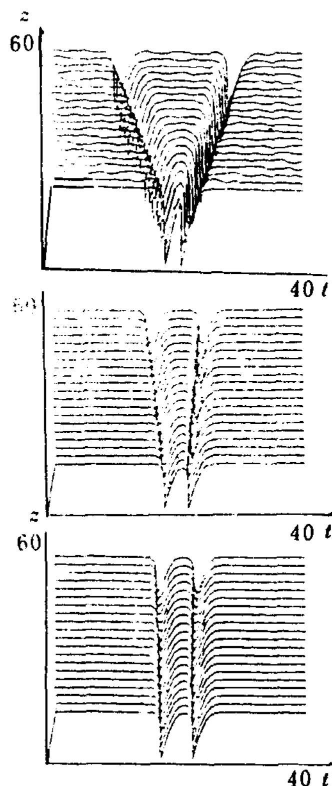


图8-20　两孤子相互作用

(*a*) $\Delta=2.5$;

(*b*) $\Delta=3.75$;

(*c*) $\Delta=5.0$

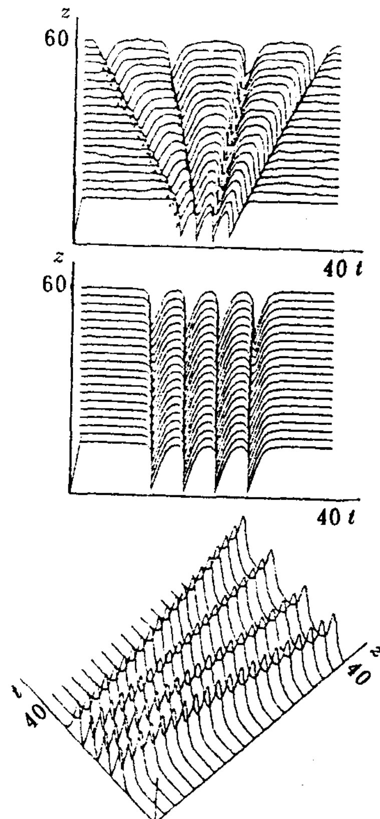


图8-21　四孤子相互作用

(*a*) $\Delta=2.5$;

(*b*) $\Delta=5.0$;

(*c*) 反相明暗孤子序列，$\Delta=5.0$

由于通信中脉冲传输都是非等间隔的随机序列，因此图 8-23 中给出编码为 11101((*a*) $\Delta=2.5$, (*b*) $\Delta=5$)和 11011((*c*) $\Delta=2.5$)的序列。为了比较，在(*d*)中给出了 $\Delta=8$ 的 1101 相反明孤子码。可以看到，非等间隔孤子的相互作用不再像等间隔情况那样单调。在图 8-23(*a*)中第三个孤子受到了第一、二个孤子的更大作用，使得它迅速排向第四个，注意这时第四个孤子由于孤子惯性还没有来得及反应，第三个孤子就与它靠得很近，使得四个孤子得到了较大的势能，但由于第三个孤子从第一、二个孤子势中得到的动能在与第四个相互作用时交给了第四个，因此第三个孤子在经过大约 $5\times 3=15$ 归一化距离后，与第二个孤子等间距地传播到为 60 的归一化距离甚至更远。在图 8-23(*c*)中所表现出的特性也是很有趣的，由于第二、三个孤子之间的间距大一倍，在开始时，受第一、四个孤子的排斥，迅速靠拢，在此过程中通过交换势能与动能，最终竟以两个暗孤子对的方式传播着，即对与对之间保持着排斥作用，但每对中的两孤子却几乎是等间隔平移的，这是暗孤子相互作用的又一新现象。

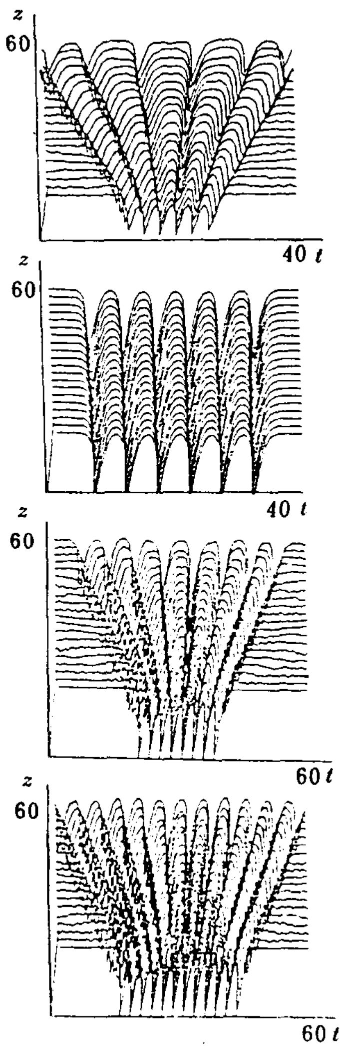


图8-22 多孤子相互作用

(*a*) 6 孤子，$\Delta=2.5$;

(*b*) 6 孤子 $\Delta=5.0$,

(*c*) 8 孤子 $\Delta=2.5$;

(*d*) 12 孤子 $\Delta=2.5$

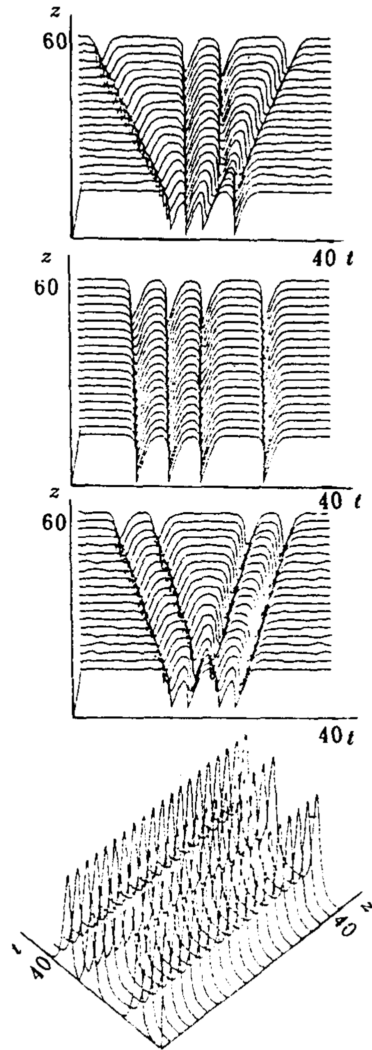


图8-23 非等初始间距序列相互作用

(*a*) 11101 编码，$\Delta=2.5$;

(*b*) 11101 编码，$\Delta=5.0$;

(*c*) 11011 编码 $\Delta=2.5$;

(*d*) 1101 编码，反相明孤子序列，$\Delta=8.0$

8.3.4 暗孤子序列相互作用的渐近行为

对于多暗孤子序列相互作用的渐近行为，可作一般分析，文献〔99〕基于逆散射理论得到同相反相双明孤子的相互作用力

$$2\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}=\mp 8\mathrm{e}^{-2q} \tag{8.14}$$

式中，$2q$为孤子间距。式(8.14)有解：

$$\left.\begin{aligned} 2(q-q_0)&=\ln[\cosh^2(2ze^{-q_0})]=\ln\left[\frac{1+\cosh(4ze^{-q_0})}{2}\right]^2 \\ 2(q-q_0)&=\ln[\cos^2(2ze^{-q_0})]=\ln\left[\frac{1+\cos(4ze^{-q_0})}{2}\right]^2 \end{aligned}\right\}, \tag{8.15}$$

分别相应于反相与同相孤子对。文献〔125〕通过数值模拟，给出了双暗孤子的相互作用的经验公式

$$2(q-q_0)-2ze^{-2q_0}=\ln[\cosh(2ze^{-2q_0})] \tag{8.16}$$

形式上，上式与文献〔125〕稍有变化，指数为 $-2q_0$ 就决定了暗孤子相互作用比明孤子弱，我们通过图 8－20 的模拟结果也验证了该公式的一致有效性。由式 (8.16) 可得暗孤子对间的相互作用力

$$2\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}=+4e^{-2q}(2e^{-2q_0}-e^{-2q}) \tag{8.17}$$

对于孤子序列中的次近邻孤子对，由于同相，上式中应有变化从“+”→“−”。这样就可处理多孤子序列中孤子间距随距离 Z 的演化。当各孤波相距较远时，用$q_k=\sum_{j=1}^{N}F_{jk}(q_k,\ q_j)$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$)联立求解这个耦合方程组。F_{jk}是第 j 个孤子对第 k 个孤子的作用力，求解过程中可略去次近邻以远孤子的相互作用，差分格式有效方便，当孤波较近时，需考虑相位的演化与间距的耦合作用。我们可作渐近分析，根据式(8.17)可知，当(q_k-q_{k-1})和($q_{k+1}-q_k$)足够大时，$q\approx 0$，即各孤子将作匀速运动，设$q_k=v_k$，于是$q_k=v_kt+q_{k0}$，这正是所有模拟结果的渐近特性，即当 Δq 增大到一定值，匀速地相互远离出现了，如同在图 8−21～图 8−24 中所表现的那样。这个特性在未来的通信工程中(如果可能)有着重要意义，即只需对孤子序列模拟较短的距离，就足以确定匀速渐近态的v_k及q_{k_0}，就可确定传输到任意时刻的孤子间距，例如，对于图 8−20(a)，图 8−21(a)等只需模拟到 $z=15$，对于图 8−20(b)、图 8−22(a)、图 8−22(c)等只需模拟到 $z\approx 30$，即可确定 $z=60$ 甚至 $z=80$ 时的间距。

8.3.5 小结

(1) 由于暗孤子序列中孤子间的“反相”使孤子间总是呈现排斥，因而使等初始间距暗孤子序列相互作用不像明孤子序列那样复杂。但对于非等初始间距序列，由于势能与动能之间的转换多样性，使孤子传播表现出一定的多样性。

(2) 在任何情况，即使是非等初始间距，当初始归一化距离大于、等于 5(相当于 2.8 个 3 dB 脉冲宽度)，序列能几乎维持原样地传输到 60 的归一化距离以上。对于阶跃 SiO_2 芯光纤，$\lambda_0=1.27\ \mu m$，可计算到 60 归一化距离，这相当于距离为 78 km，因此，即使不考虑暗孤子在抗损耗和抗噪声方面的优点，仅就抗相互作用方面，暗孤子相对明孤子通信的码率可提高一倍，因此在理想情况下(即标准 NLS 方程，亦即高阶效应极小)，归一化初始距离取 5 是通信的最佳选择。W.Zhao 和 E.Bourkoff[126] 在暗孤子实验方面的成功

为暗孤子通信应用揭开了序幕。

8.4 光纤 N 孤子解的 Hirota 分析

8.4.1 引言

在光纤中，不计损耗及高阶项，支配明孤子和暗孤子的方程分别是:

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2|u|^2u=0 \tag{8.18}$$

和

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2|u|^2u=0 \tag{8.19}$$

在这一章，我们首先求解式 (8.18) 的满足条件

$$|u|_{x\to\pm\infty}\to 0 \tag{8.20}$$

下的 N—明孤子解；然后，讨论式 (8.19) 的满足条件

$$|u|_{x\to\pm\infty}=1 \tag{8.21}$$

的暗孤子解。为了以后分析相互作用时应用，只讨论双暗孤子解。

8.4.2 N–明孤子解

按照Hirota的思想，把$u(x,\ t)$表示成 Pada 近似，即

$$u=\frac{g}{h} \tag{8.22}$$

式中，$\mathrm{Im}(h)=0$，将式 (8.22) 代入式 (8.18) 有

$$-\frac{\mathrm{i}(h'_t g-hg'_t)}{h^2}-\frac{(h''_x h-2h'_x h'_x+hh''_x)g}{h^3}+\frac{h''_x g-2g'_x h'_x+g''_x h}{h^2}+2\frac{|g|^2g}{h^3}=0 \tag{8.23}$$

于是将 $1/h^2$ 项的 $1/h^3$ 分别合并，并令其系数为零，有

$$-\mathrm{i}(h'_t g-hg'_t)+(h''_x g-2g'_x h'_x+g''_x h)=0 \tag{8.24}$$

$$h''_x h-2h'_x h'_x+hh''_x-2|g|^2=0 \tag{8.25}$$

式(8.25)给出

$$h''_x h-(h'_x)^2=2|g|^2 \tag{8.26}$$

可写成双线性形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 h(x,\ t)\cdot h(x',\ t')_{x=x',\ t=t'}=2|g|^2 \tag{8.27}$$

式(8.24)也可写成双线性形式

$$\left\{\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)g(x,\ t)\cdot h(x',\ t')+\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 g(x,t)\cdot h(x',t')\right\}_{x=x',\ t=t'}=0 \tag{8.28}$$

设:

$$h_N(x,\ t)= h_0+ \sum_{j=1}^{2N} a_j e^{\alpha_j t+ \beta_j x}+ \sum_{i>j\geq 1}^{2N} a_{ij} e^{\varphi_i+\varphi_j}+ \sum_{i>j>k\geq 1}^{2N} a_{ijk} e^{\varphi_i+\varphi_j+\varphi_k}+ \cdots \tag{8.29}$$

$$g_N(x,\ t)= g_0+ \sum_{j=1}^{2N} b_j e^{\alpha_j+ \beta_i x}+ \sum_{i>j\geq 1}^{2N} b_{ij} e^{\varphi_i+\varphi_j}+ \sum_{i>j>k\geq 1}^{2N} b_{ijk} e^{\varphi_i+\varphi_j+\varphi_k}+ \cdots \tag{8.30}$$

$$\varphi_i= \alpha_i t+ \beta_j x$$

代入式 (8.27) 和式 (8.28)，并利用双线性算子的性质，即对指数函数作用的性质，通过比较各项系数，可得到 $h(x,\ t)$ 和 $g(x,\ t)$ 解是:

$$h_N(x,\ t)= \sum_{\varepsilon\in Q_1\{\varepsilon\}} \prod_{j=1}^{2N} C_j \exp[\varepsilon_j(\beta_i x+ \alpha_i t)] \prod_{1\leq j\leq k\leq 2N} \exp[C_{jk}\varepsilon_i\varepsilon_k] \tag{8.31}$$

$$g_N(x,\ t)= \sum_{\varepsilon\in Q_2\{\varepsilon\}} \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{2N} C_j \exp[\varepsilon_j(\beta_j x+ \alpha_j t)] \prod_{1\leq j\leq k\leq 2N} \exp[C_{jk}\varepsilon_i\varepsilon_k] \tag{8.32}$$

上式及下面各式中 $\alpha_j= \mathrm{i}\beta_j^2/2$，而 β_j，θ_j 是任意复数，$\varepsilon_j= 0$ 或 1，且有:

$$\beta_j= \beta_{j-N}^{*} \qquad \theta_j= \theta_{j-N}^{*} \qquad C_j= C_{j-N}^{*} \qquad (j= N+1,\ N+2,\ \cdots,\ 2N) \tag{8.33}$$

$$C_j= \begin{cases} \prod\limits_{k=1,\ k\neq j}^{N} \dfrac{(\beta_j+ \beta_j^{*})(\beta_j+ \beta_k^{*})}{\beta_j- \beta_k} \exp(2\theta_j) & \varepsilon_j= 1 \\ 1 & \varepsilon_j= 0 \end{cases} \quad (j= 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{8.34}$$

$$\exp C_{jk}= \begin{cases} (\beta_j- \beta_k)^2 & (j,\ k= 1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ \text{或} j,k= N+1, N+2, \cdots, 2N) \\ (\beta_j+ \beta_k)^{-2} & (j= 1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ k= N+1,\ N+2,\ \cdots,\ 2N) \end{cases} \tag{8.35}$$

$Q_1(\varepsilon)$代表对所有满足$\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon_j= \sum\limits_{j=N+1}^{2N}\varepsilon_j$的 $2N$ 维矢量$\varepsilon= \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{2N}\}$的集求和，其中，各个$\{\varepsilon_j\}$是在 0 或 1 之间任意挑选的；$Q_2(\varepsilon)$代表对满足$\sum\limits_{j}^{N}\varepsilon_j= \sum\limits_{i=N+1}^{2N}\varepsilon_j+ 1$的矢量 $\varepsilon= \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{2N}\}$ 的集求和。下面更清楚地说明式 (8.31) 与式 (8.29) 的对应关系。如果在 $\varepsilon^{(1)}= \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{2N}\}$ 和 $\varepsilon^{(2)}= \{\varepsilon_{N+1},\ \varepsilon_{N+2},\ \cdots,\ \varepsilon_{2N}\}$ 中各取一个不为零的 ε_j，则这样的矢量属于矢量集 $Q_1(\varepsilon)$，对应于式 (8.29) 的第二项；若在 $\varepsilon^{(1)}$ 和 $\varepsilon^{(2)}$ 中，全部取为 0，则对应式 (8.29) 的第一项；即 $h_0\neq 0$。同理，若在 $\varepsilon^{(1)}$，$\varepsilon^{(2)}$ 中各取两个不为 0 的 ε_j，则对应 (8.29) 式的第三项，其余依次类推。但是，对于 $\varepsilon^{(1)}$，$\varepsilon^{(2)}$ 各元素全取为 0 时，不属于矢量集 $Q_2(\varepsilon)$，因此式 (8.30) 中的第一项 $g_0= 0$；若把 $\varepsilon^{(1)}$，$\varepsilon^{(2)}$ 中的元素全取为 1，则这个矢量属于 $Q_1(\varepsilon)$，但不属 $Q_2(\varepsilon)$，因此式 (8.31) 中有 $2N$ 个含 x，t 的指数因子相乘，而式 (8.32) 中至多只有 $2N-1$ 个这样的指数因子相乘。因为，要使 $\{\varepsilon^{(1)},\ \varepsilon^{(2)}\}$

属于 $Q_2(\varepsilon)$，只能是 $\varepsilon^{(1)}$ 中取 N 个 ε_j 全为 1，而 $\varepsilon^{(2)}$ 只能取 $N-1$ 个全为 1。讨论 β_j 都在复平面的右半平面的情形，则每个含 x 的指数因子 $\to\infty(x\to+\infty)$ 或 $\to 0(x\to-\infty)$。于是，当 $x\to-\infty$，$g_N\to 0$，$h_N\to h_0$，因此 $u(x,\ t)\to 0$；当 $x\to+\infty$时，$g_N\to\infty$，$h_N\to\infty$，由于 h_N 比 g_N 多一指数因子（如前所述），故 $u(x,\ t)=g_N/h_N\to 0$。因此，式 (8.31)、式 (8.32) 是满足 $u(x,\ t)$ 在 $|x|\to\infty$ 处的边界条件的。至此可得 N—明孤子解

$$u_N(x,\ t)=\frac{g_N(x,\ t)}{h_N(x,\ t)}$$

8.4.3 N—暗孤子解的 Hirota 分析

采用上面步骤，还可给出 N—暗孤子解的显式，先作变换

$$u(x,\ t)\to u(x,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t} \tag{8.36}$$

则式(8－19)化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(|u|^2-1)u=0 \tag{8.37}$$

于是可寻求$|u|\to 1(x\to\pm\infty)$的解。用前面方法把式 (8.37) 化为双线性形式，有:

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{i}(h'_t g-hg'_t)-(h''_x g-2g'_x h'_x+g''_x h)=0\\&-(h''_x-2h'_x h'_x+hh''_x)-2|g|^2+2h^2=0\end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

即:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 h(x,\ t)\cdot h(x',\ t')_{x'=x,\ t'=t}=2(h^2-|g|^2) \tag{8.39}$$

$$\left\{i\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)g(x,\ t)\cdot h(x',\ t')-\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 g(x,\ t)\cdot h(x',\ t')\right\}_{x'=x,\ t'=t}=0 \tag{8.40}$$

由于在暗孤子情况下，$|u|\to 1$ 而不是 0，因此式 (8.30) 中的最高次指数因子与式 (8.29) 中对应是一样多。求解 N—暗孤子的步骤与前面 N—明孤子的完全一样。下面只给出单孤子和双孤子解的结论，即:

$$\begin{aligned}h=&h_0+a_1\mathrm{e}^{2\mu_1(x-x_{01})+4\mu_1\lambda_1 t}+a_2\mathrm{e}^{2\mu_2(x-x_{02})+4\mu_2\lambda_2 t}\\&+a_{12}\mathrm{e}^{2\mu_1(x-x_{01})+2\mu_2(x-x_{02})+4\mu_1\lambda_1 t+4\mu_2\lambda_2 t}\end{aligned} \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned}g=&g_0+b_1\mathrm{e}^{2\mu_1(x-x_{01})+4\mu_1\lambda_1 t}+b_2\mathrm{e}^{2\mu_2(x-x_{02})+4\mu_2\lambda_2 t}\\&+b_{12}\mathrm{e}^{2\mu_1(x-x_{01})+2\mu_2(x-x_{02})+4\mu_1\lambda_1 t+4\mu_2\lambda_2 t}\end{aligned} \tag{8.42}$$

式中:

$$a_1=\frac{1}{\mu_2}\qquad a_2=\frac{1}{\mu_1}$$

$$b_1=\left(\frac{1}{\mu_2}-2\mu_2-2\mathrm{i}\lambda_2\right),\qquad b_2=\left(\frac{1}{\mu_1}-2\mu_1+2\mathrm{i}\lambda_1\right)$$

$$a_{12}=b_{12}$$

$$h_0=\frac{1}{\mu_1\mu_2}-\frac{(\mu_1+\mu_2)^2+(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\mu_1+\mu_2)^2}$$

$$g_0=\frac{1}{\mu_1\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}(2\mu_2+2\mathrm{i}\lambda_2)+\frac{1}{\mu_2}(2\mathrm{i}\lambda_1-2\mu_1)+\left(2-\mathrm{i}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_1+\mu^2}\right)^2-1$$

$$\lambda_1=1-\mu_1^2,\quad \lambda_2=1-\mu_2^2$$

可取 $a_{12}=b_{12}=1$。上面已用到 $x\to\pm\infty$ 时，$|u(x,\ t)|\to 1$，或$|g(x,\ t)|^2\to h^2(x,\ t)$ 的条件。μ_1 和 μ_2 分别代表第一个和第二个暗孤子相对连续波背景的深度，因此当其中之一为 0 时，退化为单孤子。例如，当 $\mu_2\to 0$ 时，$\lambda_2\to 1$，这时

$$h\to\frac{1}{\mu_2}\mathrm{e}^{2\mu_1(x-x_{01})+4\lambda_1\mu_1 t}+\frac{1}{\mu_1\mu_2}$$

$$g\to\frac{1}{\mu_2}\mathrm{e}^{2\mu_1(x-x_{01})+4\lambda_1\mu_1 t}+\frac{2\mathrm{i}\lambda_1-2\mu_1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1\mu_2}$$

于是

$$u(x,\ t)\to\frac{\mu_1\mathrm{e}^{Z(x,\ t)}+2\mathrm{i}\lambda_1\mu_1+1-2\mu_1^2}{\mu_1\mathrm{e}^{Z(x,\ t)}+1}$$

把 μ_1 归到指数中的 x_{01} 中去，利用 $1=\lambda_1+\mu_1^2$，则分子常数项为

$$2\mathrm{i}\lambda_1\mu_1+\lambda_1(\mathrm{i}\mu_1)^2=(\lambda_1-\mathrm{i}\mu_1)^2+\lambda_1-\lambda_1^2$$

于是

$$u(x,\ t)\ \to\ \frac{\mathrm{e}^Z+(\lambda_1-\mathrm{i}\mu_1)^2+(\lambda_1-\lambda_1^2)}{\mathrm{e}^Z+1}\tag{8.43}$$

$$Z(x,\ t)=2\mu_1(x-x_{01})+4\lambda_1\mu_1 t$$

特别地，当$\mu_1=1$，$\lambda_1=0$ 时

$$u(x,\ t)\ \to\ \frac{\mathrm{e}^Z-1}{\mathrm{e}^Z+1}=\tanh Z\tag{8.44}$$

此即为基本暗孤子。由上面双暗孤子解，可以分析暗孤子相互作用的规律，如相互作用力及加速度随二者间距的依赖关系，还可解出二者间距随时间的演化。

第 9 章

饱和非线性支持的孤子

Kerr 非线性是光纤折射率非线性响应的理想描述，它仅适应于束强度不太大的情况。但现实中，非线性强到一定的程度，就要出现饱和。这时，支配孤波的传输方程一般具有

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+N(|u|^2)u=0$$

的形式，其中 $N(\eta)$可能具有的五种形式是:

(A) $N(\eta)=1-\mathrm{e}^{-\eta}$

(B) $N(\eta)=\dfrac{(k^2/2)\eta}{1+[n_0^2/(n_s^2-n_0^2)]\eta}$

(C) $N(\eta)=\dfrac{\eta(\gamma\eta+2)}{(1+\gamma\eta)^2}$

(D) $N(\eta)=\dfrac{\eta-\alpha\eta^2}{1+\gamma\eta}$

(E) $N(\eta)=1-\dfrac{1}{\eta}+\dfrac{\mathrm{e}^{-\eta}}{\eta}$

模型(B)又称为二能级模型，它不仅是光学中的数学模型，也是等离体等领域的数学模型[176]。酸性玻璃中的光学非线性也受这一规律支配[177]，在文献〔28〕及〔29〕中给出了方程的具体形式，并分析了光束及空间暗孤子在这种介质中的传输。

模型(C)和(D)是文献〔160〕和〔115〕中所引用的一种饱和非线性。

模型(A)也是文献〔28〕中提到的一种非线性。

文献〔178〕讨论了 $N(\eta)$具有截短多项式形式的非线性介质中的双稳孤子。然而，半导体掺杂光纤中的非线性则由模型(E)所支配[26]，Kumar 在文献〔27〕中，用不变量方法研究了这种非线性所支配的 Gauss 脉冲的演化，本章分别研究这一方程所支配的行波孤子解和 kink 解，高阶孤子的演化特征和孤子相互作用，以及计及高阶项后，这一方程所支持的小幅孤波解。

9.1　饱和型半导体掺杂光纤中的明暗孤子行波解

9.1.1　引言

最近，半导体掺杂光纤的非线性特性是光开关及光波导领域的重要课题〔127~128〕。众所周知，在半导体掺杂光纤中，其非线性是饱和型的，不是 Kerr 型的〔129~130〕。有鉴于此，Kumar 从慢变波包近似出发导出了饱和型光纤的脉冲传输方程〔26〕

$$\mathrm{i}q_{\xi}+\sigma\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+q\left[1-\frac{1}{|q|^{2}}+\frac{\mathrm{e}^{-|q|^{2}}}{|q|^{2}}\right]=0 \tag{9.1}$$

式中:

$$q=\frac{A}{A_{0}}\qquad A_{0}=\chi^{-1/2}\qquad \chi=\frac{\varepsilon_{2}}{\varepsilon_{s}}\qquad \xi=\left(\frac{kn_{2}}{xn_{0}}\right)x$$

$$\tau=\left[\frac{kn_{2}}{n_{0}\chi(|R_{\omega\omega}|)}\right]^{1/2}\cdot\left(t-\frac{x}{v_{g}}\right)$$

$\sigma=1$ 和 $\sigma=-1$ 分别对应于反常色散区和正常色散区，A_0 为场最大幅值，v_g 为群速，ε_2 为通常的 Kerr 系数，ε_s 为介电常数非线性部分的饱和值。对于脉冲在这种系统中的传输问题，只见到 Kumar 在文献〔27〕中用不变量方法对 Gauss 脉冲的传播演化作了分析，但对孤子脉冲(包括暗孤子脉冲)的传输特征尚未作研究。由于一般包络用作光开关时，因相移总与包络强度相关，因而只能对脉冲作部分开关。Islam 等人〔131〕指出，若用孤子脉冲，可达到对整个脉冲的开关，因为基本孤子(一般是行波解，也叫一阶孤子，$N=1$)的整个包络的相移是一致的。因此，给出式(9.1)的基本孤子解即行波解有着极其重要的意义，因为只有光孤子开关的发展才能使光孤子通信真正得到全面发展。本节给出式(9.1)的明、暗一阶孤子(行波)解。为实验及进一步的理论分析(如耦合)提供必要的参考。

9.1.2　一般行波解及其性质

设波包 $q(\xi,\ \tau)$的形式为

$$q(\xi,\ \tau)=u(\xi,\ \tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\xi,\ \tau)} \tag{9.2}$$

代入式 (9.1) 并分离实部与虚部有:

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}u+\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{\partial^{2}u}{\partial\tau^{2}}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^{2}u\right]+uh(u^{2})=0 \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\sigma\left[2\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\frac{\partial^{2}\theta}{\partial\tau^{2}}u\right]=0 \tag{9.4}$$

显然，θ 有一特解使式(9.3)、式(9.4)满足，即:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=D(\text{常数}) \tag{9.5a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}=T(\text{常数}) \tag{9.5b}$$

这时式(9.4)变成

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\sigma T\frac{\partial u}{\partial \tau}=0$$

上式表明 $u(\xi,\ \tau)$ 有行波解 $u(\tau-\sigma T\xi)$，因此令

$$z=\tau-\sigma T\xi \tag{9.6}$$

并代入式 (9.3) 可得:

$$\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=au-uh(u^2) \tag{9.7}$$

$$h(u^2)=1-\frac{1}{u^2}+\frac{e^{-u^2}}{u^2} \tag{9.8}$$

$$a=D+\frac{1}{2}\sigma T^2 \tag{9.9}$$

令 $\partial u/\partial z=G(u)$ 代入式 (9.7)，再对 u^2 从 0 到 u^2 积分得:

$$G^2=p^2+2\sigma au^2-2\sigma f(u^2) \tag{9.10}$$

$$f(u^2)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}(u^2)^n \tag{9.11}$$

式中，p 是$\partial u/\partial z$ 在 $u=0$ 时的取值。对于明孤子(非拓扑)，$p=0$；对暗孤子(拓扑)，$p\neq 0$。这时已对 $h(x)$作了泰勒展开，并由式(9.11)可知级数是很快收敛的。引入函数:

$$F(u)=\int_b^u\frac{du}{\sqrt{g(u^2)}} \tag{9.12}$$

$$g(u^2)=p^2+2\sigma au^2-2\sigma f(u^2) \tag{9.13}$$

则式(9.10)的解可写成

$$u=F^{-1}(z-z_0) \tag{9.14}$$

式中，b 的取值由下面讨论确定，它与函数$g(u^2)$的零点分布及其类型有关。

为讨论 $g(u^2)$的零点分布及其性质，图 9–1 给出了$f(u^2)$和$f_l(u^2)=\sigma(p^2/2+\sigma au^2)$(对应于曲线 2、3、4)的曲线，由于 $df(u^2)/du^2|_{u^2\to\infty}=1$，且$f(u^2)$是$u^2$的单调增函数，因此，$p=0$ 时$g(u^2)=2\sigma[au^2-f(u^2)]$的零点一般有两个(即图形中 9–1 中曲线 1 与曲线 2 的交点，一个为 $u=0$，另一个记为$u=u_0$)。只要 $0<a<1$(对于此区间之外的 a 值，只有一个零点$u_0=0$)。

图 9–2 给出了零点u_0随 a 的变化曲线。当 $\sigma=+1$，$p\neq 0$ 时，$g(u^2)$只有一个零点 $u=u_1\neq 0$。即图 9–1 中曲线 4 与曲线 1 的交点，相交条件是$-\infty<a<1$。图 9–2 也给出了$\sigma=+1$，$p\neq 0$ 时，u_1 随 a 的变化。当 $\sigma=-1$，$p\neq 0$ 时，不同的 p 取值，对 a 必需限定到适当范围才有零点。在一定的条件下，零点是两个(图 9–1 中曲线 3 与曲线 1 的两个交点)。当直线$f_l(u^2)$与曲线$f(u^2)$能刚好相切时，两个零点退化为一个(记为

$u=u_2$)，这时零点u_2随 p 及 a 的变化曲线由图 9–3 给出，且与 p 相对应的斜率 a 值可由图 9–4 中的 $a(p)$曲线给出。根据式(9.12)，还需 $g(u^2)\geqslant 0$，因此，$\sigma=-1$ 且 $p\neq 0$ 时，在 $0\leqslant u^2\leqslant u_3^2$($u_3^2$为这时较小一个非零零点值)，支持行波解，条件是 $a\geqslant a(p)$，即图 9–4 的上半区域。

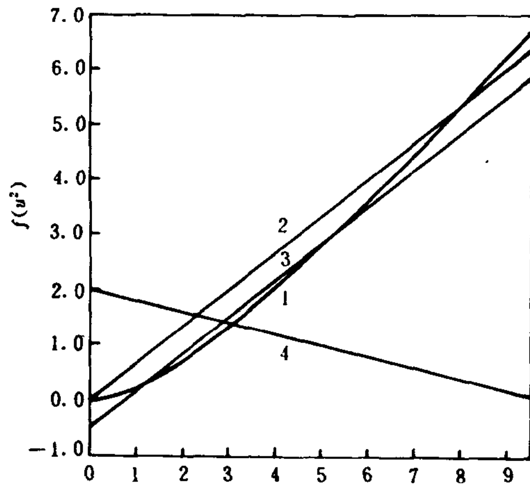


图 9–1 $f(u^2)$曲线(1)和$f_l(u^2)$曲线(2, 3, 4)

2: $p=0$, $a=0.67$, $\sigma=+1$;

3: $p=1.0$, $a=0.67$, $\sigma=-1$;

4: $p=2.0$, $a=-0.2$, $\sigma=+1$

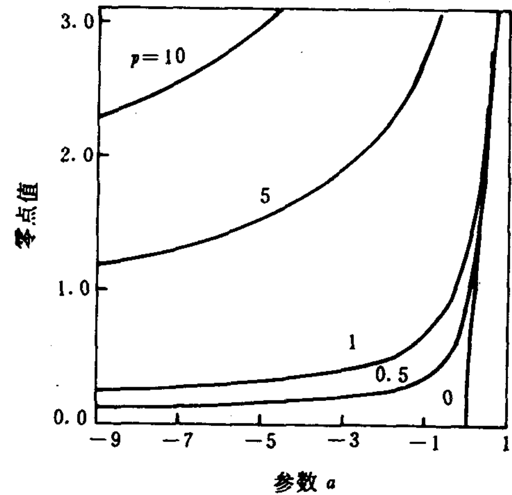


图 9–2 $\sigma=+1$ 时，各种 p 的取值所对应的零点随 a 的变化曲线

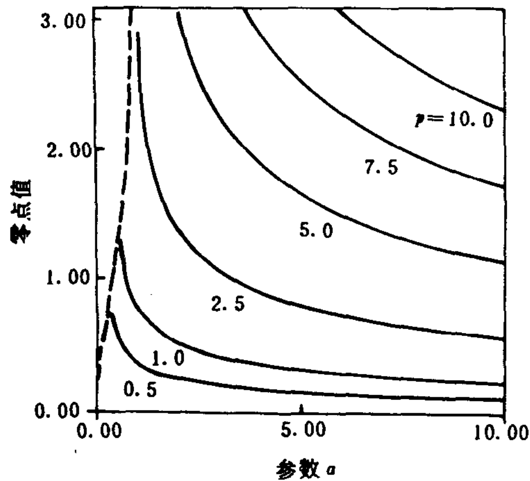


图 9–3 $\sigma=-1$ 时，各种 p 的取值所对应的零点随 a 变化曲线

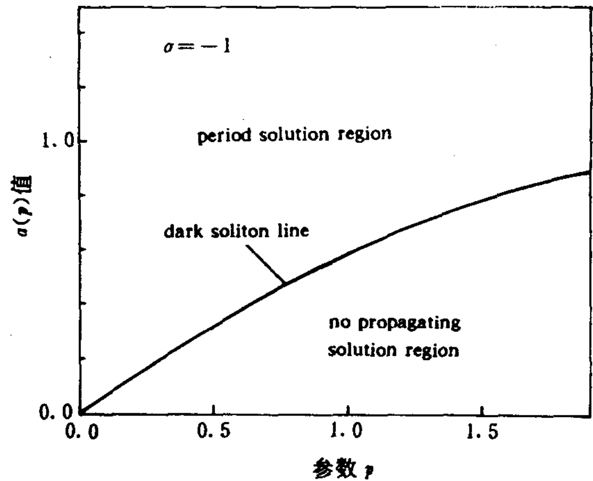


图 9–4 $a(p)$曲线

应该指出，并非所有零点都是 $u(z)$作为孤波解的极限点或极值点，因为这些零点还可能是 $u(z)$作为周期解或无界解的极值点。它们属于哪一类零点应由下面给出的准则进行判断，最后确定式(9.1)～式(9.14)所代表的是孤波解还是周期解。一般地说，设u_k是 $g(u^2)$的某一零点。如果存在某一 s 使 $\lim\limits_{u\to u_k}[g(u^2)/(u-u_k)^s]=$ 非零有限值，则当 $s<2$ 时，u_k 为非极限零点；若 $s\geqslant 2$，u_k 为极限零点。任何偏离这样的 s 的量都使上述极限为 0 或 ∞，因此这样的 s 无论是用解析的还是数值的方法，都容易找到。可以证明，当 $s\geqslant 2$ 时，$u''(z)=\mathrm{d}g(u^2)/\mathrm{d}z\,|_{u=u_k}=0$，$u'''(z)|_{u=u_k}=0$，…，$u^{(n)}(z)|_{u=u_k}=0$，…，因此，这时 $u=u_k$ 为 $u(z)$ 的极限值，故 u_k 称为极限零点。如果 $g(u^2)$ 在两个极限零点之间取正值，则存在扭结解（暗孤波或连续波背景上的扭结属此类）。若在一个极限零点和一个非极限点之间取正值，则存在非拓扑孤波解（明孤波及连续波背景上的明、暗孤波属此类）。若在两个非极限零点之间取正值，则存在周期解。对于扭结解（基本暗孤波），式 (9.12) 中 $b=0$，而且 u 在 $0\leqslant u\leqslant u_2$ 区间积分；对非拓扑孤子解，b 取为非极限零点，且 u 在两零点之间积分。

9.1.3 明、暗孤波解

当 $\sigma=+1$，$p=0$ 时，由式 (9.13) 及式 (9.11) 可见 $u=0$ 是 $g(u^2)$ 的极限零点之一，且 $s=2$；设另一零点为 u_0，则 $g(u^2)$ 可写成

$$g(u^2)=g(u^2)-g(u_0^2)=-2\sigma(u_0^2-u^2)w(u^2) \tag{9.15}$$

式中:

$$w(u^2)=a-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}\left[\sum_{l=0}^{n-1}(u_0^2)^{n-1-l}(u^2)^l\right] \tag{9.16}$$

因此，u_0是非极限零点且 $s=1$，于是存在明孤波行波解。图 9-5 给出几种参数下的波型。式(9.12)中的 $b=u_0$，故积分上、下限的范围是 $0<u\leqslant u_0$。

当 $\sigma=-1$，$p\neq 0$ 时，$g(u^2)$ 一般有两个零点；当 $a>1$ 时只有一个；当 $a<a(p)$ 时没有零点。设 u_k 是一个零点，这时式 (9.15) 和式 (9.16) 将 u_0 用此处 u_k 代替仍适用。一般情况下，$w(u_k^2)\neq 0$，因此这时 $u=u_k$ 为非极限零点且 $s=1$。下面研究 u_k 为极限零点的情况，要求

$$w(u_k^2)=0 \tag{9.17}$$

于是有

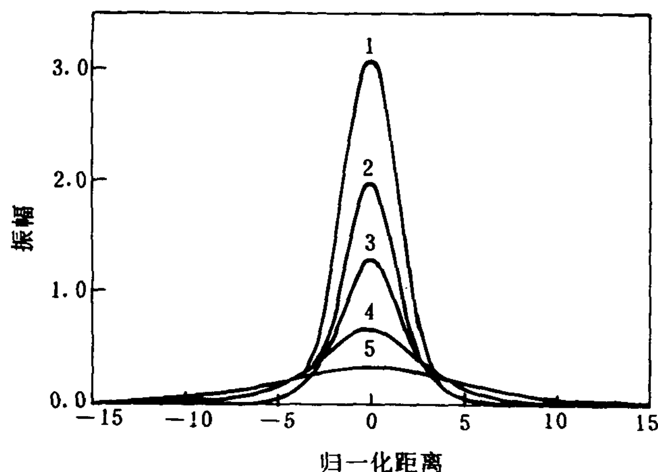
$$\begin{aligned}w(u^2)&=w(u^2)-w(u_k^2)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}\left[\sum_{l=0}^{n-1}(u_k^2)^{n-1-l}<(u_k^2)^l-(u^2)^l>\right]\end{aligned}$$

$$= (u_k^2 - u^2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}\left[\sum_{l=1}^{n-1}(u_k^2)^{n-2}\sum_{k=0}^{l-1}\left(\frac{u^2}{u_k^2}\right)^k\right] \tag{9.18}$$

由式(9.18)，式(9.17)即为

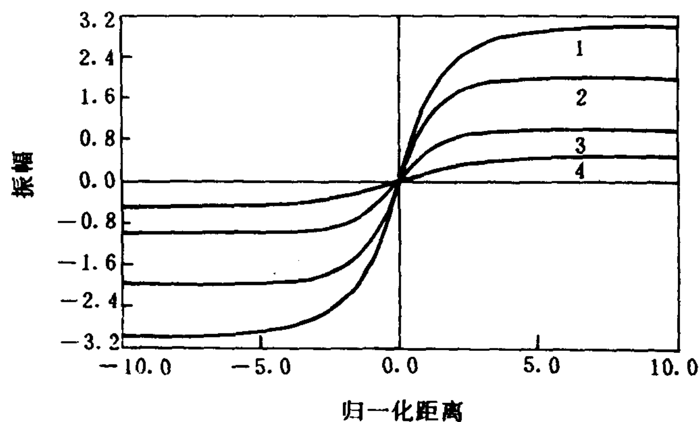
$$a=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(u_k^2)^{n-1}=\frac{1}{u_k^2}\left[e^{-u_k^2}+u_k^2-1\right]=\left.\frac{df(u^2)}{du^2}\right|_{u=u_k} \tag{9.19}$$

因此，只要当 $u=u_k$，$a=\left.df(u^2)/du^2\right|_{u=u_k}$ 时，式 (9.18) 即可得到满足。这时 $u=u_k$ 就成为 $g(u^2)$ 的极限零点，且 $s=2$。式 (9.19) 代表 $u=u_k$ 是图 9－1 中曲线 3 与曲线 1



1: $a=0.7$;　2: $a=0.5$;　3: $a=0.3$;　4: $a=0.1$;　5: $a=0.03$

图 9–5　明孤波解



1: $a=0.888$, $p=1.880$;　　2: $a=0.755$, $p=1.405$;

3: $a=0.372$, $p=0.581$;　　4: $a=0.114$, $p=0.116$

图 9–6　暗孤波解

相切的条件，这时两个根(交点)并合为一个，因此，在图 9–4 中，只有在 $a=a(p)$曲线上的参数值$(a,\ p)$才支持暗孤波，在上半区域只存在周期行波解。图 9–6 给出了几种暗孤波解。顺便指出，当 $\sigma>0$ 时，由式(9.18)，在 $p\neq 0$ 时，零点 $u_k\neq 0$，因此，在 $u^2\leqslant u_k^2$ 的区域，$w(u^2)\geqslant 0$，于是 $g(u^2)<0$。这就是说，当 $p\neq 0$ 时，当 $\sigma<0$ 时才有 $g(u^2)>0(0\leqslant u^2\leqslant u_k^2)$，因而有行波解；但当 $\sigma>0$ 时，在 $0\leqslant u^2\leqslant u_k^2$ 中无行波解。对暗孤波，式 (9.12) 中的 $b=0$。

9.1.4　明、暗孤波级数解

函数 $F(u)$一般要通过式(9.12)和式(9.13)的数值积分得到，但还可以表示成级数展开式，当 $\sigma=+1$ 和 $p=0$ 时，$u=0$ 显然是 $g(u^2)$的二阶零点$(s=2)$，故可作如下展开：

$$\frac{1}{\sqrt{g(u^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(u^2)^k$$

即

$$\left(\sum_{k=0}a_k(u^2)^k\right)^2\left(a-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!(m+1)}(u^2)^m\right)=1 \tag{9.20}$$

将上式展开比较各$(u^2)^l$项的系数可得：

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\sqrt{a}}\\
a_1&=\frac{1}{8}\frac{1}{a^2a_0}\\
a_l&=\frac{1}{2a_0a}\sum_{k=0}^{l-1}\left[\frac{(-1)^{l-k+1}}{(l-k+1)!(l-k+1)}\sum_{n=0}^{k}a_{k-n}a_n\right]-\frac{1}{2a_0}\sum_{n=1}^{l-1}a_{l-n}a_n\quad(l\geqslant 2)
\end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

于是

$$G(u)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{a_0\ln\frac{u_0^2}{u^2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1}{k+1}\left[(u_0^2)^{k+1}-(u^2)^{k+1}\right]\right\} \tag{9.22}$$

上式给出了明孤波解。

对于 $\sigma=-1$，$p^2\neq 0$ 时的暗孤波解，根据式 (9.15) 和式 (9.18)，当式 (9.19) 满足时

$$g(u^2)=2(u_k^2-u^2)w(u^2)=2(u_k^2-u^2)^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}\left[\sum_{l=1}^{n-1}(u_k^2)^{n-2}\sum_{k=0}^{l-1}\left(\frac{u^2}{u_k^2}\right)^k\right]$$

于是可设

$$\frac{1}{\sqrt{g(u^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(u_k+u)(u_k-u)}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(u^2)^k$$

即

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (u^2)^k\right)^2 \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} \left(u_k^2\right)^{n-2} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{u^2}{u_k^2}\right)^k\right] = 1 \tag{9.23}$$

上式第二括号中的展开式可以改写成

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=k+2}^{\infty}(l-1-k)b_l\right]\left(\frac{u^2}{u_k^2}\right)^k$$

式中:

$$b_l = \frac{(-1)^l}{l!l}(u_k^2)^{l-2} \tag{9.24}$$

令

$$C_k = (u_1^2)^{-k} \sum_{l=k+2}^{\infty}(l-1-k)b_l \tag{9.25}$$

则式(9.23)为

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (u^2)^k\right]^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} C_k (u^2)^k\right] = 1 \tag{9.26}$$

设

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} a_{k-n} a_n \tag{9.27}$$

则式(9.26)可化为

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k (u^2)^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} C_k (u^2)^k\right] = 1$$

即

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n} A_l C_{n-l}\right](u^2)^n = 1 \tag{9.28}$$

于是有:

$$\left.\begin{aligned} n=0: &\qquad A_0 C_0 = 1 \\ n\geqslant 1: &\qquad \sum_{l=0}^{n} A_l C_{n-l} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.29}$$

由此解出:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{C_0}} \\ a_1 &= -\frac{a_0 C_1}{2C_0} \\ a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} a_k - \frac{1}{C_0}\sum_{k=0}^{n-1}(A_k C_{n-k}) \qquad (n\geqslant 2) \end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

与前一步骤相同，积分后可得$G(u)$。由 Reduce 语言，容易计算任意项$\dfrac{(u^2)^k}{(u_1+u)(u_1-u)}$的积分表达式。

9.1.5 小结

本节给出饱和型半导体掺杂光纤传输方程的一般行波解，这对研究光孤子开关和全光通信有着极其重要的意义，正如本节在第一部所述，它是开展这方面研究的必要基础。由于解的一切性质取决于式(9.12)函数 $g(u^2)$，我们对函数 $g(u^2)$的性质及其对应的行波的形式作了比较完整的分析，并提出了极限零点和非极限零点概念及对行波解的类型进行判断和对式(9.12)进行积分的准则。在参数空间中，$\sigma>0$ 时，$p=0$ 支持明孤波解，但要求 $0<a<1$；$p\neq0$ 时在 $0<u^2<u_k^2$ (u_k 为非 0 值零点)区间无行波解；在 $u_k^2<u^2<+\infty$ 区间有无界周期解。$\sigma<0$ 时，$p\neq0$ 且 $a=a(p)$时，支持暗孤波解；其它情况只有有界和无界周期或无行波解。

9.2 饱和光纤孤子分类与孤子序列相互作用

支配半导体掺杂光纤中脉冲传输的是 Kumar−NLS 方程，我们在上节中对这个方程的孤子解，作了系统的行波分析，包括暗孤子行波解。由于对 Kumar−NLS 方程的高阶孤子及孤子相互作用(多孤子解)作解析分析是不可能的，因此只能借助数值分析。因为饱和非线性，使得标准 NLS 孤子的阶的定义不再适应，这一点将在下面分析中看到，在那里，我们对一阶、二阶和三阶孤子作了重新定义。

同上节一样，我们所依据的数学模型是 Kumar−NLS 方程[26]，即式(9.1)，模拟中的数值初值是

$$u(0,\ \tau)=N\operatorname{sech}\tau \tag{9.31}$$

对双孤子的数值初值是

$$u(0,\ \tau)=N_1\operatorname{sech}\left(\tau+\frac{\Delta}{2}\right)+N_2\operatorname{sech}\left(\tau-\frac{\Delta}{2}\right) \tag{9.32}$$

对于多孤子的数值初值，依此类推。

9.2.1 饱和 Kumar 型 NLS 方程的孤子分类

由于式(9.1)中的饱和因子，使非线性项受到很大程度的削弱。因此，对标准 NLS 方程来说，当式(9.31)中 $N=1$ 时，即可使非线性平衡色散，使波保持不变；但式(9.1)中的非线性相对弱得多，于是，使非线性与色散相平衡的 N 值必定是大于 1 的某一数值，如果找到了这个值，就找到了一阶孤子的定义值。

我们通过扫描搜索，发现这个值大约在 1.4 左右，如图 9−7 所示。$N=1.2$ 时，演化是不稳定的，但 $N=1.4$ 时，演化基本趋于稳定，但仍微小起伏。结合后面的分析，可以看到，式(9.1)是不支持 sech 形状的孤子解的，从图 9.1 中的第一条线到第二条线，波峰被削减成较平坦的形状，宽度略变宽，以后便无大的变化，因此，用别的适当函数作为初始注入应该说更好一些，但用 sech 函数也不妨碍我们的分析。因为，孤子系统会自动演化成与自己相适应的波形，这一点我们已从图 9−7 中看到了。我们也计算了 $N=1.0$ 的注入(图略)，结果是传输大约在归一化距离 3 后完全消失。于是我们认为 $N<1.4$ 对应标准 NLS 方程的 $N<1.0$，那么 N 增大到多少可认为是二阶孤子呢？

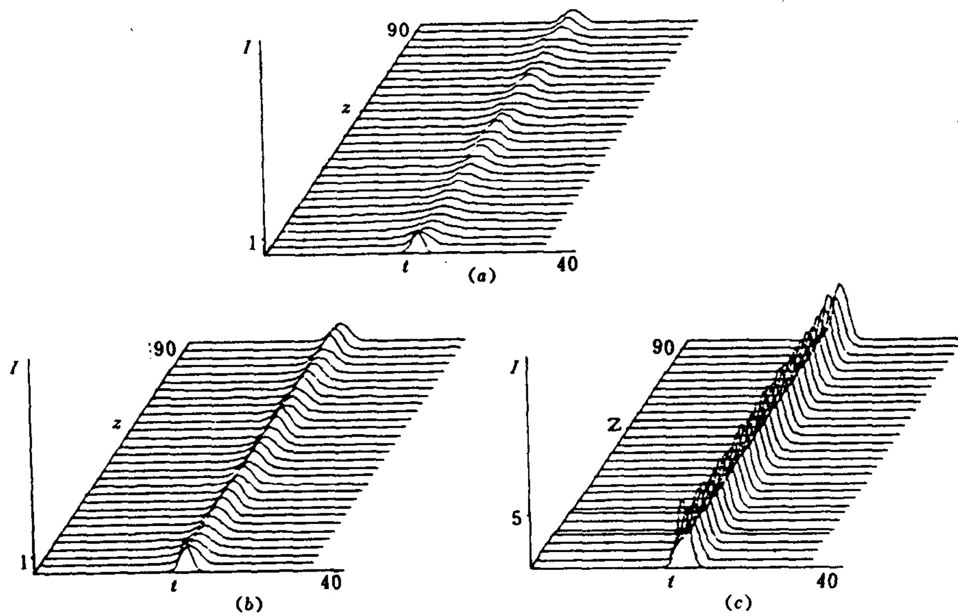


图 9-7　孤子的演化
(*a*) $N=1.2$; (*b*) $N=1.4$; (*c*) $N=2.6$

图 9-8 给出了 $N=3.0$, $N=4.0$, $N=5.0$ 时孤子演化，可以看到，$N=3.0$ 时，还保

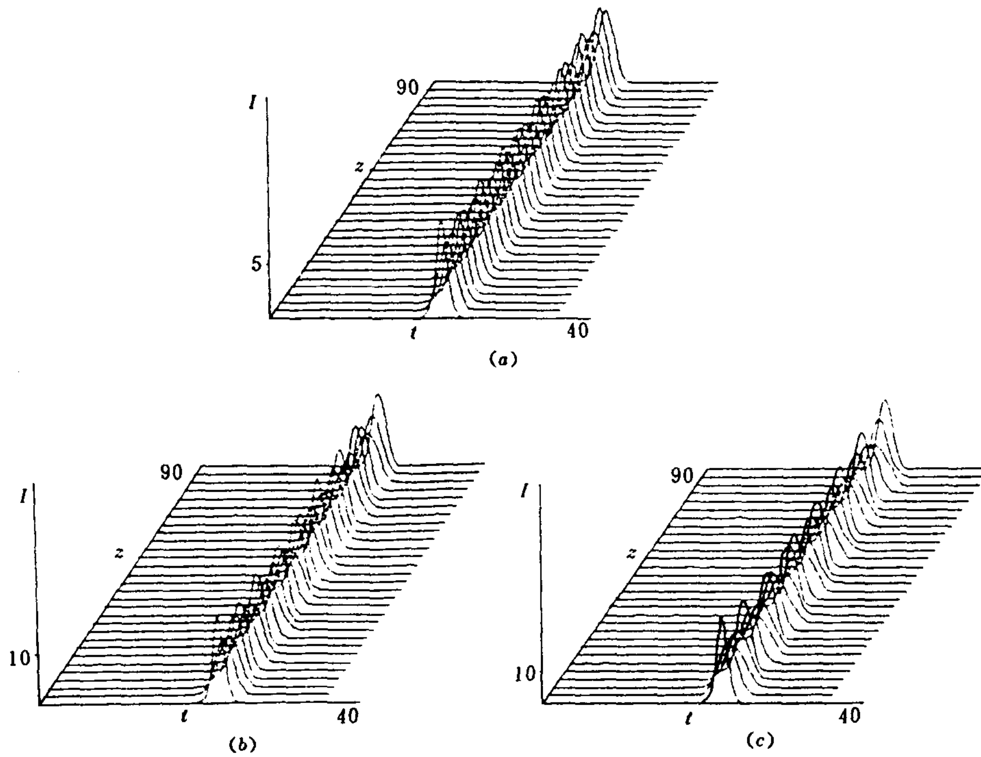


图 9-8　孤子的演化
(*a*) $N=3.0$; (*b*) $N=4.0$; (*c*) $N=5.0$

持稳定传输，但当 $N=4.0$ 时开始出现周期性明显抖动，$N=5.0$ 就更为明显，因此可一阶孤子值域范围是 $1.4\leqslant N\leqslant 4.0$，我们还模拟了其它幅值注入，发现在 $2.0\leqslant N\leqslant 2.6$ 范围抖动最小。

图 9－9 给出了 $N=7.0$，9.0，12.0 时演化，当 $N=7.0$ 时基本保持着单个峰值，但当 $N=9.0$ 时出现双峰与单峰周期性交替现象，因此当 $N>7.0$，可认为进入三阶孤子，或者说二阶孤子范围是 $4.0\leqslant N\leqslant 7.0$。

图 9–10 给出 $N=13.0$，15.0 和 $N=12.0$(即图 9–9(*c*)的延长)的演化，当 $N=15.0$ 时出现三个峰值，可以认为这时进入四阶孤子状态，因此三阶孤子范围是 $7.0\leqslant N\leqslant 15.0$。三阶孤子及四阶孤子演化过程中，与标准 NLS 方程比较，双峰或三峰状态持续时间长得多，而且第一次出现的多峰状态所持续的时间几乎是第二次及其以后出现的多峰状态持续时间的二倍，如图 9–10(*c*)所示，第一次将近传输归一化距离 90，以后是周期性变化，每周期持续时间将近归一化距离 45。

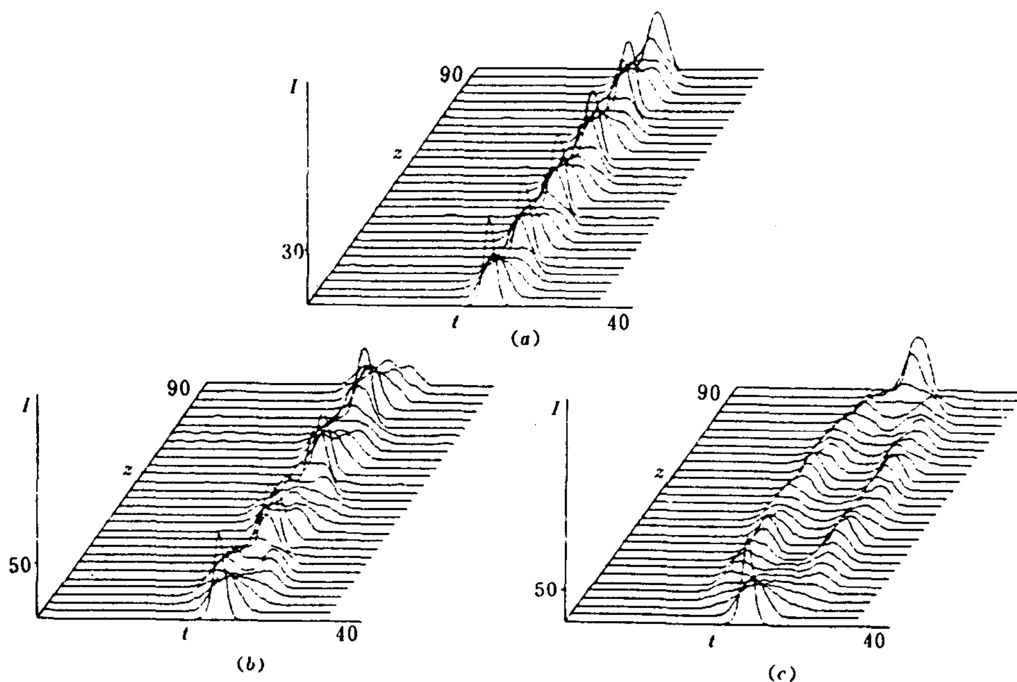


图 9–9　孤子的演化

(*a*) $N=7.0$；(*b*) $N=9.0$；(*c*) $N=12.0$

9.2.2　饱和 Kumar–NLS 方程孤波相互作用

饱和光纤中，孤子相互作用与标准 NLS 方程的情况大不相同，有下面几个特点：

第一，必须有足够的初始间距，否则，初始注入可能成为上节所述三阶孤子的一个双峰状态，这当然也要求 N_1，N_2 不很小。如图 9–11 中 $N_1=2.0$，$N_2=2.0$ 时，当 $\Delta=8$ 和 $\Delta=10$ 时，都会合并，再作周期性变化，但当 $\Delta=12$ 时，才出现无相互作用传输。

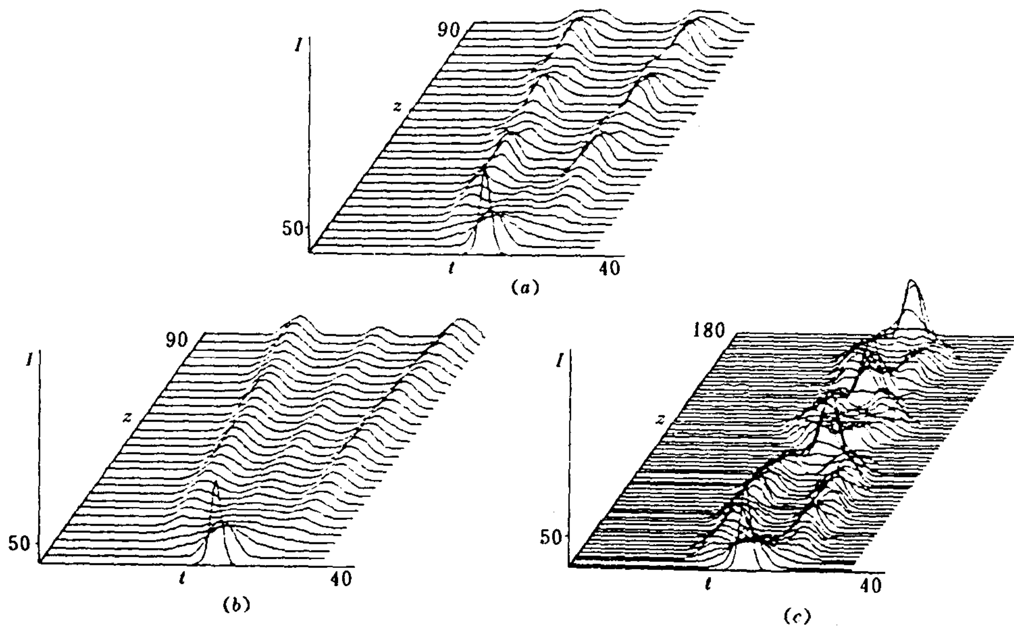


图 9-10　孤子的演化

(a) $N=13.0$; (b) $N=15.0$; (c) $N=12.0$

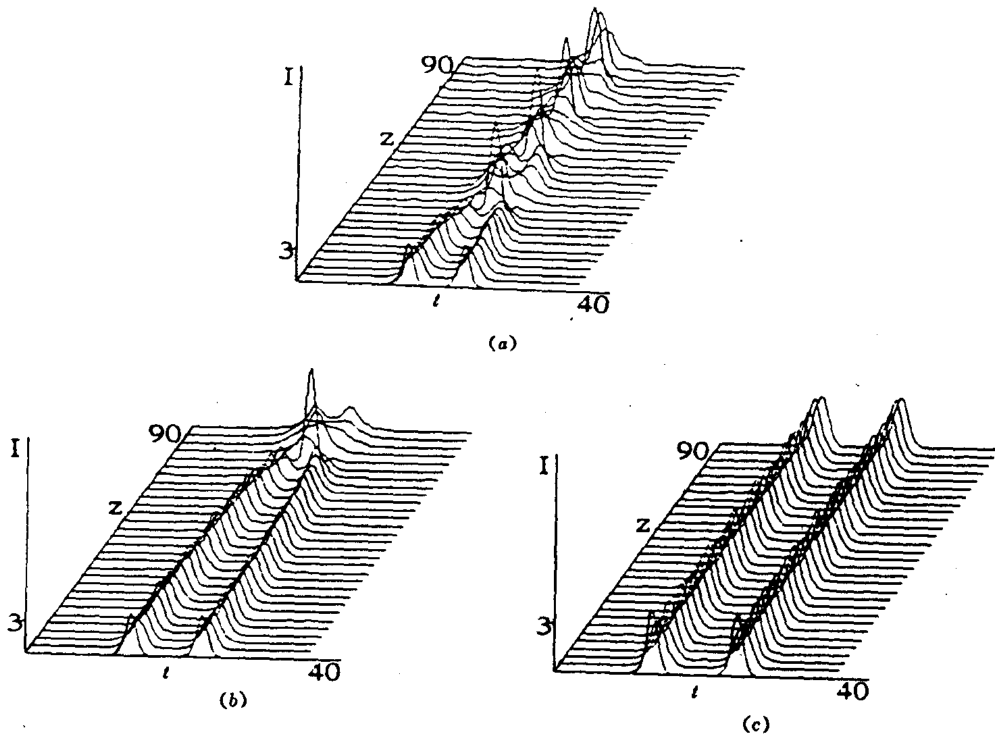


图 9-11　双孤子相互作用　$N_1=N_2=2.0$

(a) $\Delta=8$; (b) $\Delta=10$; (c) $\Delta=12$

第二，非等幅注入仍能减小相互作用。图 9-12 给出了(a) $N_1=2.0$, $N_2=1.7$,

$\Delta=8$; (*b*) $N_2=2.0$, $N_2=2.3$, $\Delta=8$; (*c*) $N_1=2.0$, $N_2=2.3$, $\Delta=10$ 的情况，图 9–12(*a*)与图 9–11(*a*)比较，初始间距相同，但其一是吸引合并，另一个则排斥。图 9–12(*c*) 与图 9–11(*b*) 比较，Δ 相同且为 10，但图 9–12(*c*)已消失相互作用。

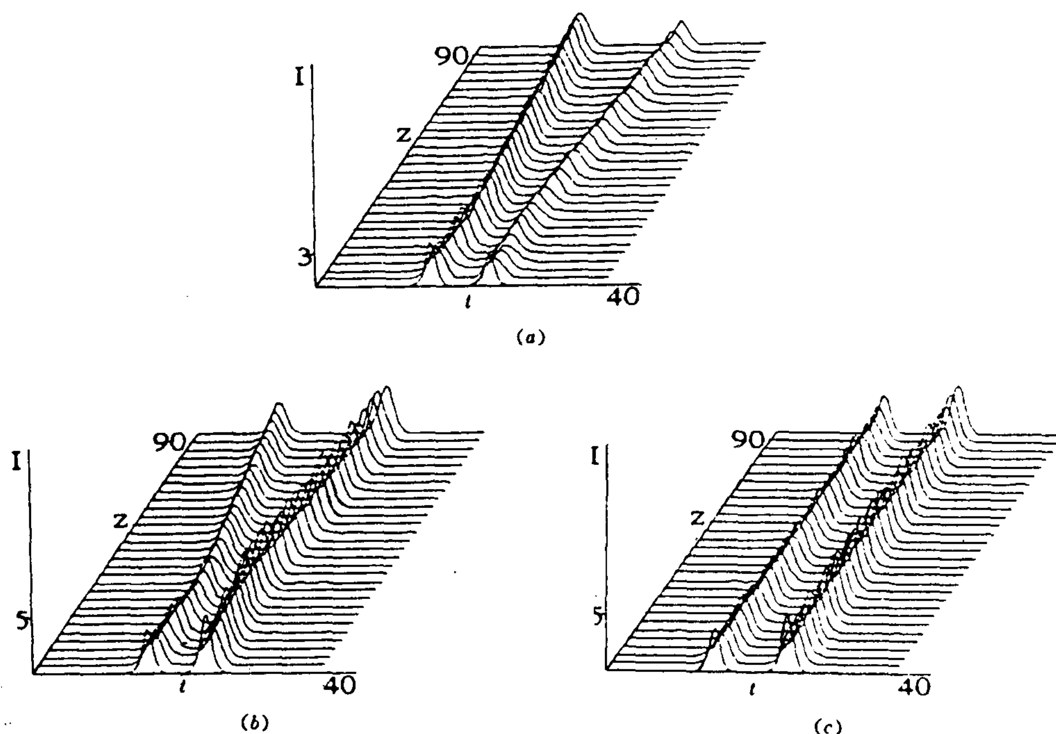


图 9–12 双孤子相互作用
(*a*) $N_1=2.0$, $N_2=1.7$, $\Delta=8$;
(*b*) $N_1=2.0$, $N_2=2.3$, $\Delta=8$;
(*c*) $N_1=2.0$, $N_2=2.3$, $\Delta=10$

第三，在一阶孤子的情况下，可通过控制峰值(在一定范围内提高峰值)来抑制相互作用。图 9–13(*a*)($N_1=N_2=3.0$, $\Delta=10$)与图 9–11(*b*) 相比，Δ 是相同的，但相互作用被削弱了。

第四，峰值小到一定程度，孤子合并后不再分开，而且峰值越小，并合越快。比较图 9–11(*a*)和图 9–13(*b*) ($N_1=N_2=1.6$, $\Delta=8$)，容易看出。

第五，通过小幅值近距离双孤子注入可实现单孤子(一阶孤子)稳定传输。图 9–13(*c*)($N_1=1.6$, $N_2=1.6$, $\Delta=4$)给出一例，双孤子注入可采用双源耦合交替注入，这样可减小对光源输出功率的要求，这对实际应用有着重要的意义，尤其对饱和光纤，我们已经看到，产生一阶孤子所需功率比普通光纤大 2～9 倍。

9.2.3 小结

本文通过数值模拟 Kumar–NLS 方程，首先研究了各阶孤子存在的幅值区域，对一阶孤子是 $1.4\leqslant N\leqslant 4.0$，二阶孤子是 $4.0\leqslant N\leqslant 7.0$，三阶孤子是 $7.0\leqslant N\leqslant 15.0$。同时，发现高阶孤子的多峰状态持续时间很长。最后，研究一阶孤子的相互作用，明确了前述五个方面的特性。本节虽然只研究了半导体掺杂饱和非线性光纤的孤子特点，上述所得结论也同样适应其它类型的饱和非线性。例如，上节中所给的其他形式的非线性项，所不同的

只是饱和非线性的强度不同而已，因此，只是上述各阶孤子值域范围有所不同。

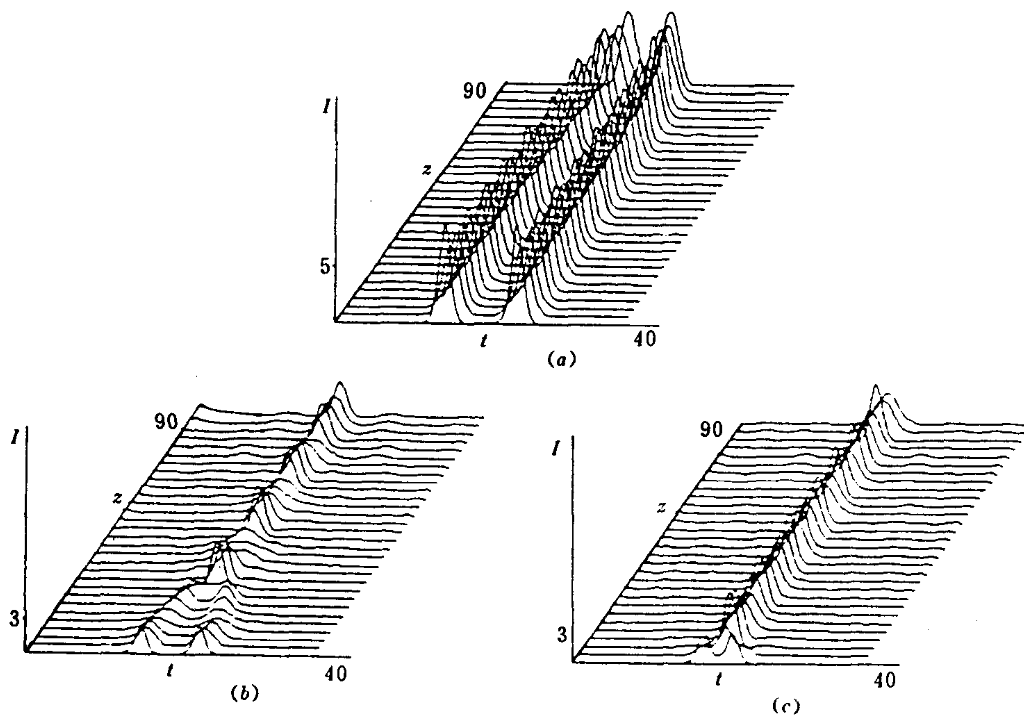


图 9-13　双孤子相互作用

(a) $N_1=N_2=3.0$, $\Delta=10$;

(b) $N_1=N_2=1.6$, $\Delta=8$;

(c) $N_1=1.6$, $N_2=1.6$, $\Delta=4$

9.3 饱和非线性光纤中的小幅孤波

9.3.1　引言

本节将以下面方程为例，研究半导体掺杂饱和非线性所支配的小幅孤波解。包含各高阶项的 Kumar－ NLS 方程是[26]

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+uf(|u|^2)=\mathrm{i}\beta\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\mathrm{i}\alpha f(|u|^2)\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{i}\alpha g(|u|^2)u\frac{\partial |u|^2}{\partial t} \tag{9.33}$$

式中:

$$f(\eta)=1-\frac{1}{\eta}+\frac{\mathrm{e}^{-\eta}}{\eta} \tag{9.34}$$

$$g(\eta)=\frac{1}{\eta^2}-\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}\right)\mathrm{e}^{-\eta} \tag{9.35}$$

$$\alpha=\frac{1}{v_g}\left(\frac{n_2}{n_0\chi(-k_{\omega\omega})}\right)^{1/2} \tag{9.36}$$

$$\beta = -\frac{1}{6}\frac{k_{\omega\omega\omega}}{(-k_{\omega\omega})}\left(\frac{kn_2}{n_0\chi(-k_{\omega\omega})}\right)^{1/2} \tag{9.37}$$

文献〔26〕给出了上述归一化尺度与原尺度的对应关系。$\sigma<0$ 代表反常色散区。在 $\sigma>0$ 的正常色散区，标准 NLS 方程支持 kink 解(称为基本暗孤波)和小幅暗孤波[179]。对后者有:

$$u(x,t) = [u_0 + a(x,t)]e^{i2u_0^2x + i\varphi(x,t)} \tag{9.38}$$

$$a(x,t) = -\frac{1}{2}u_0v^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{Z}{2}\right) \qquad \varphi(x,t) = -\frac{2v}{1+e^Z} \tag{9.39}$$

$$Z = 2vu_0\left[t - c\left(1-\frac{1}{2}v^2\right)x\right] \qquad c = \pm 2u_0 \tag{9.40}$$

本节找出了方程式(9.33)的具有式(9.38)形式的小幅明、暗孤波，并分析了各参数区域中的孤子特征。

9.3.2 小幅孤波方程及小幅孤波解

研究表明，对于饱和非线性 NLS 方程，应把小幅孤波解修改成

$$u(x,t) = [u_0 + a(x,t)]e^{i2px + i\varphi(x,t)} \tag{9.41}$$

才能得到无矛盾解。式(9.41)与式(9.38)的区别在于指数中的 $i2u_0^2x$ 修改成 $i2px$，将式(9.41)代入式(9.33)并分离实部与虚部有

$$\begin{aligned}
&-(u_0+a)\left(2p+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \sigma\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \sigma(u_0+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \Big) \\
&+(u_0+a)\left\{1-\frac{1}{u_0^2}\left(1-\frac{2a}{u_0}+\frac{3a^2}{u_0^2}\right)+\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2}\left[1-2\left(\frac{1}{u_0}+u_0\right)a+\left(3+\frac{3}{u_0^2}+2u_0^2\right)a^2\right]\right\} \\
&\quad = -3\beta\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - 3\beta\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \beta(u_0+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^3 - \beta(u_0+a)\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3} + \alpha(u_0+a)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\
&\quad\quad \cdot\left\{1-\frac{1}{u_0^2}\left(1-\frac{2a}{u_0}+\frac{3a^2}{u_0^2}\right)+\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2}\left[1-2\left(\frac{1}{u_0}+u_0\right)a+\left(3+\frac{3}{u_0}+2u_0^2\right)a^2\right]\right\} \\
&\quad\quad + O(a^3)
\end{aligned} \tag{9.42}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial x} - \sigma\left[2\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (u_0+a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} \\
&\quad = \beta\left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3\frac{\partial a}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - 3(u_0+a)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right. \\
&\quad\quad -\alpha\left\{1-\frac{1}{u_0^2}+\frac{2a}{u_0^3}-\frac{3a^2}{u_0^4}+\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2}\right.
\end{aligned}$$

$$
-\frac{2e^{-u_0^2}}{u_0^2}\left(\frac{1}{u_0}+u_0\right)a+\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2}\left(3+\frac{3}{u_0^2}+2u_0^2\right)a^2\bigg\}\frac{\partial a}{\partial t}
$$

$$
-2\alpha(u_0^2+2u_0a+a^2)\bigg\{\frac{1}{u_0^4}\left(1-\frac{4a}{u_0}+\frac{10a^2}{u_0^2}\right)
$$

$$
-\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2}\left[1-\left(2u_0+\frac{2}{u_0}\right)a+\left(2u_0^2+3+\frac{3}{u_0^2}\right)a^2\right]
$$

$$
-\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^4}\left[1-\left(2u_0+\frac{4}{u_0}\right)a+\left(2u_0^2+7+\frac{10}{u_0^2}\right)\cdot a^2\right]\bigg\}\frac{\partial a}{\partial t}+O(a^3) \tag{9.43}
$$

式中，已假定 $a(x,t)\ll u_0$，且作下列尺度假设:

$$
\left.\begin{aligned}
&a=\varepsilon^2a_0+\varepsilon^4a_1+\cdots \qquad \varphi=\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^3\varphi_1+\cdots\\
&c=(t-cx)\varepsilon \quad z=\varepsilon^3x \quad u_0=O(1) \quad \sigma=O(1) \quad \beta=O(1)
\end{aligned}\right\} \tag{9.44}
$$

下面分别两种情况分析，即:

$$
\alpha=O(\varepsilon^0) \tag{9.45}
$$

和

$$
\alpha=O(\varepsilon^2) \tag{9.46}
$$

它们分别适应于较长的脉冲和较短的脉冲。因为 α 与脉冲宽度成反比 (见文献〔192〕), 决定了式 (9.33) 中含 α 项的贡献大小。

1. $\alpha=O(\varepsilon^2)$的情况

将式(9.44)、式(9.46)代入式(9.43)并分离$O(\varepsilon^3)$及$O(\varepsilon^5)$项得:

$$
c\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}=0 \tag{9.47}
$$

$$
\left(c\frac{\partial a_1}{\partial\tau}+\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}\right)-\frac{\partial a_0}{\partial z}+\sigma\left(2\frac{\partial a_0}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+a_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}\right)
$$

$$
=\beta\left(3u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^3a_0}{\partial\tau^3}\right)+\alpha D_2\frac{\partial a_0}{\partial\tau} \tag{9.48}
$$

将式 (9.44) 和式 (9.46) 代入式 (9.42)，分离 $O(\varepsilon^0)$，$O(\varepsilon^2)$ 及 $O(\varepsilon^4)$ 项后有:

$$
P=\frac{1}{2}[1+\frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2}-\frac{1}{u_0^2}] \tag{9.49}
$$

$$
\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}=-\frac{D_1a_0}{u_0c} \tag{9.50}
$$

$$
\left(u_0c\frac{\partial\varphi_1}{\partial c}+D_1a_1\right)-u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}+ca_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}-\sigma\frac{\partial^2a_0}{\partial\tau^2}+\sigma u_0\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\right)^2+D_3a_0^2
$$

$$= -\beta u_0 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \tau^3} + \alpha D_4 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \tag{9.51}$$

式中:

$$D_1 = 1 - 2P + \frac{(1 - e^{-u_0^2})}{u_0^2} - 2e^{-u_0^2} \tag{9.52}$$

$$D_2 = 1 + \frac{1}{u_0^2} - \frac{2e^{-u_0^2} - e^{-u_0^2}}{u_0^2} \tag{9.53}$$

$$D_3 = \frac{e^{-u_0^2}}{u_0} - \frac{1}{u_0^3} + \frac{e^{-u_0^2}}{u_0^3} + 2u_0 e^{-u_0^2} \tag{9.54}$$

$$D_4 = u_0 - \frac{1}{u_0} + \frac{e^{-u_0^2}}{u_0} \tag{9.55}$$

将式 (9.50) 代入式 (9.47) 可得

$$c = \pm \sqrt{\sigma D_1} = \pm \sqrt{\sigma\left[\frac{2(1 - e^{-u_0^2})}{u_0^2} - 2e^{-u_0^2}\right]} \tag{9.56}$$

将式 (9.50) 代入式 (9.48) 和式 (9.51)，并利用式 (9.56) 消去 φ_1 和 a_1，得 KdV 方程：

$$2\frac{\partial a_0}{\partial z} + \alpha\left(\frac{D_4}{u_0} + D_2\right)\frac{\partial a_0}{\partial \tau} + \left(c\frac{2\sigma D_3}{c} + \frac{3c}{u_0} + \frac{3\beta D_1}{u_0 \sigma}\right)a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \tau} - \left(\frac{\sigma^2}{c} + 2\beta\right)\frac{\partial^3 a_0}{\partial \tau^3} = 0 \tag{9.57}$$

2. $\alpha = O(\varepsilon^0)$的情况

这种情况，重复前面步骤分别得到:

$$(c - \alpha D_2)\frac{\partial a_0}{\partial \tau} + \sigma u_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tau^2} = 0 \tag{9.58}$$

$$\left[(c - \alpha D_2)\frac{\partial a_1}{\partial \tau} + \sigma u_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2}\right] - \frac{\partial a_0}{\partial z} + \sigma\left(2\frac{\partial a_0}{\partial \tau}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} + a_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tau^2}\right)$$
$$= \beta\left(3u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^3 a_0}{\partial \tau^3}\right) + 2\alpha D_3 a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \tau} \tag{9.59}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{e^{-u_0^2}}{u_0^2} - \frac{1}{u_0^2}\right]$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\frac{D_1 a_0}{u_0 c - \alpha D_4} \tag{9.60}$$

$$\left[(u_0 c - \alpha D_4)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + D_1 a_1\right] - u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + c a_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} - \sigma \frac{\partial^2 a_0}{\partial \tau^2} + \sigma u_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2 + D_3 a_0^2$$

$$= -\beta u_0 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \tau^3} + \alpha D_2 a_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \tag{9.61}$$

将式(9.60)代入式(9.58)得到波速 c 的方程

$$(c-\alpha D_2)(u_0 c-\alpha D_4)=\sigma u_0 D_1 \tag{9.62}$$

式(9.59)和式(9.61)联立得标准 KdV 方程

$$A_1 \frac{\partial a_0}{\partial z} + A_2 a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \tau} - A_3 \frac{\partial^3 a_0}{\partial \tau^3} = 0 \tag{9.63}$$

式中

$$A_1 = \frac{u_0(c-\alpha D_2)}{u_0 c-\alpha D_4} + 1$$

$$A_2 = \frac{3\sigma D_1}{u_0 c-\alpha D_4} + \frac{2(c-\alpha D_2)(\sigma u_0 b_1^2 + D_3 - c b_1)}{D_1} + \frac{2\alpha b_1 D_2 (c-\alpha D_2)}{D_1}$$

$$+ 3\beta u_0 b_1^2 + 2\alpha D_3$$

$$A_3 = \frac{\sigma(c-\alpha D_2)}{D_1} + \frac{\beta b_1 u_0 (c-\alpha D_2)}{D_1} + \beta$$

$$b_1 = \frac{D_1}{u_0 c-\alpha D_4}$$

式(9.57)有孤波解($\alpha=O(\varepsilon^2)$)

$$a_0 = \eta\, \mathrm{sech}^2\{\sqrt{\lambda\eta}[\tau-(v_1+v_2\eta)z\} \tag{9.64}$$

式中:

$$\lambda = -\frac{(2u_0\sigma^2 D_3 + 3\sigma c^2 + 3c\beta D_1)}{12(\sigma^3 u_0 + 2\sigma u_0 c\beta)} \tag{9.65}$$

$$v_1 = \alpha \frac{D_4 + D_2 u_0}{2u_0}$$

$$v_2 = \frac{2u_0\sigma^2 D_3 + 3\sigma c^2 + 3\beta c u_0}{6 c u_0 \sigma} \tag{9.66}$$

式(9.63)有孤波解($\alpha=O(\varepsilon^0)$)

$$a_0 = \eta\, \mathrm{sech}^2\left[\sqrt{-\frac{A_2}{12A_3}\eta}\left(\tau - \frac{A_2}{3A_1}\eta z\right)\right] \tag{9.67}$$

以上是参数 α 分别为两种尺度情况下的小幅波解。

9.3.3　小幅明、暗孤波特性及存在区域

由式(9.64)和式(9.67)可知，在 α 取两种尺度情况下，均能支持明、暗小幅孤波解。可

以证明，对于任何u_0^2，总有$D_1>0$，因此，$\alpha=O(\varepsilon^2)$的情况下，只有$\sigma>0$(即正常色散区)才支持小幅明、暗孤波。在式(9.65)中，当$\lambda>0$时为明孤波，$\lambda<0$时为暗孤波。孤波存在区域由式(9.56)确定，但明、暗孤波存在区域由式(9.65)决定。下面只讨论$\alpha=O(\varepsilon^0)$情况下的参数区域。对于$\alpha=O(\varepsilon^2)$情况，参数区域的讨论要简单得多，可作类似讨论。

在$\alpha=O(1)$的情况下，由式(9.62)可以看到，

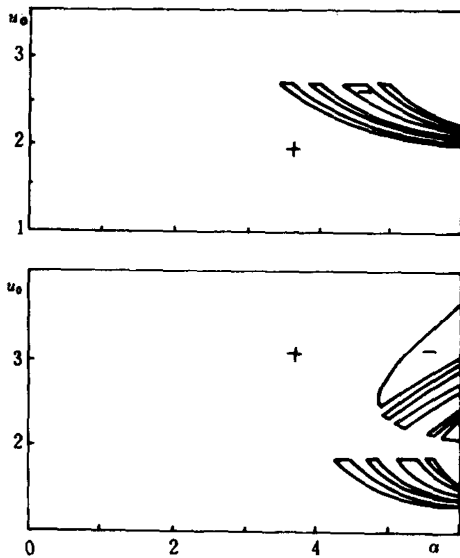
$$c=\frac{1}{2u_0}\left[\alpha(D_2u_0+D_4)\pm\sqrt{\alpha^2(D_2u_0+D_4)^2-4u_0(\alpha^2D_2D_4-\sigma u_0D_1)}\right] \tag{9.68}$$

因此，无论是在正常色散区($\sigma>0$)，还是在反常色散区($\sigma<0$)，式(9.62)都有实解，只要

$$\alpha^2(D_2u_0+D_4)^2-4u_0(\alpha^2D_2D_4-\sigma u_0D_1)\geqslant 0 \tag{9.69}$$

即上式确定了孤波存在的区域。但明、暗孤波的区域则由式(9.67)中$A_2/(12A_3)$的符号确定，当符号为正时，支持明孤波；符号为负时支持暗孤波。

图 9-14～9-15 给出了几种不同色散值(即二阶色散σ和三阶色散β)情况下，明、暗孤波在(α，u_0)参数空间存在的区域。其中，纵轴是u_0，横轴是α。这里，只考虑式(9.68)中取“+”号时情形，对于取“−”号时情形，也有类似的特点，此处从略。从图 9-14 和 9-15 中可看到，σ相同时，β越大暗孤波区域越小；但当β相同时，σ增大时，支持暗孤波排骨形区域增大，但排骨形区域的另一半随其轮廓线收缩为“零”(即向大α值漂移而消失在视场中)而消失。



明暗孤波分界线

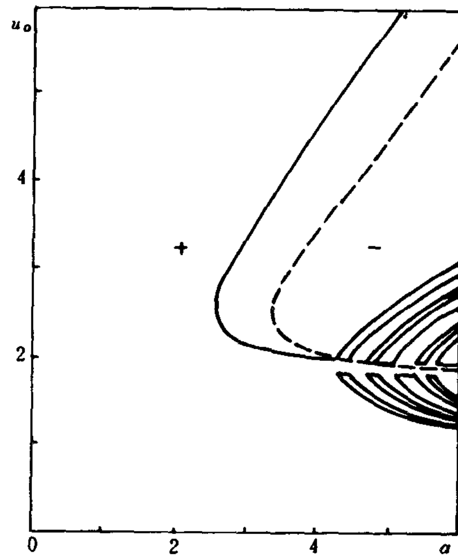
实线：$\sigma=0.1$，$\beta=0.05$

虚线：$\sigma=0.1$，$\beta=0.25$

分界线左边及其连通域（标志“+”）存在明孤波

分界线右边区域（标志“−”）存在暗孤波

图 9-14 明、暗孤波存在区域

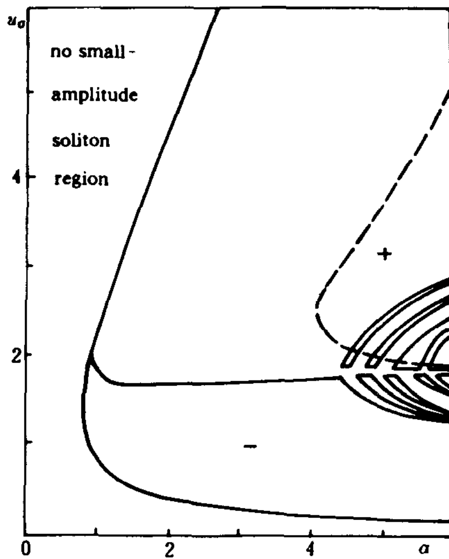


大部分区域（标有“+”）及其连通域存在明孤波

其它（标有“−”）区域存在暗孤波

图 9-15 明、暗孤波存在区域

在反常散区，即 $\sigma<0$，从图 9–16 和图 9–17 中可看到：当$|\sigma|$增大时，无孤波解区域增大，即分界线右移；当 σ 不变，β 增大时，明孤波区域收缩，即明、暗分界线总趋势是绕排骨形区域顺时针旋转。式(9.67)表明，明暗孤波幅值 η 仍然可以任意给定，但要保证小幅条件。这种明、暗孤波在一个连续波背景上的演化和传播，就如同一个标准 KdV 孤子的行为。事实上，任何一个小幅明、暗脉冲(可以不是标准孤子)在这个连续波背景上的演化、传播、甚至相互作用和碰撞特征都同一个标准 KdV 系统的脉冲行为完全一样。注意到 β 是作 $O(1)$处理的，因此，这一结论也适合于零色散点附近及较短脉冲。在文献〔102〕中，取 $\beta=0.051$，在零色散点附近 β 可取到 $O(1)$。



明、暗孤波区域分界线

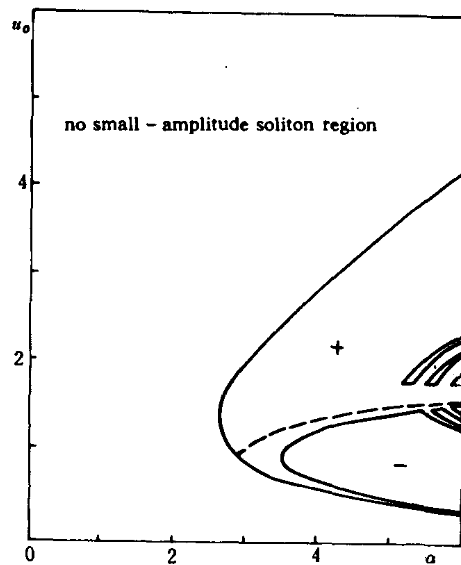
实线：$\sigma=-0.1$，$\beta=0.05$

虚线：$\sigma=-0.1$，$\beta=1.0$

标志“+”区域及其连通域存在明孤波

标志“−”区域存在暗孤波

图 9–16　明、暗孤波存在区域



明、暗孤波区域分界线

实线：$\sigma=1.0$，$\beta=0.05$

虚线：$\sigma=-1.0$，$\beta=0.5$

图 9–17　明、暗孤波存在的区域及无孤波区域

第 10 章

高阶效应与小振幅孤波

10.1 零色散点附近的小振幅孤波

10.1.1 引言

虽然 Hasegawa 等人早在 1973 年就预言在反常、正常色散区存在明孤子和暗孤子解，因明孤子较早地被 Mollenauer 等人的先驱实验所证实，其理论和通信应用研究得到了全面的发展。由于暗孤子实验较为困难，直到最近才实现[132, 133]。尽管暗孤子在抗噪声、抗相互作用方面优于明孤子[122]，只因其实验技术复杂，其通信应用前景目前显得暗淡。然而，它对研究正常色散光学介质的非线性动力学无疑是有重要意义的，因这类实验结果要借助于正常色散区内的孤波现象进行处理，包括利用本节后面所揭示的存在于正常色散区内有小振幅明暗孤子解。

本节的目的在于解析地分析零色散点附近正常色散区内具有的孤波现象，为使决定孤子传输特性诸因素得到较全面的考虑，本节还计及了光纤增益及损耗和自感应 Raman 效应。实验及理论都已发现自感应 Raman 效应能使明孤子产生频移[134, 135, 23, 114]，但对暗孤子却产生破坏性的影响[133,136,137]。本节分析结果表明，在零色散点附近的正常色散区内存在加载于连续波背景之上的小振幅明孤子解和暗孤子解，其稳定性取决于传输方向以及它在参数空间中所处的区域。

10.1.2 连续波背景上的小振幅孤波解

在零色散点附近，二阶色散减小使得它与三阶色散有相同量级的作用，当计及自感应 Raman 效应和光纤增益 g 及损耗 γ 时，方程应为[33]

$$
\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \mathrm{i}\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^3} + \mathrm{i}(\gamma - g)u + \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\omega_0 T}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)
$$

$$
\cdot\left[\alpha|u|^2 u + (1-\alpha)u\int_{-\infty}^{\tau} f_R(\tau-\tau')|u(\tau')|^2 \mathrm{d}\tau'\right] = 0 \tag{10.1}
$$

式中，$f_R(\tau-\tau')$是 Raman 响应函数，可通过频域实验曲线得到，由文献〔31〕中的图 3

可知，$f_R(t-t')$的响应时间约 100～200 fs(1 fs＝10^{-5}s)，因此对于 ps 孤子来说是极短的，而且接近于 $\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$ 的波形($\delta(t)$是 Dirac 函数)。因此，在 ps 情况下，把$f_R(t-t')$用 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 代之，并可忽略式(10.1)中最后一项的$\frac{\mathrm{i}}{\omega_0 T}\frac{\partial}{\partial\tau}$部分，经过重新尺度变换并赋予各参数新的意义，式(10.1)化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2|u|^2u=\alpha u\frac{\partial|u|^2}{\partial t}-\mathrm{i}\gamma_G u+\mathrm{i}\beta\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \tag{10.2}$$

这时 α，σ，β，γ_G 分别正比于 Raman 自泵系数、二阶色散、三阶色散和光纤的 $(\gamma-g)$ 系数。当 $\beta=\gamma_G=\alpha=0$ 时，式 (10.2) 有暗孤子解[138]

$$u(x,\ t)=u_0\frac{(\lambda-\mathrm{i}\nu)^2+\exp z}{1+\exp z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2x} \tag{10.3}$$

式中:

$$z=2\nu u_0(t-t_0-2\lambda u_0 x)。$$

$$\lambda^2=1-\nu^2 \tag{10.4}$$

因此与反常色散区的明孤子不同，暗孤子是单参量孤子。当 $\lambda=0$ 时，式 (10.3) 给出基本暗孤子解

$$u(x,\ t)=u_0\tanh(u_0t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2x} \tag{10.5}$$

当$\nu^2\ll 1$时，有小振幅暗孤子解

$$u(x,\ t)=\left[u_0-\frac{1}{2}u_0\nu^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{Z}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2x+\mathrm{i}\varphi(x,\ t)} \tag{10.6}$$

式中:

$$\varphi(x,\ t)=-\frac{2\nu}{(1+\mathrm{e}^Z)} \tag{10.7}$$

$$Z=2\nu u_0\left[t-c\left(1-\frac{1}{2}\nu^2\right)x\right]\qquad c=\pm 2u_0 \tag{10.8}$$

注意到式 (10.6) 中的 sech^2 正是 KdV 方程的单孤子解。正是这个原因，Kivshar[136, 137]发现了 NLS 方程的小振幅解与 KdV 方程的联系。在 $\beta\neq 0$，$\gamma_G\neq 0$，$\alpha\neq 0$ 的情况下，我们寻求下面形式的小振幅孤子解

$$u(x,\ t)=[u_0+a(x,\ t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2x+\mathrm{i}\varphi(x,\ t)} \tag{10.9}$$

将式(10.9)代入式(10.2)，并分离实部与虚部有:

$$\frac{\partial a}{\partial x}-\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\sigma\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial t}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)$$

$$=-\gamma_G(u_0+a)+\beta\left[\left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3}-3u_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)-\left(3a\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\frac{\partial a}{\partial t}\right)\right] \tag{10.10}$$

$$u_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-4u_0a\right)+\left[a\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sigma u_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\sigma\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-6u_0a^2\right]$$

$$=-2\alpha\frac{\partial a}{\partial t}(u_0+a)^2+\left[2a^3+\sigma a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]$$

$$+\beta\left\{(u_0+a)\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}+\left[3\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+3\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-(u_0+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^3\right]\right\} \tag{10.11}$$

作尺度约定并寻求行波解

$$\left.\begin{aligned}&u_0=O(1)\qquad \beta=O(1)\qquad \sigma=O(1)\\&\gamma_G=O(\varepsilon^6)\qquad \alpha=O(\varepsilon^2)\\&a=\varepsilon^2a_0+\varepsilon^4a_1+\cdots\\&\varphi=\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^3\varphi_1+\cdots\\&\tau=(t-cx)\varepsilon\qquad z=\varepsilon^3x\end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

将式 (10.12) 代入式 (10.10)，式 (10.11) 分别得到：

$$C\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}=0 \tag{10.13}$$

$$\left(c\frac{\partial a_1}{\partial\tau}+\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}\right)+\sigma\left(2\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+a_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}\right)-\frac{\partial a_0}{\partial z}$$

$$=\gamma_G u_0-\beta\left[\frac{\partial^3 a_0}{\partial t^3}-3u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}\right] \tag{10.14}$$

$$u_0\left(c\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+4u_0a_0\right)=0 \tag{10.15}$$

$$u_0\left(c\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}+4u_0a_1\right)+ca_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+\sigma u_0\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\right)^2-\sigma\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2}+6u_0a_0^2-u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}$$

$$=2\alpha u_0^2\frac{\partial a_0}{\partial\tau}-\beta u_0\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial\tau^3} \tag{10.16}$$

其中，已令 $\varepsilon=1$，因它已把各级量分离开，式 (10.13) 和式 (10.15) 有解条件是

$$c^2=4\sigma u_0^2 \tag{10.17}$$

这时

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}=-\frac{4u_0}{c}a_0=-\frac{c}{u_0\sigma}a_0 \tag{10.18}$$

式 (10.17) 决定了形式解式 (10.9) 只适用于正常色散区 $\sigma>0$。将式 (10.18) 代入式 (10.14)、式 (10.16)，并消去 φ_1、a_1 可得:

$$A_1\frac{\partial a_0}{\partial z}+A_2a_0\frac{\partial a_0}{\partial\tau}-\frac{\partial^3 a_0}{\partial\tau^3}=-\varepsilon p(a_0) \tag{10.19}$$

$$A_1=\frac{2c}{2\beta c+\sigma^2} \tag{10.20}$$

$$A_2=\frac{12u_0(2\sigma^2+c\beta)}{[\sigma(2\beta c+\sigma^2)]} \tag{10.21}$$

$$\varepsilon p(a_0)=\frac{\left[\gamma_G c u_0-2\alpha u_0^2\sigma\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2}\right]}{(2\beta c+\sigma^2)} \tag{10.22}$$

作变换

$$w=\frac{A_2 a_0}{6}$$

$$y=-\frac{z}{A_1} \tag{10.23}$$

则式 (10.19) 左端化为标准 KdV 方程的形式，即

$$\frac{\partial w}{\partial y}-6w\frac{\partial w}{\partial\tau}+\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^3}=\varepsilon\bar{p}(w) \tag{10.24}$$

式中:

$$\varepsilon\bar{p}(w)=B_1-B_2\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} \tag{10.25}$$

$$B_1=\frac{A_2\gamma_G c u_0}{6(2\beta c+\sigma^2)} \tag{10.26}$$

$$B_2=\frac{2\alpha u_0^2\sigma}{2\beta c+\sigma^2} \tag{10.27}$$

当 $\varepsilon\bar{p}(w)=0$ 时，式 (10.24) 即为标准 KdV 方程。在 $\varepsilon\bar{p}(w)\neq 0$ 时，将 KdV 方程解中的参量看作是 y 的慢变函数，即

$$w=-2\mu^2(y)\mathrm{sech}^2 Z \qquad Z=\mu(y)[\tau-\xi(y)] \tag{10.28}$$

则文献〔110〕给出了 $\mu(y)$ 及 $\xi(y)$ 的演化解：

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\bar{p}(w)\mathrm{sech}^2 Z\mathrm{d}Z \tag{10.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y}=4\mu^2-\frac{1}{4\mu^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{p}(w)\left[Z+\frac{1}{2}\sinh Z\right]\mathrm{sech}^2 Z\mathrm{d}Z \tag{10.30}$$

将式 (10.25) 代入式 (10.29)、式 (10.30) 可得：

$$\xi(y)=4\int_0^y\mu^2(y')\mathrm{d}y'+\xi_0 \tag{10.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=\frac{8}{15}B_2\mu^3-\frac{1}{2}B_1\frac{1}{\mu} \tag{10.32}$$

将式(10.32)回到原来尺度，并注意$\varepsilon=1$时$z=x$，则有:

$$\mu\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=-b_1\left[\mu^4-\frac{b_2}{b_1}\right] \tag{10.33}$$

$$b_1=\frac{8}{15}\frac{\alpha\sigma u_0^2}{c}$$

$$b_2=\frac{\gamma_G u_0^2(2\sigma^2+c\beta)}{2(2\beta c+\sigma^2)} \tag{10.34}$$

当$b_2/b_1>0$时，有

$$\mu^2=\begin{cases}\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{1/2}c\tanh[2\sqrt{b_2b_1}(x-x_0)] & \left(\mu>\frac{b_2}{b_1}\right)\\ \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{1/2}\tanh[2\sqrt{b_2b_1}(x-x_0)] & \left(\mu<\frac{b_2}{b_1}\right)\end{cases} \tag{10.35}$$

$$x_0=-\frac{1}{4\sqrt{b_2b_1}}\ln\frac{\mu_0^2+b_2/b_1}{\mu_0^2-b_2/b_1}<0 \tag{10.36}$$

当$b_2/b_1<0$时，有:

$$\mu^2=-\operatorname{sgn}(b_1)\cdot\left|\frac{b_2}{b_1}\right|^{1/2}\tan[2\sqrt{|b_1b_2|}(x-x_0)] \tag{10.37}$$

$$x_0=\frac{1}{\operatorname{sgn}(b_1)\cdot 2\sqrt{|b_2/b_1|}}\arctan\left[\frac{\mu_0^2}{|b_2/b_1|^{1/2}}\right] \tag{10.38}$$

以上μ_0为$x=0$时的幅值，$\operatorname{sgn}(b_1)$为b_1的符号函数。将式(10.28)回到原尺度，

$$a_0(x,\ t)=-\frac{A_0}{u_0}\mu^2(x)\operatorname{sech}^2\{\mu(x)[t-cx-\xi(x)]\} \tag{10.39}$$

式中:

$$A_0=\frac{\sigma(2\beta c+\sigma^2)}{(2\sigma^2+c\beta)} \tag{10.40}$$

这就是连续波背景上的小振幅孤波解。

10.1.3 小振幅明、暗孤子的传输特性

由式(10.35)、式(10.37)可知，当$b_2/b_1>0$时，孤波能稳定地传输，最终稳定幅值是

$$\mu_\infty^2=\left[\left|\frac{15\gamma_G c(2\sigma^2+\beta c)}{\{16\alpha\sigma(2\beta c+\sigma^2)\}}\right|\right]^{1/2} \tag{10.41}$$

但当$b_2/b_1<0$时，孤波幅值不断增加，最终使小振幅近似失效。当μ^2增加很大时，对应于$\lambda\to 0\ (\nu\gg\lambda)$，因此$b_2/b_1<0$时，暗孤波演化成基本暗孤子，明孤波将消失在连续

波背景上。使孤波达到稳定状态或改变小振幅状态的特征距离是

$$\Delta x=\left[\left|\frac{15c(2\beta c+\sigma^2)}{4\alpha\sigma\gamma_G u_0^4(2\sigma^2+\beta c)}\right|\right]^{1/2} \tag{10.42}$$

A_0 的符号决定了孤波类型，即：$A_0>0$ 时 $a_0<0$，对应小振幅暗孤子；$A_0<0$ 时对应小振幅明孤子。图 10-1 给出了 $\gamma_G>0$，即 $\gamma>g$ 或 $g=0$ 时存在明、暗孤子的各个区域。在参数空间的左半部分，预言了在 $\beta<0$ 的情况下也将存在正向、反向传输的稳定(Ⅰ，Ⅲ)和一致增幅(Ⅷ)的小振幅暗孤子和逐渐消失的明孤子(Ⅱ)。但目前实际光纤都是 $\beta>0$ 的情况，由图 10-1 和表 10-1 可知，在 $\beta>0$ 的右半空间存在正向传输($C>0$)的小振幅暗孤子解(Ⅳ)，其幅值逐渐增大并稳定到μ_∞^2，传输速度逐渐减小到稳定值，中心频率向远离零色散点方向移动，此时传输速度(t 空间中)和中心频移分别是：

$$V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[cx+\xi(x)]=C\left[1-\frac{2(2\beta c+\sigma^2)}{c^2}\mu^2(x)\right] \tag{10.43}$$

$$\Delta\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{4u_0}{c}\int_0^\tau a_0(x,\ \tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{4A_0}{c}\mu^2(x) \tag{10.44}$$

可见频移最终趋于稳定。$\beta>0$ 的右半空间中的负向传输($c<0$)小振幅暗孤子(Ⅴ，Ⅶ)具有不稳定性，其幅值一致增加，最终使小振幅失效，可能变成基本暗孤子，频移向着零点色散点方向进行的，且在Ⅴ区的孤子传输速度随 x 而减小，但Ⅶ区的Ⅴ随 x 而增加。Ⅵ区的小振幅明孤子幅值逐渐增大到稳定值 μ_∞^2，因而其速度也逐渐增大到稳定值，频移向远

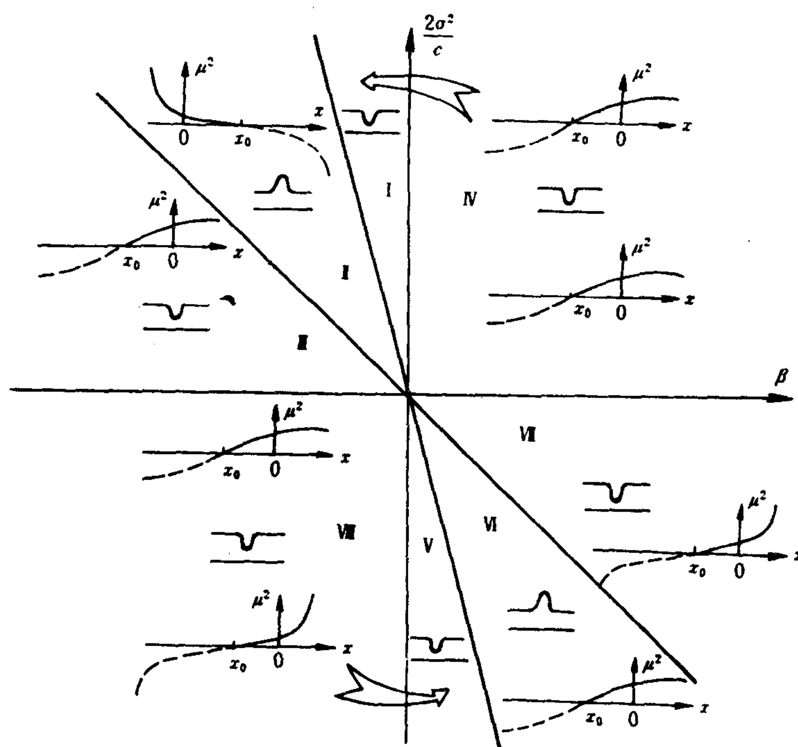


图 10-1　参数空间各区域的孤波型和幅值演化曲线

表 10-1　各量在参数空间各区域的符号或变化特点

区　域	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
A_0	+	−	+	+	+	−	+	+
b_2/b_1	+	−	+	+	−	+	−	−
b_1	+	+	+	+	−	−	−	−
$\Delta V-\mu^2$ 关系	−	+	+	−	−	+	+	−
ΔV−x 关系	−	−	+	−	−	+	+	−
$\Delta\omega_0$	+	−	+	+	−	+	−	−

离零色散点方向进行。如果 $\mu_\infty^2>c^2/2(2\beta c+\sigma^2)$，则存在一点 x_1，当 $x>x_1$ 时，Ⅳ区的暗孤子出现向正向传输到 t_1 后又返回向负向传输。在Ⅴ区经过 x_2，其中 $\mu^2(x_2)=c^2/2(2\beta c+\sigma^2)$ 距离之后暗孤波返回向正向传输。有关Ⅳ，Ⅴ和Ⅶ区中暗孤子的行为，本文结果与文献〔136，137〕结果具有一致性，即反向传输孤子将演变成基本暗孤子，但正向传输孤子并不衰减消失，而是稳定到一定的幅值，由式(10.41)可见，当 $\gamma_G=0$ 时，$\mu_\infty^2\to 0$ 这正是文献〔10〕的结论。因此，Raman 自感应效应对小振幅暗孤子是破坏性的，但光纤的增益和损耗对它却是建设性的。

10.1.4　光纤放大增益的作用与明、暗孤子转换

在不考虑光纤放大增益色散和增益饱和的情况下，式(10.1)中的 g 是与 u 无关的常数[139]。这时，解式(10.39)和式(10.40)也适用于光纤放大器中的孤子演化。从式(10.34)和式(10.40)～式(10.44)可见，当 $g>\gamma$ 即 $\gamma_G<0$ 时，表 10-1 中除 b_2/b_1 外，A_0，b_1，Δv，$\Delta\omega$ 均不改变符号。A_0 不改变符号意味着在各个区域内波形均不变化。b_2/b_1 改变符号导致孤波振幅 μ^2 随 x 的演化规律改变，即由 tanh(·)式演化变成 tan(·)式的演化或与此相反。应设法沿光纤方向控制增益 g，使在一些分段上 $\gamma_G=\gamma-g<0$，而在另一些分段上 $\gamma_G>0$。在Ⅴ，Ⅶ区，当孤波沿光纤由 $\gamma_G<0$ 分段进入 $\gamma_G>0$ 的分段时，非稳定小振幅暗孤子将演化成稳定的暗孤子，而Ⅵ，Ⅳ区的稳定的明、暗孤子演化成一致增幅的孤波，在Ⅳ区最终形成基本暗孤子，而Ⅵ区则演化出一个大振幅明孤子(这时小振幅近似失效)。反之亦然。此外，调整 σ 与 β 的相对强度，使参数点穿过Ⅴ，Ⅵ两区边界，则$(2\sigma^2+\beta c)$大小减小到 0 后再改变符号，如果在光纤长度方向控制 σ 和 β 使其在参数空间发生上述变化，则可实现小振幅明、暗孤子的相互转化，这样的转化在Ⅶ−Ⅵ两区边界面上穿过时不能发生，由式(10.34)、式(10.37)可知，当穿过界面时，$\mu^2\to\infty$，使小振幅近似失效。有鉴于此，我们设想在沿光纤长度方向分段控制光纤参数，使相邻两段的参数分别处于Ⅴ区和Ⅵ区，并相应地把处于Ⅴ区的分段的增益控制到较大的值，使 $\gamma_G=\gamma-g<0$，而使处于Ⅵ区的分段的增益满足 $\gamma_G>0$，这样，当孤波沿光纤传输时就可实现稳定小振幅明、暗孤子交替转换，如果能沿光纤长度方向提取这种交替转换信息(比如说通过分路结构)，则可用于光计算机集成光路中的逻辑、运算元件。

10.1.5　小结

在计及 Raman 自感应和光纤增益及损耗的情况下，零色散点附近正常色散区内可存

在小振幅明暗孤波解并有如下特性:

(1) 在正向传输情况下，只存在逐渐增幅并趋于稳定的暗孤波;

(2) 在反向传输情况下，存在趋于稳定的明孤子(Ⅵ区)和趋于基本暗孤子的非稳定小振幅暗孤子;

(3) 在一定条件下，Ⅳ区的稳定暗孤子，在向正向传输一定距离后又返回负向传输; Ⅴ区的非稳定小振幅暗孤子又可能向负向传输一定距离后返回向正向传输;

(4) 当增益强于损耗时($\gamma_G < 0$)，只改变幅值演化规律，即前三条中的稳定变成非稳定，而非稳定则改变成稳定，其它性质保持不变;

(5) 沿光纤长度方向控制参数变化使其穿过Ⅴ、Ⅵ边界并相应地控制增益系数，即可实现稳定的小振幅明暗孤子的相互转化，这一现象可望用于光计算机集成光路的逻辑、运算元件，由于这种用途的光纤工作在正常色散区，又不需过低的损耗，较容易实现。

10.2 非常色散区自变陡效应支持的小振幅孤波

10.2.1 引言

自变陡效应(self–steepening)是影响光纤中孤子传输的重要因素之一，文献[140~144, 135]的工作表明，这一因素将带来一系列新的动力学特性，如自变陡效应支持 kink 解[142]，它还引起脉冲偏离对称性[140]。Gordon[135]指出这一效应与光纤延迟响应相关。在超短脉冲(100 fs 以下)情况下，Raman 自泵效应(intrapulse Simulated Raman Scattering)的影响是显著的，包括三阶群速色散项及损耗在内的诸因素都将影响甚至改变光纤中脉冲传输的非线性动力学特性。此外，有相当一类的实验结果也要借助于脉冲的传输，尤其是对孤波现象进行处理，因此，研究在这些效应共同支配下所决定的新的非线性动力学特性有着重要的意义。

与上节类似，本节基于连续波背景上的小振幅近似[136,137,145]，研究自变陡效应对孤波传输动力学的决定作用。研究结果表明，在计及损耗和 Raman 自泵光纤中，不仅正常色散区存在小振幅明、暗孤波，而且在非常色散区也存在小振幅明、暗孤波。我们知道，通常情况下，在二区域中只分别存在暗孤波和明孤波，但本节结果给出两区域中的新的孤波解，尤其是在两个区域中分别发现了与通常类型相反的孤波解。此外，讨论了新孤波的传输方向、稳定性及频移与参数间的关系。

10.2.2 微扰 KdV 方程与小振幅孤波解

飞秒脉冲在非常色散区中的传输方程是[36, 23, 141]

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+N^2|u|^2u=\mathrm{i}\delta\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}-\mathrm{i}sN^2\frac{\partial}{\partial \tau}(|u|^2u)+N^2\tau_R u\frac{\partial |u|^2}{\partial \tau} \tag{10.45}$$

式中，δ 为三阶色散，s 为自变陡系数，τ_R 为 Raman 自泵系数。为简单计，取 $N=1$，并先考虑 $\delta=0$（意味着充分远离零色散点）的情形，这也是为了突出自变陡效应的影响。作变换 $x=2\xi$，$t=\tau$，在式 (10.45) 中加入光纤损耗，则变成

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2|u|^2u=\mathrm{i}\beta\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\alpha u\frac{\partial|u|^2}{\partial t}-\mathrm{i}p\frac{\partial}{\partial t}(|u|^2u)-\mathrm{i}\gamma_G u \tag{10.46}$$

式中，$\alpha=2\tau_R$，$p=2s$，$\beta=2\delta$，$\gamma_G=\gamma-g$(γ 为损耗，g 为增益)。σ 可取任何值，当 $\sigma=-1$ 时即为式(10.45)；$\sigma>0$ 时代表正常区的色散；$\sigma<0$ 则为非常色散。当 $\alpha=0$，$p=0$，$\gamma_G=0$ 时，Zakharov 和 Shabat [138] 给出了暗孤波解其中包括小振幅暗孤波解。当 $\alpha\neq0$，$p\neq0$，$\gamma_G\neq0$ 时，我们仿照，寻找下面形式的小振幅孤波解

$$u(x,\ t)=[u_0+a(x,\ t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2x+\mathrm{i}\varphi(x,\ t)} \tag{10.47}$$

将式(10.47)代入式(10.46)，并分离实部与虚部有:

$$\frac{\partial a}{\partial x}-\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\sigma\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial t}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=-\gamma_G(u_0+a)-3p(u_0+a)^2\frac{\partial a}{\partial t} \tag{10.48}$$

$$u_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-4u_0a\right)+\left[a\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sigma u_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\sigma\frac{\partial^2a}{\partial t^2}-6u_0a^2\right]$$

$$=-2\alpha\frac{\partial a}{\partial t}(u_0+a)^2+\left[2a^3+\sigma a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^3\right]-p(u_0+a)^3\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{10.49}$$

为寻求行波解作尺度约定

$$\left.\begin{array}{lllll} u_0=0(1) & \sigma=O(1) & p=O(\varepsilon^2) & \gamma_G=O(\varepsilon^6) & \alpha=O(\varepsilon^2)\\ a=\varepsilon^2a_0+\varepsilon^4a_1+\cdots & & \varphi=\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^3\varphi_1+\cdots & & \\ \tau=(t-cx)\varepsilon & z=\varepsilon^3x & & & \end{array}\right\} \tag{10.50}$$

由式(10.50)，分别从式(10.48)、式(10.49)得到:

$$c\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}=3pu_0^2\frac{\partial a_0}{\partial\tau} \tag{10.51}$$

$$\left(c\frac{\partial a_1}{\partial\tau}+\sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}\right)+\sigma\left(2\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+a_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}\right)-\frac{\partial a_0}{\partial z}$$

$$=\gamma_Gu_0+6pu_0a_0\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+3pu_0^2\frac{\partial a_1}{\partial\tau} \tag{10.52}$$

$$u_0\left(c\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+4u_0a_0\right)=pu_0^3\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau} \tag{10.53}$$

$$u_0\left(c\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}+4u_0a_1\right)+ca_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+\sigma u_0\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\right)^2-\sigma\frac{\partial^2a_0}{\partial\tau^2}+6u_0a_0^2-u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}$$

$$=2\alpha u_0^2\frac{\partial a_0}{\partial\tau}+3pu_0^2a_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+pu_0^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} \tag{10.54}$$

其中，已令$\varepsilon=1$，式(10.51)、式(10.53)有解条件是:

$$c=c_p+pu_0^2$$

$$c_p = pu_0^2 \pm u_0\sqrt{p^2u_0^2 + 4\sigma} \tag{10.55}$$

于是有

$$a_0 = -\frac{c_p}{4u_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau} \tag{10.56}$$

$c_p = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ 是平凡解，式 (10.55) 表明，只要 $p^2u_0^2 > 4|\sigma|$，形式解不仅适应正常散区 ($\sigma > 0$)，还适应非常色散区 ($\sigma < 0$)。将式 (10.56) 代入式 (10.52)、式 (10.54) 并消去 φ_1 和 a_1，然后作变换:

$$w = \frac{A_2 a_0}{6}$$

$$y = -\frac{z}{A_1} \tag{10.57}$$

可得标准KdV方程的微扰方程:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - 6w\frac{\partial w}{\partial\tau} + \frac{\partial^3 w}{\partial\tau^3} = \varepsilon\overline{p}(w) \tag{10.58}$$

$$\varepsilon\overline{p}(w) = B_1 - B_2\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} \tag{10.59}$$

$$B_1 = \frac{\gamma_G u_0 A_2}{6\alpha_2} \qquad B_2 = \frac{2\alpha\sigma u_0^2}{\alpha_2 c_p} \tag{10.60}$$

$$A_1 = \frac{1 + \dfrac{4\sigma u_0^2}{c_p}}{\alpha_2} \qquad A_2 = \frac{\alpha_3 - 2\alpha_1}{\alpha_2} \tag{10.61}$$

$$\alpha_1 = \frac{4\sigma u_0 c}{c_p^2} - \frac{16\sigma^2 u_0^3}{c_p^3} - \frac{6\sigma u_0}{c_p} - \frac{12pu_0^3\sigma}{c_p^2} \tag{10.62}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma^2}{c_p} \qquad \alpha_3 = \frac{12\sigma u_0}{c_p} + 6pu_0 \tag{10.63}$$

式 (10.58) 中 $\varepsilon\overline{p} = 0$ 时，即为标准 KdV 方程。当 $\varepsilon\overline{p} \neq 0$ 时，其解可看作是变参量 KdV 解[110]，即

$$w(y,\ \tau) = -2\mu^2(y)\operatorname{sech}^2 Z$$

$$Z = \mu(y)[\tau - \xi(y)] \tag{10.64}$$

式中:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\overline{p}(w)\operatorname{sech}^2 Z\mathrm{d}Z \tag{10.65}$$

$$\frac{d\xi}{dy} = 4\mu^2 - \frac{1}{4\mu^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{p}(w)\left[Z + \frac{1}{2}\sinh Z\right]\text{sech}^2 Z dZ \tag{10.66}$$

将式 (10.59) 代入式 (10.65)、式 (10.66)，再回到原尺度并注意到 $z = x(\varepsilon = 1)$，可得:

$$\mu\frac{d\mu}{dx} = -b_1\left[\mu^4 - \frac{b_2}{b_1}\right] \tag{10.67}$$

$$\xi(x) = -\frac{4}{A_1}\int_0^x \mu^2(z)dz \tag{10.68}$$

式中:

$$b_1 = \frac{8B_2}{15A_1}$$

$$b_2 = \frac{B_1}{2A_1} \tag{10.69}$$

当 $b_2/b_1 > 0$ 时，且考虑弱幅值注入$\left[\mu^4(x) \leqslant (b_2/b_1)^2\right]$，可以有

$$\mu^2(x) = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\tanh[2\sqrt{b_2 b_1}(x - x_0)] \tag{10.70}$$

$$x_0 = \frac{1}{4\sqrt{b_2 b_1}}\ln\frac{\left|(b_2/b_1)^2 - \mu_0^2\right|}{(b_2/b_1)^2 + \mu_0^2} \tag{10.71}$$

当 $b_2/b_1 < 0$ 时

$$\mu^2 = -\text{sgn}(b_1)\sqrt{\left|\frac{b_2}{b_1}\right|}\tan[\sqrt{|b_2 b_1|}(x - x_0)] \tag{10.72}$$

$$x_0 = \frac{1}{2\cdot\text{sgn}(b_1)\sqrt{|b_2/b_1|}}\arctan\left[\frac{\mu_0^2}{|b_2/b_1|^{1/2}}\right] \tag{10.73}$$

到此可以有:

$$a_0(x, t) = A_0\mu^2(x)\text{sech}^2\left[\mu(x)\{t - cx - \frac{4}{A_1}\int_0^x \mu^2(z)dz\}\right] \tag{10.74}$$

$$A_0 = -\frac{12}{A_2} = -\frac{3c_p^2\sigma}{2u_0\Delta} \qquad \frac{4}{A_1} = 4\sigma^2\frac{c_p}{f} \tag{10.75}$$

$$b_1 b_2 = \left(\frac{32u_0^4}{45}\right)(\alpha\gamma_G)\frac{c_p\Delta}{f} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \left(\frac{5}{8\sigma^2}\right)\left(\frac{\gamma_G}{\alpha}\right)\frac{\Delta}{c_p} \tag{10.76}$$

$$\Delta = \sigma_1\left[3 + \frac{12}{\sigma_2^2} + \frac{15}{\sigma_2^2} \pm \text{sgn}(p_1)\sqrt{1 + \sigma_2}\left(\frac{18}{\sigma_2^2} + \frac{3}{\sigma_2}\right)\right] \tag{10.77}$$

$$\sigma_1 = 4\sigma u_0^2 \qquad p_1 = p u_0^2 \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{p_1^2} \tag{10.78}$$

$$b_1 = \frac{16 u_0^2 c_p \alpha \sigma}{15 f} \qquad f = 4\sigma u_0^2 + c_p^2 \tag{10.79}$$

式 (10.74) 及式 (10.47) 给出了小振幅明、暗孤子解。

10.2.3　孤波解类型及其传输特性

孤波演化规律的类型取决于 b_2 / b_1 的符号，而其波型(即明、暗类型)取于 A_0 的符号，tan(•)波形取下降形式($x \leqslant x_0$)还是上升形式($x \geqslant x_0$)，取决于 b_1 的符号。当 $A_0 > 0$ 时为明孤波，$A_0 < 0$ 时为暗孤波。令 $\Delta = 0$ 可得求根方程，由式(10.77)，$\sigma_1 = 0$ 是一个根，另外两个根由

$$(\sigma_2 + 1)(\sigma_2^3 + 8\sigma_2^2 - 8\sigma_2 - 20) = 0$$

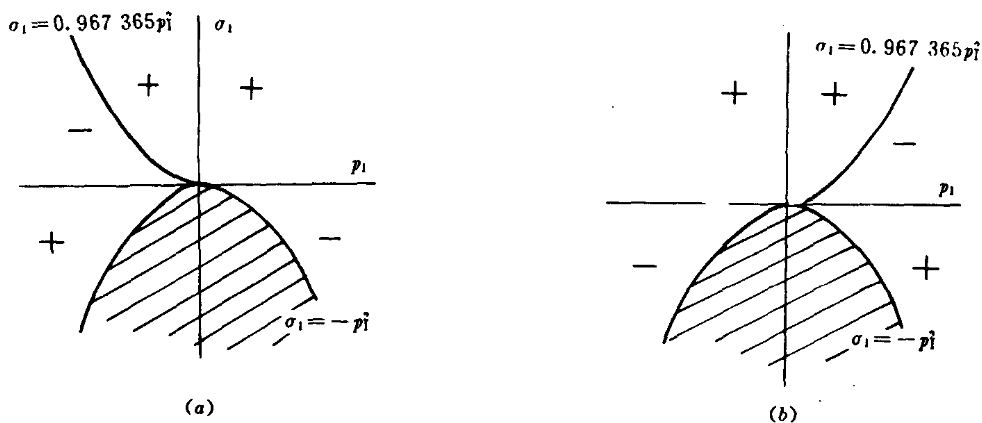


图 10－2　Δ 在各区域中的符号分布

(*a*) 式(10.55)取"+"号时；　(*b*) 式(10.55)取"−"号时

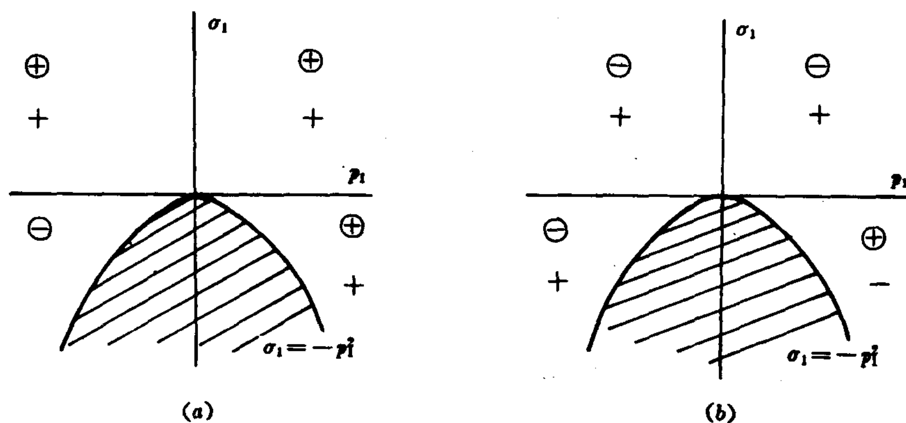


图 10－3　c_p 及 f 的符号分布

(*a*) 当± sgn(p_1)>0 时；(*b*) 当± sgn(p_1)<0 时

确定。显然，$\sigma_{21}=-1$，$\sigma_{22}=0.967\,365$(当 $\sigma_2<0$ 时，上式第二括号无实 0 点)是其零点，如果把式(10.77)中$\pm\,\mathrm{sgn}(p_1)<0$ 时所得的 Δ 记作 Δ_-，而$\pm\,\mathrm{sgn}(p_1)>0$ 时记作 Δ_+。则 Δ_+的零点是 $\sigma_2=\sigma_{21}=-1$ 和 $\sigma_1=0$，且对于任何 $\sigma_2\geqslant -1$ 值有 $\Delta_+/\sigma_1\geqslant 0$。$\Delta_-$的零点是 $\sigma_2=\sigma_{22}=0.967\,365$ 和 $\sigma_1=0$，且当 $\sigma_2>\sigma_{22}$ 时 $\Delta_-/\sigma_1>0$；当$-1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ 时 $\Delta_-/\sigma_1<0$。由此可得到 Δ 在各区域中的符号，如图 10-2 所示。图 10-3 给出了 c_p 和 f 的符号分布，借助这些分布，容易讨论任何情况下的孤波类型及演化规律。下面只简要讨论 $\alpha>0$(文献〔14〕中，取 $\alpha=2\times(0.5,\ 1.0,\ 2.0)$)和 $p>0$(文献〔142〕中取 $p=2\times(0.25,0.1,0.5)$)的情

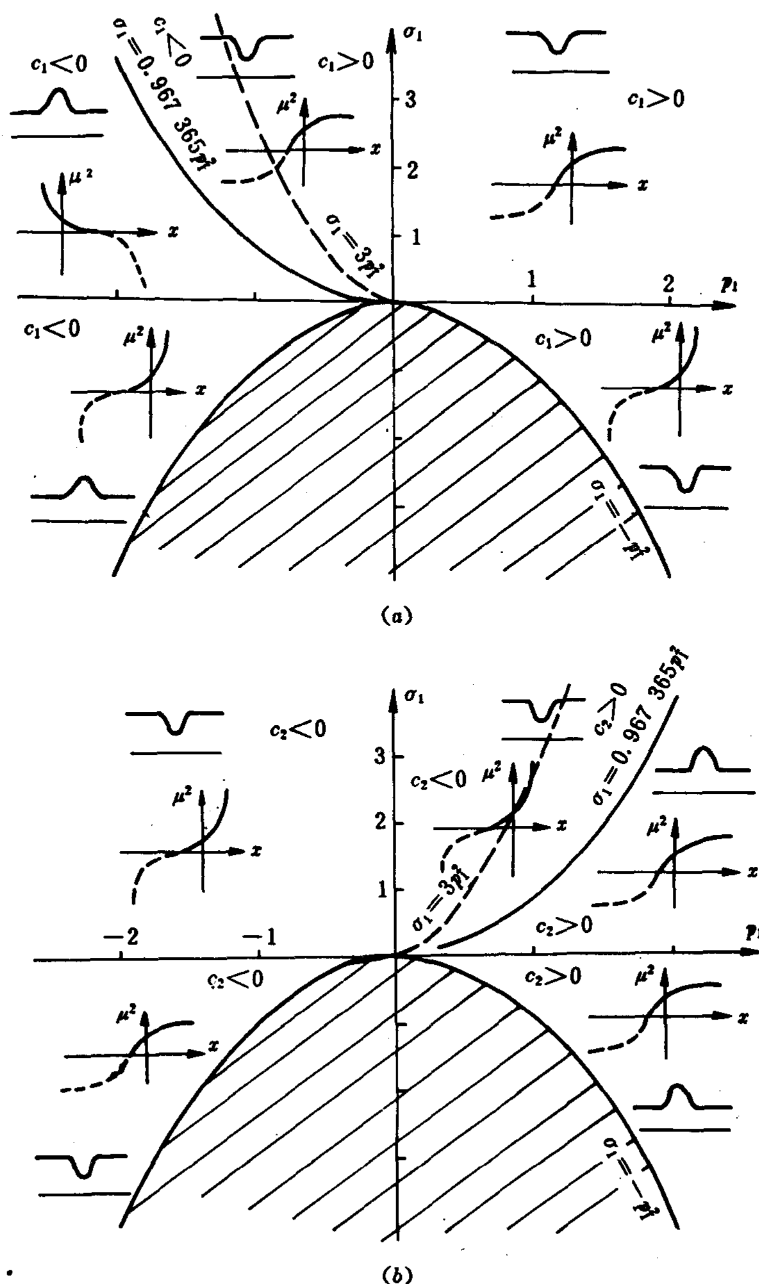


图 10－4　小振幅明、暗孤波存在的区域及其演化曲线

(a) 速度 $c=c_1=0$ 且 $\alpha\gamma_G>0$ 时；　(b) 速度 $c=c_2$ 且 $\alpha\gamma_G>0$ 时

况，在图 10–4 的图(*a*)和图(*b*)分别给出了 $\alpha\gamma_G>0$ (当 $\alpha\gamma_G<0$ 时，演化规律互换即可，即 $\tanh(\cdot)\longleftrightarrow\tan(\cdot)$)时，对应于 $c_1=2pu_0^2+\sqrt{p^2u_0^4+4\sigma u_0^2}$ 和 $c_2=2pu_0^2-\sqrt{p^2u_0^4+4\sigma u_0^2}$ 两种速度的波形及演化规律。可以看到，对于 $c=c_1$ 的孤波，在 $p>0$ 的区域，当 $\gamma>g$ 或 $g=0$(即 $\gamma_G>0$)时，在正常区，反常区分别存在稳定的和增幅的暗孤波；当 $\gamma<g$(即 $\gamma_G<0$)时，反过来，两域的暗孤波分别变成增幅的和稳定的(根据式(10.76))。但对于 $c=c_2$ 的孤波，在 $p>0$ 的区域存在稳定的明孤波和增幅的暗孤波，且在 $\gamma_G>0$ 时，两区域的明孤波都是稳定的；但在 $\gamma_G<0$(即 $\gamma<g$)时，明孤波都变成增幅的，而暗孤波成为稳定的。增幅孤波的幅值增加到一定程度，式(10.50)中的小振幅近似失效，这时，暗孤波很可能趋近基本暗孤波。对于其它特性，如频移、特征变化距离、速度演化等，可按照上一节方法作类似的讨论。

10.2.4 三阶色散的作用

当三阶色散较大时，应予以考虑。下面设三阶色散 $\beta\sim O(1)$，这样既可以针对较长脉冲工作在零色散点附近的情形，也足以针对超短脉冲，如飞秒 (fs) 脉冲。在式 (10.46) 考虑 $\beta\sim O(1)$ 项时，重复前面过程，仍可得式 (10.55)、式 (10.57)、式 (10.58) 和式 (10.59)，不过其中系数，也就是式 (10.60) 和式 (10.61) 应由以下各式给出：

$$A_1=\frac{4u_0^2\sigma+c_p^2}{\sigma(4u_0^2\beta+c_p\sigma)+c_p^2\beta} \tag{10.80}$$

$$A_2=\frac{2u_0(24u_0^2c_p\beta+12u_0^2c_p\sigma p+16u_0^2\sigma^2+3c_p^3p+12c_p^2\sigma-4c_pc\sigma)}{c_p[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta]} \tag{10.81}$$

$$B_1=\frac{\gamma c_pu_0^2(24u_0^2c_p\beta+12u_0^2c_p\sigma p+16u_0^2\sigma^2+3c_p^3p+12c_p^2\sigma-4c_pc\sigma)}{3[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta]^2} \tag{10.82}$$

$$B_2=\frac{2u_0^2c_p\sigma\alpha}{(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta} \tag{10.83}$$

于是微扰 KdV 方程的孤波解及其参数演化，在形式上由式 (10.74)、式 (10.70) 和式 (10.72) 给出，而且式 (10.69)、式 (10.71) 和式 (10.73) 的形式仍然有效。所不同的只是其中系数有所变化，即式 (10.69)、式 (10.75) 和式 (10.76) 应用下列各式代换：

$$b_1=\frac{16\alpha\sigma c_pu_0^2}{15(4u_0^2\sigma+c_p^2)} \tag{10.84}$$

$$b_2=\frac{\gamma c_pu_0^2(24u_0^2c_p\beta+12u_0^2c_p\sigma p+16u_0^2\sigma^2+3c_p^3p+12c_p^2\sigma-4c_pc\sigma)}{6[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta](4u_0^2\sigma+c_p^2)} \tag{10.85}$$

$$b_1b_2=\frac{8\alpha\sigma\gamma c_p^2u_0^4(24u_0^2c_p\beta+12u_0^2c_p\sigma p+16u_0^2\sigma^2+3c_p^3p+12c_p^2\sigma-4c_pc\sigma)}{45[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta](4u_0^2\sigma+c_p^2)^2} \tag{10.86}$$

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{5\gamma(24u_0^2c_p\beta+12u_0^2c_p\sigma p+16u_0^2\sigma^2+3c_p^3p+12c_p^2\sigma-4c_pc\sigma)}{32\sigma\alpha[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta]} \tag{10.87}$$

$$A_0-\frac{12}{A_2}=-\frac{6c_p[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta]}{u_0(24u_0^2c_p\beta+12u_0^2c_p\sigma p+16u_0^2\sigma^2+3c_p^3p+12c_p^2\sigma-4c_pc\sigma)} \tag{10.88}$$

$$\frac{4}{A_1}=\frac{4[(4u_0^2\beta+c_p\sigma)\sigma+c_p^2\beta]}{4u_0^2\sigma+c_p^2} \tag{10.89}$$

到此，不难讨论在参数空间 $(\sigma,\ \beta,\ u_0,\ p,\ \gamma_G)$ 中明、暗孤波分布。

10.3 增益色散及双光子吸收所支持的小幅孤波

10.3.1 引言

在最近 10 年中，光孤子已得到充分而广泛的研究，主要是由于它在光处理、光开关及光通信方面，有巨大的应用潜力。明孤子在多种情况下的各种动力学行为已得到充分的研究，支持明孤子的条件是载波于处于反常色散区，然而对于正常色散区中的非线性动力学，需借助暗孤波和小幅孤波进行研究。众所周知，掺饵光纤的极化弛豫时间 T_P 导致了增益色散[139]。在实际中，材料损耗总是不可避免。一般情况下，Kerr 非线性介质的非线性折射系数的虚部则来源于双光子吸收[180,181]。本文就是研究这两种效应在微扰情况下的小幅解析暗孤波解，并给出两类暗孤波在参数空间存在的区域。计及这两种因素并不考虑增益饱和时，有如下方程:

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x_1}-(\sigma-\mathrm{i}\gamma_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+(2+\mathrm{i}\gamma_n)|u|^2u=-\mathrm{i}\gamma_G u \tag{10.90}$$

式中，σ 是群速色散强度，且 $\sigma>0$ 为正常色散区，$\sigma<0$ 为反常色散区，$\gamma_2=L_Dg_0\tau_p^2$，$\gamma_G=L_D(\alpha-g_0)$(参见文献〔139〕)，$\gamma_n/2$ 为非线性折射系数的虚部与实部之比[180]，$x_1=2x/L_D$，$t_1=(t-x/v_g)/T_0$，$u=A/P_0^{1/2}$，$\tau_p=T_p/T_0$，$L_D=T_0^2/|k''_0|$为色散长度，T_0和P_0分别是脉冲宽度和峰值功率。方程式(10.90)也是文献〔38〕的一种特殊情况，在文献〔182〕中称之为非线性 Schrodinger–Ginzburg–Landau 方程。下面研究三个 γ 项作为微扰情况下的小振幅孤波，在下面，x_1、t_2 仍用 x、t 表示。

10.3.2 微扰分析与小振幅孤波

我们知道，对 γ_2，γ_G，γ_n 均为零的非线性微扰方程，式(10.90)有小振幅暗孤子解，具有下面形式:

$$u(x,\ t)=[u_0+a(x,\ t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u_0^2x+\mathrm{i}\varphi(x,t)} \tag{10.91}$$

式中:

$$a(x,\ t)=-\frac{1}{2}u_0 v^2 \mathrm{sech}^2\left[\frac{Z}{2}\right]$$

$$\varphi(x,\ t)=-\frac{v}{2(1+\mathrm{e}^Z)}$$

$$Z=2vu_0\left[t-c\left(1-\frac{1}{2}v^2\right)x\right] \qquad c=\pm 2u_2$$

当三个 γ 项以微扰出现于方程式 (10.90)，我们假设式 (10.90) 仍有式 (10.91) 形式的小振幅孤波解，但这时 $a(x,\ t)$ 和 $\varphi(x,\ t)$ 不再取上述形式，而是缓慢变化的。下面确定它们的具体形式。将式 (10.91) 代入式 (10.90) 并分离实部与虚部，有:

$$-2u_0^3-2u_0^2a-u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}-a\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sigma\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\sigma(u_0+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2$$
$$-2\gamma_2\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\gamma_2(u_0+a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2u_0^3+6u_0^2a+6u_0a^2+2a^3=0 \tag{10.92}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}-2\sigma\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\sigma(u_0+a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\gamma_2\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-\gamma_2(u_0+a)(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2+\gamma_n(u_0+a)^3$$
$$=-\gamma_G(u_0+a) \tag{10.93}$$

作下列尺度假设:

$$\left.\begin{array}{l} u_0=O(1) \qquad \sigma=O(1) \\ \gamma_G=O(\varepsilon^6) \qquad \gamma_2=O(\varepsilon^2) \qquad \gamma_N=O(\varepsilon^6) \\ \varphi=\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^3\varphi_1+\cdots \\ \tau=(t-cx)\varepsilon \qquad x=\varepsilon^3 x \end{array}\right\} \tag{10.94}$$

将式 (10.94) 代入式 (10.92) 和式 (10.93)，分离各级变量并令 $\varepsilon=1$(相当于把 ε 吸收到各变量之中) 可得:

$$\left.\begin{array}{l} c\dfrac{\partial a_0}{\partial\tau}+\sigma u_0\dfrac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2}=0 \\ u_0\left(c\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+4u_0a_0\right)=0 \end{array}\right\} \tag{10.95}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(c\dfrac{\partial a_1}{\partial\tau}+\sigma u_0\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}\right)+\sigma\left(2\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial a_0}{\partial\tau}+a_0\dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}\right)-\dfrac{\partial a_0}{\partial z} \\ \qquad =\gamma_G u_0-\gamma_2u_0\dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}+\gamma_2\dfrac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2}+\gamma_n u_0^3 \\ u_0(c\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}+4u_0a_1)+ca_0\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+\sigma u_0(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\tau})^2 \\ \qquad -\sigma\dfrac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2}+6u_0a_0^2-u_0\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z}=\gamma_2u_0\dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2} \end{array}\right\} \tag{10.96}$$

由式 (10.95) 可得

$$a_0 = -\frac{c}{4u_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau} \tag{10.97}$$

且

$$c^2 = 4\sigma u_0^2 \tag{10.98}$$

联立求解式(10.96)，并利用式(10.98)消去其中 a_1 和 φ_1，因而有

$$2\frac{\partial a_0}{\partial z} + \left(\frac{6c}{u_0}a_0 + \frac{c}{\sigma}\gamma_2\right)\frac{\partial a_0}{\partial \varepsilon} - \frac{c\sigma}{4u_0^2}\frac{\partial^3 a_0}{\partial\tau^3}$$

$$= -\gamma_G u_0 - 2\gamma_2\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2} - \gamma_n u_0^3 \tag{10.99}$$

如果作变换:

$$f = \tau - bz$$

$$g = z \tag{10.100}$$

则式(10.99)可化为微扰KdV方程:

$$A_1\frac{\partial a_0}{\partial g} + A_2 a_0\frac{\partial a_0}{\partial f} - \frac{\partial^3 a_0}{\partial f^3} = -\varepsilon p(a_0) \tag{10.101}$$

$$\varepsilon p(a_0) = \frac{cu_0}{\sigma^2}\gamma_G + \frac{2c}{\sigma^2}\gamma_2\frac{\partial^2 a_0}{\partial f^2} + \frac{cu_0^3}{\sigma^2}\gamma_n \tag{10.102}$$

$$b = \frac{c}{2\sigma}\gamma_2 \qquad A_1 = \frac{2c}{\sigma^2} \qquad A_2 = \frac{24u_0}{\sigma} \tag{10.103}$$

再作变换:

$$w = \frac{A_2}{6}a_0$$

$$y = -\frac{1}{A_1}g$$

则式 (10.101) 化为标准 KdV 方程的微扰形式:

$$w_y - 6ww_f + w_{fff} = \varepsilon\bar{p}(w) \tag{10.104}$$

$$\varepsilon\bar{p}(w) = B_1 - B_2\frac{\partial^2 w}{\partial f^2} \tag{10.105}$$

式中:

$$B_1 = -\frac{cu_0A_2}{6\sigma^2}(\gamma_G + u_0^2\gamma_n)$$

$$B_2 = \frac{2c}{\sigma^2}\gamma_2$$

利用文献〔110〕的方法，可求出式 (10.104) 的绝热近似解

$$w = -2\mu^2(y)\,\mathrm{sech}^2 Z \qquad Z = \mu(y)[f - \xi(y)] \tag{10.106}$$

中的时间慢变参数演化为:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\bar{p}(w)\,\mathrm{sech}^2 Z\,\mathrm{d}Z$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y} = 4\mu^2 - \frac{1}{4\mu^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\bar{p}(w)\left[Z + \frac{1}{2}\sinh Z\right]\mathrm{sech}^2 Z\,\mathrm{d}Z$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = \frac{8}{15}B_2\mu^3 - \frac{1}{2}B_1\frac{1}{\mu} \tag{10.107}$$

$$\xi(y) = 4\int_0^y \mu^2(y')\mathrm{d}y' + \xi_0 \tag{10.108}$$

将式 (10.107) 回到原尺度

$$\mu\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -b_1\left[\mu^4 - \frac{b_2}{b_1}\right] \tag{10.109}$$

式中:

$$b_1 = \frac{8}{15\gamma_2}$$

$$b_2 = -\frac{u_0^2}{\sigma}(\gamma_G + u_0^2\gamma_n) \tag{10.110}$$

当$b_2/b_1 > 0$时，式(10.109)有解:

$$\mu^2 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{b_2}{b_1}}\,c\tanh[2\sqrt{b_1 b_2}(x - x_0)] & \left(\mu^4 > \dfrac{b_2}{b_1}\right) \\ \sqrt{\dfrac{b_2}{b_1}}\tanh[2\sqrt{b_1 b_2}(x - x_0)] & \left(\mu^4 < \dfrac{b_2}{b_1}\right) \end{cases} \tag{10.111}$$

式中:

$$x_0 = -\frac{1}{4\sqrt{b_1 b_2}}\ln\left|\frac{\mu_0^2 + b_2/b_1}{\mu_0^2 - b_2/b_1}\right|$$

当 $b_2/b_1 < 0$ 时，解是

$$\mu^2 = -\mathrm{sgn}(b_1)\sqrt{\left|\frac{b_2}{b_1}\right|}\tan[2\sqrt{|b_1 b_2|}(x - x_0)] \tag{10.112}$$

式中:

$$x_0 = \frac{1}{\mathrm{sgn}(b_1)\cdot 2\sqrt{|b_2 b_1|}}\arctan\left[\frac{\mu_0^2}{|b^2/b_1|^{1/2}}\right]$$

μ_0 是 $x=0$ 时 μ 的取值，于是 $a_0(x, t)$ 具体形式为

$$a_0(x,t)=-\frac{\sigma}{2u_0}\mu^2(x)\,\mathrm{sech}\{\mu(x)[\tau-(c+b)x-\xi(x)]\} \tag{10.113}$$

式(10.113)和式(10.91)给出了方程式(10.90)的小幅暗孤波解。

10.3.3 两类暗孤子的参数区域及传输特性

由上面分析已经看到，在不同的参数区域，存在不同演化类型的小幅暗孤波，它们由式(10.111)、式(10.112)决定。式(10.98)意味着 $\sigma>0$，因此，这种小幅孤波只能存在于正常色散区。孤波演化类型取决于

$$\frac{b_2}{b_1}=-\frac{15u_0^2}{8\sigma\gamma_2}(\gamma_G+u_0^2\gamma_n) \tag{10.114}$$

根据式(10.113)，由于 $\sigma>0$，因此，这种小幅孤波也只能是暗孤波。式(10.114)中 $\gamma_G=(\alpha-g_0)L_D$，因此 $\gamma_G+u_0^2\gamma_n=(\alpha L_D+u_0^2\gamma_n)-g_DL_D$，在 α，γ_n 及 γ_2 确定的情况下，可调节 g_0 使式(10.114)改变符号，即改变孤波演化类型。当式(10.114)所确定的值大于零，即在 $\gamma_2>0$ 且 $\alpha L_D+u_0^2\gamma_n<g_0L_D$ 时，任何幅值的暗孤波，经过特定距离

$$\Delta x_0=\left[\frac{32}{15}\left|\gamma_2u_0^2(\gamma_G+u_0^2\gamma_n)\right|/\sigma\right]^{1/2} \tag{10.115}$$

之后，都将演化成稳定幅值的暗孤波。孤波的速度是

$$v=(c+b)-\frac{2\sigma^2}{c}\mu^2(x)=c\left[1+\frac{\gamma_2}{2\sigma}-\frac{2\sigma^2}{c^2}\mu^2(x)\right] \tag{10.116}$$

由式(10.91)及式(10.97)，孤波也将相对中心频率产生频移

$$\Delta\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{z\sigma}{c\mu^2(x)} \tag{10.117}$$

频移量取决于 c 即 v 的符号(或孤波运动方向)，如果μ_∞^2(即$\sqrt{|b_2/b_1|}$)$>(c^2/2\sigma^2)(1+\gamma_2/2\sigma)$，则存在一空间距离 Δx: $\mu^2(\Delta x)=(c/2\sigma^2)(1+\gamma_2/2\sigma)$，当$x>\Delta x$后，孤波将改变原有的运动方向。在$\gamma_2>0$且$\alpha L_D+u_0^2\gamma_n>g_0L_D$的情况下，根据式(10.112)，当孤波经过式(10.115)所给距离之后，由于波幅一致增大，使小幅近似式(10.91)失效，这时小幅暗波很可能演化成基本暗波。也就是说，这时不存在稳定的小幅暗波解。由于这时是损耗相对增益占优势的情形，因此前面所说基本暗孤波是以减小背景深度u_0而不是以单方面增加暗孤波的幅度发展得到的。当$\gamma_0<0$时，情况刚好与上述情况相反。

需要强调，在 9.1 节及本节中，要求$\gamma_G=O(\varepsilon^6)$，这意味着$\alpha L_d=g_{0D}+O(\varepsilon^6)$，本节中如果认为光纤极化弛豫时间$\tau_p=T_p/T_0$在$O(\varepsilon^0)\sim O(\varepsilon^2)$范围内，则要求$g_0L_D=\gamma_2/\tau_p^2$在$O(\varepsilon^2)\sim O(\varepsilon^{-2})$范围内，这也就要求$\alpha L_D$在这个范围内，因此$g_0L_D$和$\alpha L_D$不能过小，二者应非常接近，如使二者差值为$O(\varepsilon^6)$量级。我们知道，通过控制掺杂，$g_0$是容易

在较大范围得到控制的；而增大αL_D又有两种途径：即调节波长工作点，使其远离最低损耗点，(如 1.55 μm)；或选用高损光纤，优质光纤的主要制造技术之一又是减小(而不是增大)损耗，因而这一途径更易实现。这一点非常重要，尤其目前，在我国还不完全具备实现基本明孤子的那些苛刻条件的情况下，可率先进行小幅孤子的物理及光学实验研究。在文献〔38〕中的数值示例中取$\gamma_G=-0.025$，$\gamma_2=-0.056$(注：其中符号与本文符号γ_0，γ_2，γ_n相差一负号)，在文献〔180〕中取$\gamma_G=0.01$，$\gamma_n=-0.01$(其中α_2即为本文$-\gamma_n$)，对于标准 NLS 方程，$\gamma_n=0$，因此$\gamma_n\sim O(\varepsilon^6)$是在$\gamma_n=0$与$\gamma_n=-0.01$之间的某值域。

总之，在增益色散及双光子吸收光纤中，当参数点处于$\gamma_2>0$且$\alpha L_D+u_0^2\gamma_n<g_0L_D$或$\gamma_2>0$且$\alpha L_D+u_0^2\gamma_n>g_0L_D$的区域时，任何幅值小振幅暗孤波将演化成稳定的小幅暗孤波。但处于$\gamma_2<0$且$\alpha L_D+u_D^2\gamma_n<g_DL_D$或$\gamma_2>0$且$\alpha L_D+u_D^2\gamma_n>g_DL_D$的区域时，小幅暗孤波是不稳定的，这种小幅状态只能在式(10.115)所给距离内存在。这一结果对研究正常色散区中的非线性动力学，研究增益色散及双光子吸收效应等，都有一定的参考意义。

第 11 章

光孤子的反射、透射和等价粒子分析

11.1　皮秒光孤子反射和透射研究初步

在孤子遇到界面的反射与透射方面，Aceves[146, 147]对空孤子(spatial soliton)即自聚焦通道作了较系统的研究，但尚未见报道光纤的突变界面上孤子的反射和透射行为。本节从 Maxwell 方程组出发，建立决定反射和透射过程的支配方程和边界条件，然后，再借助计算机数值地研究这一问题。为简单计，在模型中只考虑光纤两端完全匹配，只存在由于材料种类和参数特性不同而引起的反射，并假定，孤子宽度远大于载波周期，一般大于 20～30 倍周期。例如，对于 $\lambda_0=1.5\ \mu\text{m}$ 的光波，周期为 5 fs(1 fs＝1× 10^{-15}s)，因此在反射和透射问题中假定孤子宽度不小于 100～150 fs，这种情况对 ps 级宽度的孤子，近似十分合理。文献〔30〕对 fs 级孤子传输问题作了理论分析，可为进一步研究 fs 级孤子遇到界面突变所借鉴。

11.1.1　单界面问题的支配方程

研究 Kerr 电介质波导，在 $x=0$ 处有媒质突变面，如图 11－1 所示。设 $n= n_1+n_2|E|^2$，$\bar{n}= \bar{n}_1+ \bar{n}_2|E|^2$。从 Maxwell 旋度方程出发，考虑到上述条件有

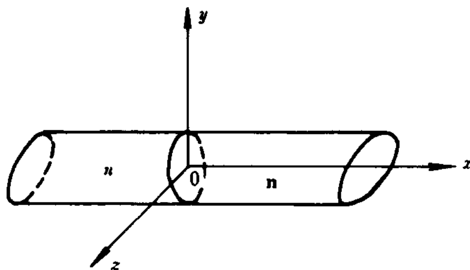


图 11－1　Kerr 带媒质突变界面的电介质波导

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{n_1^2}{c^2}\boldsymbol{E}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{2n_1n_2}{c^2}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{E}\right) \tag{11.1}$$

对于弱导单模光纤，$\boldsymbol{E}$只有横向分量，此时HE_{11}模的电场可表示为$\boldsymbol{E}=E(r,\ t)\hat{a}_y$，式中，$\hat{a}_y$为$y$轴的单位向量。考虑到这种情况下，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}\approx 0$，则方程式(11.1)可写为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{n_1^2}{c_2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{2n_1n_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[|E|^2\boldsymbol{E}]=0 \tag{11.2}$$

若设横向Laplace算子和横向矢量

$$\left.\begin{aligned}\nabla_t^2&=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ \boldsymbol{r}&=y\hat{a}_y+z\hat{a}_z\end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

且令

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=R(\boldsymbol{r}_t)u(x,\ t) \tag{11.4}$$

计及

$$\nabla_t^2R(\boldsymbol{r}_t)+k_c^2R(\boldsymbol{r}_t)=0\qquad k_c^2=\beta^2-k^2 \tag{11.5}$$

和

$$b=\frac{\iint_S|R(\boldsymbol{r}_t)|^4\mathrm{d}s}{\iint_S|R(\boldsymbol{r}_t)|^2\mathrm{d}s} \tag{11.6}$$

对于 PL_{01}（即 HE_{11}）模，$k_c=0$，即$\beta=k$，采用径向模式平均，即方程每一项[·]采用运算$\iint_s[\cdot]R(\boldsymbol{r}_t)^*\mathrm{d}s$，则有

$$\frac{c_2}{n_1^2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{2n_2}{n_1}b\frac{\partial^2}{\partial t^2}[|u|^2u]=0 \tag{11.7}$$

考虑到慢变波包近似

$$\psi(x,\ t)=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}A(k,\ t)\mathrm{e}^{\pm ikx}\mathrm{d}k=\Phi(x,\ t)\mathrm{e}^{\pm ik_0x} \tag{11.8}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\ t)=\int_{-\Delta k}^{\Delta k}A(k_0+\sigma k,\ t)\mathrm{e}^{\pm i\sigma kx}\mathrm{d}(\sigma k) \tag{11.9}$$

于是，在入射区，可以提出如下的形式解:

$$u(x,\ t)=u_I(x,\ t)+u_R(x,\ t) \tag{11.10}$$

式中，u_I，u_R表示式(11.13)(见后)中所决定的右行波和左行波，将式(11.10)代入式(11.7)并作分离，因而有:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{c^2}{n_1^2}\frac{\partial^2 u_I}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}-\frac{2n_2}{n_1}b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[|u_I|^2u_I+2|u_R|^2u_I+u_R^*u_I^2\right]=0\\&\frac{c^2}{n_1^2}\frac{\partial^2 u_R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2}-\frac{2n_2}{n^1}b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[|u_R|^2u_R+2|u_I|^2u_R+u_I^*u_R^2\right]=0\end{aligned}\right\}\tag{11.11}$$

注意到式(11.10)并意味着叠加原理，因为u_I与u_R各满足不同的方程(即式(11.11))，且都不满足u的方程，他们只是作为整体才满足u的方程。事实上，上述非线性耦合方程思想已被一些学者采用，如文献〔99，148，62〕。

在透射区，记$u=u_T$，则

$$\frac{c^2}{n_1^2}\frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2}-\frac{2\bar{n}_2}{\bar{n}_1}b\frac{\partial^2}{\partial t^2}(|u_T|^2u_T)=0\tag{11.12}$$

按照式(11.8)和式(11.9)，令左、右行波分别为:

$$u_I=v_I(x,\ t)\mathrm{e}^{-ik_0x}$$

$$u_R=v_R(x,\ t)\mathrm{e}^{ik_0x}$$

在透射区又有

$$u_T=v_T(x,\ t)\mathrm{e}^{-ik_0x}\tag{11.13}$$

将方程式(11.11)和式(11.12)作解析延拓，再进行 Fourier 变换，即各项乘e^{ikx}或e^{-ikx}后对x积分，例如对式(11.11)

$$-\omega^2\tilde{v}_I(k-k_0)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{v}_I(k-k_0)-\frac{2n_2}{n_1}b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{F}\left[|v_I|^2v_I\right]+2\mathrm{F}\left[|v_R|^2v_I\right]\right)=0\tag{11.14}$$

式中，$\tilde{v}(k-k_0)$等(或$\mathrm{F}[\cdot\ ]$)表示$v(x,\ t)$等关于$(k-k_0)$的 Fourier 变换。上式的导出过程已对各项作空间周期平均，$u_R^*u_I^2$项因平均为零而无贡献，文献〔62〕对此也作过类似的处理。$\omega^2=c^2k^2/n_I^2$和(n_2/n_I)都是k的函数，将其在k_0附近展开，重写式(11.14)有

$$\begin{aligned}&-\omega_0^2\tilde{v}_1(k-k_0)-2\omega'_0\omega_0(k-k_0)\tilde{v}_1(k-k_0)-\left[\omega_0\omega''_0+\omega_0'^2\right](k-k_0)^2\tilde{v}_1(k-k_0)\\&\quad-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{v}_1(k-k_0)-2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{F}\left[|v_I|^2v_I\right]+2\mathrm{F}\left[|v_R|^2v_I\right]\right)=0\end{aligned}\tag{11.15}$$

再对上式作关于$k-k_0$的Fourier 逆变换，得到:

$$\begin{aligned}&-\omega_0^2v_I-2i\omega'_0\omega_0(k-k_0)\frac{\partial v_I}{\partial x}+\left[\omega_0\omega''_0+\omega_0'^2\right]\frac{\partial^2 v_I}{\partial x^2}\\&\quad-\frac{\partial^2 v_I}{\partial t^2}-2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[|v_I|^2v_1+2|v_R|^2v_I\right]=0\end{aligned}\tag{11.16}$$

上式中，已约定 $\max\{|v_I|\}\approx 0(\varepsilon)$，$\Delta k/k_0\approx 0(\varepsilon)$，作尺度变换：

$$\zeta=\varepsilon^2 t \qquad t_0=t \qquad \xi=\varepsilon(x-v_g t) \tag{11.17}$$

$$v_I=\varepsilon Q(\xi,\ \zeta)f(t_0,\ \xi) \qquad v_R=\varepsilon R(\xi,\ \zeta)g(t_0,\ \zeta)$$

代入式(11.16)得一级、二级和三级近似

$$Q\frac{\partial^2 f}{\partial t_0^2}+Q\omega_0^2 f=0, \tag{11.18}$$

$$-2v_g\frac{\partial^2(f)}{\partial\xi\partial t_0}+\mathrm{i}2\omega_0\omega'_0\frac{\partial(Qf)}{\partial\xi}=0 \tag{11.19}$$

$$v_g\frac{\partial^2(Qf)}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2(Qf)}{\partial\zeta\partial t_0}-(\omega_0\omega''_0+\omega'^2_0)\frac{\partial^2(Qf)}{\partial\xi^2}$$

$$+2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0 b\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}[|Q|^2Q|f|^2f+2|R|^2Q|g|^2f]=0 \tag{11.20}$$

由式(11.18)、式(11.19)可分别得到 $f(t_0,\ \xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$，$v_g=\omega'_0$，同理可得 $g(t_0,\ \xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$，代入式(11.20)有

$$\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial\zeta}-\frac{1}{2}\omega''_0\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}-\omega_0 b\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_1[|Q|^2Q+2|R|^2R]=0. \tag{11.21}$$

经同样步骤可得 $R(\xi,\ \zeta)$ 和透射波 $T(\xi,\ \zeta)$ 的方程。回到原尺度最后得：

$$\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial t}+\mathrm{i}v_g\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{1}{2}\omega''_0\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\omega_0 b\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0[|Q|^2Q+2|R|^2Q]=0$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial R}{\partial t}-\mathrm{i}v_g\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{1}{2}\omega''_0\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\omega_0 b\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0[|R|^2R+2|Q|^2R]=0$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial t}+\mathrm{i}\bar{v}_g\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{1}{2}\bar{\omega}''_0\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\bar{\omega}_0 b\left(\frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1}\right)_0[|T|^2T]=0 \tag{11.22}$$

式(11.22)即本文要求的单界面问题的支配方程，其中字母上带“－”者表示透射区参数。

11.1.2　突变界面的边界条件

下面研究 $x=0$ 处单界面上的边界条件，注意到：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0\\ \mathbf{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0\end{aligned}\right\}\qquad(x=0) \tag{11.23}$$

在非线性情况下依然适用，由式(11.4)、式(11.13)和式(11.23)有

$$Q(0,\ t)+R(0,\ t)=T(0,\ t) \tag{11.24}$$

考虑到Maxwell方程

$$\frac{\partial E}{\partial x}\hat{a}_z - \frac{\partial E}{\partial z}\hat{a}_x = -\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{11.25}$$

取切向分量，并考虑对慢变波包求导为$O(\varepsilon^2)$级，如果该式中求导项符合:

$$\left.\begin{aligned} -\mu_0\frac{\partial H_I(x,\ t)}{\partial t} - \frac{\partial Q(x,\ t)}{\partial x} = O(\varepsilon^3) \\ -\mu_0\frac{\partial H_R(x,\ t)}{\partial t} - \frac{\partial R(x,\ t)}{\partial x} = O(\varepsilon^3) \\ -\mu_0\frac{\partial H_T(x,\ t)}{\partial t} - \frac{\partial T(x,\ t)}{\partial xt} = O(\varepsilon^3) \end{aligned}\right\} \tag{11.26}$$

则有:

$$\left.\begin{aligned} H_I(x,\ t) - \frac{k_0}{\mu_0\omega_0}Q(x,\ t) = O(\varepsilon^3) \\ H_R(x,\ t) - \frac{k_0}{\mu_0\omega_0}R(x,\ t) = O(\varepsilon^3) \\ H_T(x,\ t) - \frac{k_0}{\mu_0\omega_0}T(x,\ t) = O(\varepsilon^3) \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

在$O(\varepsilon^2)$级意义下，即单色近似下(对于$\lambda_0=1.5\ \mu\text{m}$的载波，这对皮秒级脉冲是适合的)，式(11.27)与式(11.24)、式(11.23)联立将给出与线性情况形式相似的结论，即在 $x=0$ 处，有:

$$R(0,\ t) = \frac{Q(0,\ t)(\sqrt{\varepsilon_N} - \sqrt{\varepsilon_N})}{(\sqrt{\varepsilon_N} + \sqrt{\varepsilon_N})}$$

$$T(0,\ t) = \frac{Q(0,\ t)2\sqrt{\varepsilon_N}}{(\sqrt{\varepsilon_N} + \sqrt{\varepsilon_N})} \tag{11.28}$$

式中，$\varepsilon_N = \varepsilon_1 + \varepsilon_2|E|^2$ 和$\bar{\varepsilon}_N = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2|E|^2$ 分别表示入射区和透射区的非线性介电常数，中心波数 $k_0 = \omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_N}$。$\varepsilon_N$ 和$\bar{\varepsilon}_N$ 可以由 n_1，n_2 和$\bar{n}_1$，$\bar{n}_2$ 等参数表示为:

$$\varepsilon_N = \left(\frac{n_1}{c}\right)^2 + \frac{2\bar{n}_1\bar{n}_2}{c^2}\overline{R(\boldsymbol{r}_t)^2}(|R(0,\ t)|^2 + |Q(0,\ t)|^2)$$

$$\bar{\varepsilon}_N = \left(\frac{n_1}{c}\right)^2 + \frac{2\bar{n}_1\bar{n}_2}{c^2}\overline{R(\boldsymbol{r}_t)^2}(|T(0,\ t)|^2 \tag{11.29}$$

式中:

$$\overline{R(\boldsymbol{r}_t)^2} = \frac{\iint_s |R(\boldsymbol{r}_t)|^2 \mathrm{d}s}{\iint_s \mathrm{d}s} \tag{11.30}$$

$R(0,\ t)$ 和 $T(0,\ t)$ 要由式 (11.28) 和式 (11.29) 迭代求出。实践表明，迭代是收敛的。再

把式 (11.27) 代入式 (11.26)，计及方程式 (11.22) 和

$$v_g = \omega'_0 = \frac{c}{n_1}\left[1+\frac{\lambda_0}{n_1}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\lambda_0}\right] = v_p\left[1+\frac{\lambda_0}{n_1}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\lambda_0}\right] \tag{11.31}$$

根据文献〔149〕中的图给数据可得 $\mathrm{d}n_1/\mathrm{d}\lambda_0|_{\lambda_0\approx 1.5\,\mu\mathrm{m}} \approx -0.96\times 10^{-2}\mu\mathrm{m}^{-1}$。因此，足以保证式 (11.26) 等号右端为 $O(\varepsilon^3)$ 的条件。波包越宽，慢变近似或单色近似越好，式 (11.27) 等号左端越小。

11.1.3　数值模拟与结果

为便于计算，把方程作无量纲处理。设 T_0 为孤子时间宽度，$D_0 = T_0\omega'_0$ 为空间宽度。考虑在反常色散区 $\omega''_0 > 0\,(k''_0 < 0)$，引入无量纲量：

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= \frac{x}{D_0} \\
v &= \frac{\omega''_0 t}{T_0^2 \omega'^2_0} \\
\psi &\leftarrow \omega'_0 T_0\left[\frac{b\omega_0 n_2}{(n_1|\omega''_0|)}\right]^{1/2}\psi
\end{aligned}\right\} \tag{11.32}$$

式中，ψ 表示Q，R，T，设

$$\left.\begin{aligned}
\overline{n}_1 &= n_1(1+\Delta_1) & \overline{n}_2 &= n_2(1+\Delta_2) \\
\overline{\omega}'_0 &= \omega'_0(1+\sigma_1) & \overline{\omega}''_0 &= \omega''_0(1+\sigma_2)
\end{aligned}\right\} \tag{11.33}$$

于是，方程式(11.22)变成：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial v} + \mathrm{i}a\frac{\partial Q}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial \mu^2} - [|Q|^2 Q + 2|R|^2 Q] = 0 \\
&\mathrm{i}\frac{\partial R}{\partial v} - \mathrm{i}a\frac{\partial R}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial \mu^2} - [|R|^2 R + 2|Q|^2 R] = 0 \\
&\mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial v} + \mathrm{i}a(1+\sigma_1)\frac{\partial T}{\partial \mu} - \frac{1}{2}(1+\sigma_2)\frac{\partial^2 T}{\partial \mu^2} - \left(\frac{1+\Delta_1}{1+\Delta_2}\right)|T|^2 T = 0
\end{aligned} \tag{11.34}$$

式中，$a = T_0\omega'^2_0/\omega''_0$，而式(11.29)可重写为：

$$\sqrt{\varepsilon_N} = \frac{1}{c}\left[n_1^2 + 2n_1^2\frac{\omega''_0}{\omega_0 D_0^2 b}\overline{R(\boldsymbol{r}_t)^2}(Q_0^2 + R_0^2)\right]^{1/2}$$

$$\sqrt{\overline{\varepsilon}_N} = \frac{1}{c}\left[n_1^2(1+\Delta_1)^2 + 2(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)n_1^2\frac{\omega''_0}{\omega_0 D_0^2 b}\overline{R(\boldsymbol{r}_t)^2}T_0^2\right]^{1/2} \tag{11.35}$$

式中，Q_0，R_0 和 T_0 分别代表 Q，R，T 在 $x=0$ 处的值。量度色散程度的参量 β

$$\beta = \frac{\omega_0\omega''_0}{\omega'^2_0} = \left(\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\right)_0\left(\frac{\omega_0}{v_g}\right) \tag{11.36}$$

还可由$|D|$来衡量，

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}\left[\frac{1}{v_g}\right]=2\pi n_1\frac{1}{\lambda_0^2}\frac{\omega''_0}{\omega'^2_0}=\frac{n_1}{\lambda_0}c\left(\omega_0\frac{\omega''_0}{\omega'^2_0}\right) \tag{11.37}$$

由此可求得式(11.35)中的$\omega''_0/(\omega_0 D_0^2)$，且

$$a=T_0\frac{\omega'^2_0}{\omega''_0}=\frac{2\pi n_1}{|D|\lambda_0^2}T_0 \tag{11.38}$$

表 11-1　Δ_1，β 和 T_0 参数选取值及其代号

Δ_1 \ β，T_0	$\beta=0.005$ $T_0=4$ ps	$\beta=0.08$ $T_0=0.1$ ps	$\beta=0.16$ $T=0.05$ ps	$\beta=0.32$ $T_0=0.02$ ps
0.00	A_0	—	—	—
0.05	A_1	B_1	—	D_1
0.50	—	—	—	D_2
2.00	A_3	B_3	C_3	D_3
5.00	A_4	—	—	D_4

在以往文献的数字实例中，文献〔22〕取$\beta=5\times10^{-2}$，当$\lambda_0=1.55\,\mu$m，$n_1=1.45$时，对应于$|D|=161$ ps• km^{-1}• nm^{-1}。而通常采用 $D=2.16$ ps• km^{-1}• nm^{-1}(见文献〔4〕)。

本节在计算中统一取 $\lambda_0=1.55\,\mu$m，$n_1=1.45$。把 β 和 T_0 取成如表 11-1 所示的 A，B，C，D 四组数值。其中，D 组参数与实际光纤系统偏离较大。我们采用光束传播法结合边界条件式(11.28)，对反射、透射过程作出数值模拟。考虑到完成反射过程的时间很短，很难显示出作为累积效应的色散扩宽和非线性压缩。因此，除了选择符合实际光纤传输系统的参数外，还给出若干强色散和强非线性参数，以“放大”反射和透射过程细节，并规定，当入射波峰相距界面 $10T_0$ 时间距离时，反射过程开始；而当反射和透射波峰离开界面 $10T_0$ 时间距离时，反射和透射过程结束。

图 11-2 给出(*a*) $\Delta_1=0.05$，(*b*) $\Delta_1=0.5$，(*c*) $\Delta_1=2.0$ 三种情况反射、透射过程的演化图形。其中，横向代表沿传播方向的 x 轴，纵向表示时间。横向以光程为标尺，全长 $40T_0$；纵向历时 $20T_0$。需要指出：本文中所有有关曲线和波都是按波幅(而不是按强度)画出的。

图 11-3 和图 11-4 中左右图分别给出反射波和透射波的峰值(RM，TM)和半宽度(RD，TD)的演化过程，而且，图中表示归一化反透射振幅，即波幅均被除以线性情况下的反射、透射系数，这样便于比较。

正如所料，在反射过程中，除强参数外，其它都不足以显示出明显的变化，即一般情况下，半波宽保持在入射波宽 13.196 96 空间格长(每格长$=0.997\,9T_0$)左右的非常小范围内。由图 11-3，图 11-4 看到，从 C_3 开始反射和透射情况已与线性情况明显不同。反射波宽度及幅值分别随时间增加和减小，而且当 Δ_1 减小时，则波宽增加越多，波峰减小也

越快，这是典型的色散强于非线性的特征。

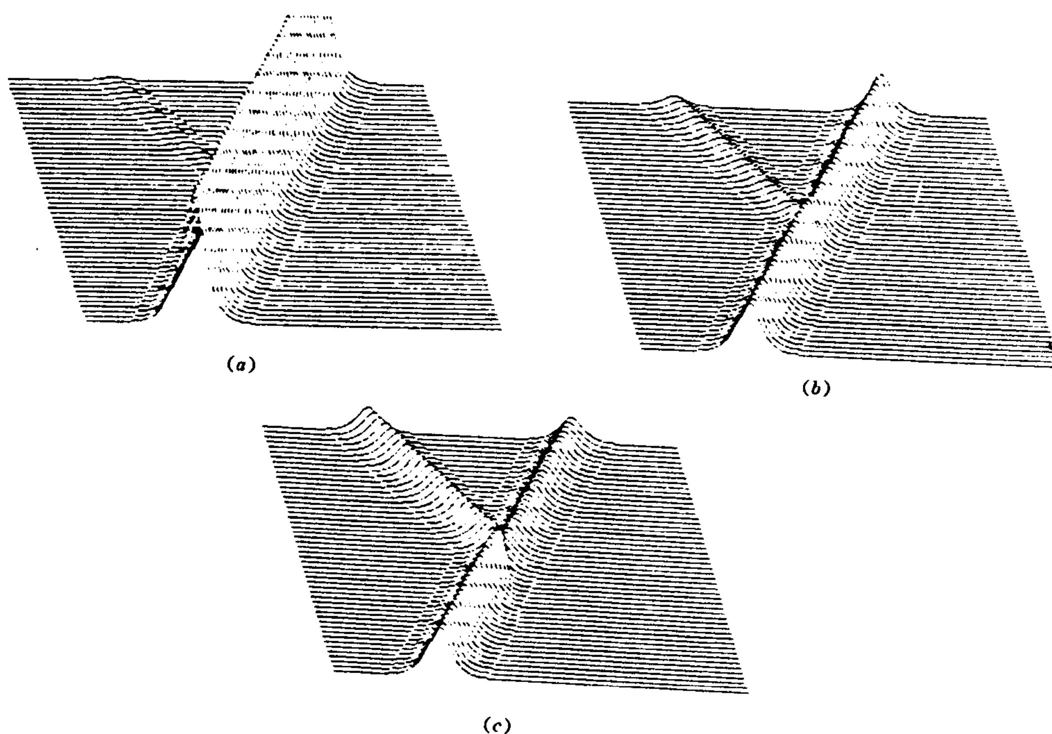


图 11－2　反射波和透射波的演化过程

(*a*) $\Delta_1 = 0.05$；(*b*) $\Delta_1 = 0.5$；(*c*) $\Delta_1 = 2.0$

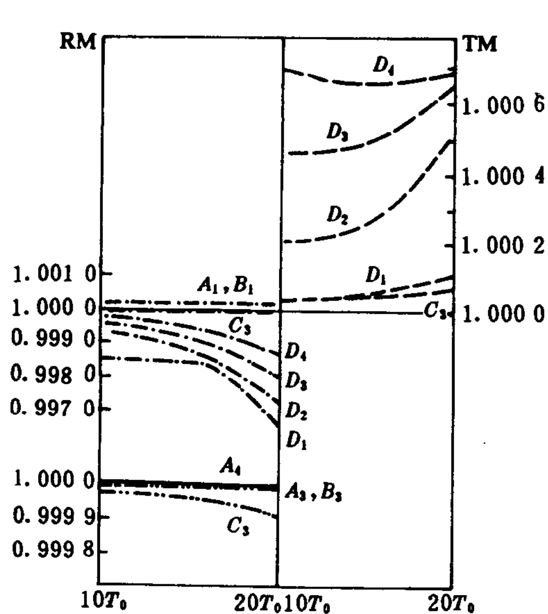


图 11－3　反射波和透射波归一化峰值 (RM，TM)演化过程

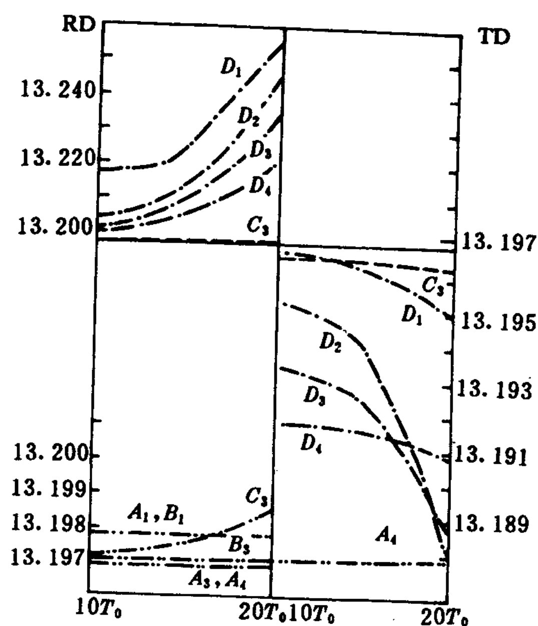


图 11－4　反射波和透射波半宽度 (RD，TD)演化过程

图 11－5 给出当反射、透射波在离开界面 $10T_0$ 时间距离时的放大波形。由于在所有

参数下反射、透射波相对于入射波(即 sech ξ)的偏离还无法画图区分，因此在图 11–5 还给出各种情况的波形与 sech ξ 曲线的差值。它们与前面分析是一致的。例如，反射波 D 组参数下，其中心部位小于零，对应于波峰受到削弱；而几乎在$\partial^2 R/\partial^2 \xi>0$ 的区域，其值大于零，对应于波形更加平坦，因而波宽增加。

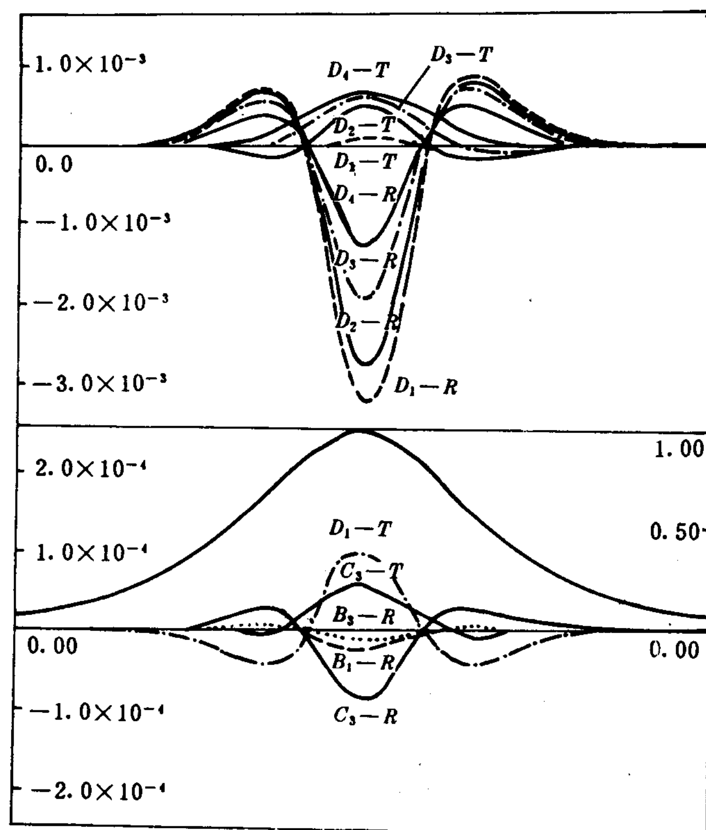


图 11－5 反射和透射波形及其与入射波形的差值波形

我们已经看到，在控制色散常数使突变界面两侧保持相同，仅仅增加折射率$\bar{n}_1$，则使透射波幅减小。但是，由于$\bar{n}_1$的变化引起 ω''_0 和非线性强度的相对变化，结果是非线性可能强于色散，因而透射波并不总是随时间减弱展宽的(尽管波幅小于 1)。如果适当选择 Δ_1，在传输过程中，可使波幅的增殖和变窄与损耗带来的衰减和展宽相平衡。这时即可在有耗的击传输系统中维持孤子，而不需要补充能量。文献〔118，116，150〕中提出连续或逐级地减小光纤群速色散或芯径来维持孤子。本文所给出的每组参数中，都是维持$|D|$或 β 相同，改变 n_1 进行计算的，这也是光纤补偿的又一种途径。

11.1.4 小结

本节初步建立了决定光纤孤子在遇到突变界面时反射和透射过程的支配方程及边界条件以及数值模拟全部过程。结果表明：在现有光纤实际参数下，由于需要时间积累的色散扩展和非线性压缩在短暂时间内尚不足以显示。所以，一般情况下反射、透射过程与线性情况偏离不大。只有在强参数条件下才给出足够差异。

本节所分析的只适用于慢变准单色的情况。此外，入射区与透射区的模式匹配问题还需进一步分析，在下节中将进行深入的研究。

11.2 亚皮秒光孤子脉冲在突变界面的反射

11.2.1 引言

我们在上一节对光孤子遇到媒质突变界面时的反射与透射作了初步研究，建立了决定反射和透射过程的支配和准确到$O(\varepsilon^3)$的边界条件。但对于亚皮秒和飞秒脉冲，应改进支配方程，尤其是边界条件。本节旨在研究亚皮秒脉冲的反透射行为。由于皮秒和亚皮秒孤子在反射时偏离线性 Fresnel 反射很小，因此，计算时也将选择一些强参数来放大反透射的细节。

11.2.2 支配方程的进一步讨论

上一节中的数值模拟表明，由于反透射过程非常短暂，在脉冲宽度这样极短的时间内，作为时间积累效应的色散展宽和非线性压缩还不足以显现出来，因此高阶色散项所起的作用相对很小。为使边界处的数值处理简单化，对于亚皮秒孤子，不考虑三阶色散项及其它高阶色散项有一定合理性。当然，对于飞秒孤子，需要考虑高阶色散和自感应 Raman 效应等，这是我们进一步的课题。让我们再回顾一下上节中得到支配方程的过程，即从 Maxwell 方程组出发，考虑弱导单模光纤，有$\nabla\cdot \boldsymbol{E}\approx 0$且$\boldsymbol{E}_{11}$(或 PL_{01})模的电场可表示为$\boldsymbol{E}\approx E(\boldsymbol{r},\ t)\hat{a}_y$，$\hat{a}_y$为某一径向的单位矢量，设界面在$x=0$处，波由$x<0$一方入射，假定径向分布对非线性项的影响可以忽略，通过慢变波包近似，径向模式平均和空间周期平均，作尺度约定$\max\{|E|\}\sim O(\varepsilon)$，$\Delta k/k_0\sim O(\varepsilon)$和尺度变换

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\varepsilon^2 t \qquad t_0=t \qquad \xi=\varepsilon x\\&v_\psi=\varepsilon\psi(\xi,\ \zeta)f_\psi(t_0,\ \xi) \qquad (\psi=Q,\ R,\ T)\end{aligned}\right\}$$

按ε的幂次分离各级量之后，令$\varepsilon=1$，得到支配入射、反射和透射波包(Q，R，T)的耦合非线性 Schrodinger (NLS)方程(即上节式(11.22)):

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial t}+\mathrm{i}v_g\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{1}{2}\omega''_0\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\omega_0 b\left(\frac{n_2}{n_1}\right)[|Q|^2Q+2|R|^2Q]=0\\&\mathrm{i}\frac{\partial R}{\partial t}-\mathrm{i}v_g\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{1}{2}\omega''_0\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\omega_0 b\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_0[|R|^2R+2|Q|^2R]=0\\&\mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial t}+\mathrm{i}\bar{v}_g\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{1}{2}\bar{\omega}''_0\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\omega_0 b\left(\frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1}\right)_0[|T|^2T]=0\end{aligned}\right\}$$

式中，带“－”表示透射区的相应量。例如，入射区$n=n_1+n_2|E|^2$，$v_g=\omega'_0$，则透射区的相应量$\bar{n}=\bar{n}_1+\bar{n}_2|E|^2$，$v_g=\bar{\omega}'_0$，且有:

$$b=\frac{\iint_S |R_r|^4 \mathrm{d}s}{\iint_S |R_r|^2 \mathrm{d}s}$$

$$\bar{b}=\frac{\iint_S |\bar{R}_r|^4 \mathrm{d}s}{\iint_S |\bar{R}_r|^2 \mathrm{d}s}$$

下标“0”表示该量在 $k=k_0$ 时的取值，在那里已约定在界面附近场分布偏离 HE_{11} 模很小。至此总光场可表示为：

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=\hat{a}_y R_r(\boldsymbol{r}_\perp)[Q(x,\ t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\omega_0 t-k_0 x)}+R(x,\ t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\omega_0 t+k_0 x)}] \quad (x<0)\\ &\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=\hat{a}_y \bar{R}_r(\boldsymbol{r}_\perp)T(x,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t-\bar{k}_0 x)} \quad (x>0)\end{aligned}\right\} \tag{11.39}$$

式中，$R_r(\boldsymbol{r}_\perp)$为径向函数并满足$\nabla_\perp^2 R_r(\boldsymbol{r}_\perp)+k_c^2 R_r(\boldsymbol{r}_\perp)=0$，由于$PL_{01}$模$k_c=0$，故可简单地写成$\nabla_\perp^2 R_r(\boldsymbol{r}_\perp)=0$。在上节中，对场分布偏离$HE_{11}$模很小的条件未作说明，这里将做些适当的分析。当光纤存在突变时，在远离突变界面处的透射波，反射波的主模是HE_{11}模的条件分别是[151]：

$$\bar{u}_{01}^2+\bar{w}_{01}^2=2\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2\bar{n}_1^2\bar{\Delta} \qquad <2.405^2 \tag{11.40}$$

$$u_{01}^2+w_{01}^2=2\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2 n_1^2\Delta \qquad <2.405^2 \tag{11.41}$$

式中，u_{01},w_{01}等代表芯层和包层的横向传输常数，$\Delta=(n_1-n_2)/n_1$,$\bar{\Delta}=(\bar{n}_1-\bar{n}_2)/\bar{n}_1$，入射透射区基模的本征方程是[11]：

$$\frac{u_{01}J_1(u_{01})}{J_0(u_{01})}=\frac{w_{01}K_1(w_{01})}{K_0(w_{01})} \tag{11.42}$$

$$\frac{\bar{u}_{01}J_1(\bar{u}_{01})}{J_0(\bar{u}_{01})}=\frac{\bar{w}_{01}K_1(\bar{w}_{01})}{K_0(\bar{w}_{01})} \tag{11.43}$$

于是入反射波和透射波中主模的场径向分布可写成$J_0(u_{01}r/a)$和$J_0(\bar{u}_{01}r/a)$。因此，若$\bar{u}_{01}\neq u_{01}$，则在$J_0(u_{01}r/a)$和$J(\bar{u}_{01}r/a)$随 r 变化的曲线中，两条曲线从 $r=0$ 处(取值均为 1)开始逐渐分开；到 $r=a$ 时，两条曲线之间留出一个弯曲的尖劈状面积，见图 11–6。这一差异导致在 $x=0$ 处的突变界面上，无法通过选择反射、透射主模的系数而使场的切向分量连续，于是就需要各种高次模来适应(即选择待定系数)“填补”这些“间隙”。由于高次模又不能在光纤中传输，因此它们都是辐射模，随着波远离界面，这些高次模一方面沿径向在包层中向外辐射，同时沿传输方向逐渐衰减，辐射损失能量即为高次模能量，因而与上述尖劈状面积有递增对应关系。因此，这个面积越小，则高次模所占能量越小，这时忽略高次模就越合理。减小这个面积有两个途径，其一是减小 $\bar{u}_{01}$ 与 u_{01} 的差别，还

可以使 u_{01} 和 $\bar{u}_{01}$ 都小于并远离 2.405 即$J_0(x)$的第一个零(当然 $\bar{u}_{01}-u_{01}$ 可以不很小)，这是因为尖劈是从 $r=0$ 逐渐分开的。

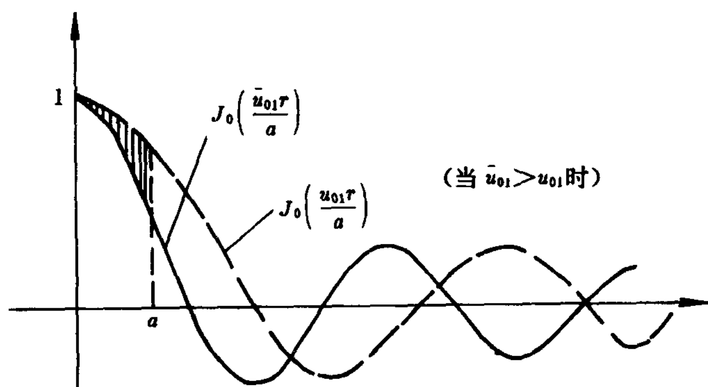


图11－6　$J_0(u_{01}r/a)$与$J_0(\bar{u}_{01}r/a)$曲线的比较

当然，从式(11.40)和式(11.41)可知，通过控制 $\bar{\Delta}$ 和 $\bar{n}_1^2$ 使 $\bar{n}_1^2\bar{\Delta}=n_1^2\Delta$ 后，式(11.41)与式(11.43)有相同的零点(根)，即$\bar{u}_{01}=u_{01}$，$\bar{w}_{01}=w_{01}$。这时，无需高次模来“填充”，就可以通过选择反射波和透射波主模系数使场切向分量连续。由于$\bar{\Delta}$在保证单模条件下可有较大的选择范围即 (1～10)× 0.1%，故 $\bar{n}_1$ 相对 n_1 也可有较大的选择余地，这就是上节及本节中 Δ 参数有几种较大取值的原因。

在本节及上节中，作为短光孤子界面反射研究的初级阶段，为提取界面反射过程中的主要特征，只考虑

$$\bar{n}_1^2\bar{\Delta}=n_1^2\Delta \tag{11.44}$$

这一情形，以去掉高次模等复杂因素，这也是深入研究这一问题的必要基础。当然，这些结论也适应于$\bar{u}_{01}$ 与 u_{01} 不同，但上述尖劈面积较小 (u_{01} 与$\bar{u}_{01}$ 不必差很小) 的情形，下面给出一个适应这一情形的判据:

$$1-\frac{\int_0^a J_0\left(\frac{\bar{u}_{01}r}{a}\right)J_0\left(\frac{u_{01}r}{a}\right)r\mathrm{d}r}{\int_0^a\left[J_0\left(\frac{u_{01}r}{a}\right)\right]^2 r\mathrm{d}r}<O(\varepsilon^3) \tag{11.45}$$

这里已考虑到没有考虑高阶色散的 NLS 方程也只准确到 $O(\varepsilon^3)$。

11.2.3　边界条件的改进

在亚皮秒脉冲情况下，虽然支配方程中高阶项被忽略有一定的合理性，但准确到 $O(\varepsilon^2)$的边界条件不再适应。事实上，这时对孤子反透射产生极其重要的影响，下面建立一般情况的边界方程。上节已认为非线性情况下，在 $x=0$ 的界面上

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0\\ \mathbf{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0\end{aligned}\right\}\quad(x=0)$$

仍然成立，因场是无源的，容易证明上式。假定磁场 $\boldsymbol{H}(x,\ t)$ 也具有式 (11.39) 的形式，于是上式给出：

$$\left.\begin{aligned}&Q(0,\ t)+R(0,\ t)=b_1T(0,\ t)\\&H_I(0,\ t)+H_R(0,\ t)=b_1H_T(0,\ t)\end{aligned}\right\}\tag{11.46}$$

式中：

$$b_1=\frac{\iint_S\overline{R}_r(\boldsymbol{r}_\perp)R_r(\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{d}s}{\iint_S|R_r(\boldsymbol{r}_\perp)|\mathrm{d}s}$$

显然，当式 (11.44) 满足时，$J_1(u_{01}r/a)=J_1(\bar{u}r/a)$，因此有 $b_1=1$，当式 (11.45) 满足时，$b_1\approx 1$。结合式 (11.39)，Maxwell 方程

$$\frac{\partial E}{\partial x}\hat{a}_z-\frac{\partial E}{\partial z}\hat{a}_x=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{11.47}$$

的切向分量给出：

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{i}\omega_0\mu_0H_I(x,\ t)+\mathrm{i}k_0Q(x,\ t)=\frac{\partial Q(x,\ t)}{\partial x}+\mu_0\frac{\partial H_I(x,\ t)}{\partial t}\\&-\mathrm{i}\omega_0\mu_0H_T(x,\ t)+\mathrm{i}\bar{k}_0T(x,\ t)=\frac{\partial T(x,\ t)}{\partial x}+\mu_0\frac{\partial H_T(x,\ t)}{\partial t}\\&-\mathrm{i}\omega_0\mu_0H_R(x,\ t)-\mathrm{i}k_0R(x,\ t)=\frac{\partial R(x,\ t)}{\partial x}+\mu_0\frac{\partial H_R(x,\ t)}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{11.48}$$

在上式中置 $x=0$ 并代入式(11.42)有

$$\frac{\bar{k}_0}{k_0}b_1T(0,\ t)+R(0,\ t)=Q(0,\ t)+2\Delta Q\tag{11.49}$$

式中：

$$\Delta Q=\frac{1}{2\mathrm{i}k_0}\left\{\mu_0\frac{\partial}{\partial t}[b_1H_T(0,\ t)-H_I(0,\ t)-H_R(0,\ t)]+\frac{\partial}{\partial x}[b_1T(x,\ t)-Q(x,\ t)-R(x,\ t)]\right\}\bigg|_{x=0}\tag{11.50}$$

由于式 (11.47) 在任意时刻成立，故上式第一项为零。从式 (11.49) 和式 (11.46) 中解出：

$$\left.\begin{aligned}&b_1T(0,\ t)=\frac{2\sqrt{\varepsilon_N}}{\sqrt{\varepsilon_N}+\sqrt{\bar{\varepsilon}_N}}(Q(0,\ t)+\Delta Q)\\&R(0,\ t)=b_1T(0,\ t)-Q(0,\ t)\end{aligned}\right\}\tag{11.51}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_N=\left(\frac{n_1}{c}\right)^2+\frac{2n_1n_2}{c^2}\overline{R_r(\boldsymbol{r}_\perp)^2}(|R(0,\ t)|^2+|Q(0,\ t)|^2\\&\bar{\varepsilon}_N=\left(\frac{\bar{n}_1}{c}\right)^2+\frac{2\bar{n}_1\bar{n}_2}{c^2}\overline{R_r(\boldsymbol{r}_\perp)^2}|T(0,\ t)|^2\end{aligned}\right\}\tag{11.52}$$

和

$$\overline{R_r(\boldsymbol{r}_\perp)^2} = \frac{\iint_s |R_r(\boldsymbol{r}_\perp)|^2 \mathrm{d}s}{\iint_s \mathrm{d}s \overline{\overline{R}_r(\boldsymbol{r}_\perp)^2}} = \frac{\iint_s |\overline{R}_r(\boldsymbol{r}_\perp)|^2 \mathrm{d}s}{\iint_s \mathrm{d}s}$$

因此，$R(0,\ t)$，$T(0,\ t)$需要由式(11.50)、式(11.51)、式(11.52)三式迭代解出。实践证明，迭代是收敛的。如果$|\Delta Q|<|Q(0,\ t)|$，则式(11.52)回到上一节的结论。由式(11.50)可见，在慢变波包近似非常有效的情况下，$k_0 \gg \|\partial/\partial x\|$，因此，对于皮秒脉冲$|\Delta Q|$是可忽略的；但在亚皮秒脉冲下，$\|\partial/\partial x\|$较大，这时$\Delta Q$的影响需要考虑。

11.2.4　数值模拟及其结果

在数值模拟中，需要按上节步骤对耦合方程式(11.22)及边界条件式(11.50)、式(11.51)和式(11.52)无量纲化；然后，用光束传播法求解耦合 NLS 方程；边值问题用光束传播法较为方便，对在边界点上的二阶导数的处理，采用了二重网络技术，即把在与边界点邻近的两格内再次进行更高密度格点细分，以确保二阶导数的精度。

计算中，取$\lambda_0=1.55\ \mu\mathrm{m}$，$n_1=1.45$，$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda 0}\approx -0.96\times 10^{-2}\ \mu\mathrm{m}^{-1}$[149]，并在入透射区保持$D$不变，这时$n_1$的变化$\Delta_1=(\bar{n}-n_1)/n$，也将引起$\omega'_0$，$\omega''_0$的变化，由$\omega'_0$，$\omega''_0$的计算式可确定其相对变化$\sigma_1$，$\sigma_2$。关于$\Delta_1$、$D$、$T_0$三参数的选取分组列于表 11-2 中并赋予相应的代号。由于这种情况下非线性反射偏离 Fresnel 线性反射仍然较小，因此除选择符合实际的参数外，还选择了一些强参数以放大这个过程的细节，如选脉宽$T_0=0.02$ ps并不代表20 fs孤子，而是用它来等价$T_0=0.2$ ps或$T_0=0.4$ ps等宽脉冲处于更强非线性环境的反透射情况，这样做便于比较。模拟时空范围是$-20T_0v_g\leqslant x\leqslant +20T_0v_g$，$0\leqslant t\leqslant 20T_0$且$t=0$时，波峰位于$x=-10T_0v_g$处。图 11-7 给出了三种$\Delta_1$取值时的反射、透射过程演化情况。图 11-7 是按幅值(如$|Q|$等)而不是按光强画出的。图 11-8 给出了反射波透射波峰离开界面$10T_0$时间时距离的归一波幅与入射波幅 sech x 的差值波形，这时归一波幅是反射波透射波幅$R(x,\ t)$、$T(x,\ t)$与线性 Fresenel 反射、透射系数r_l，t_l相除后的值R/r_l，T/t_l，其目的是为了比较反射透射波相对入射波所发生的变化。图 11-8 中给出了两种具有代表性的差值波形，而且反射波的前沿在图中左边，透射波前沿在右边。强调一点，通常$D=2\sim 16$ ps/(km·nm)，但文献〔22〕中也曾

表 11-2　参数的分组选取及其代号

	D(ps/(km·nm))	10	100	1 000	10
Δ_1	T_0 (ps)	0.02	0.02	0.02	0.2
0.05		B_1	C_1	D_1	E_1
0.5		B_2		D_2	
2.0		B_3		D_3	

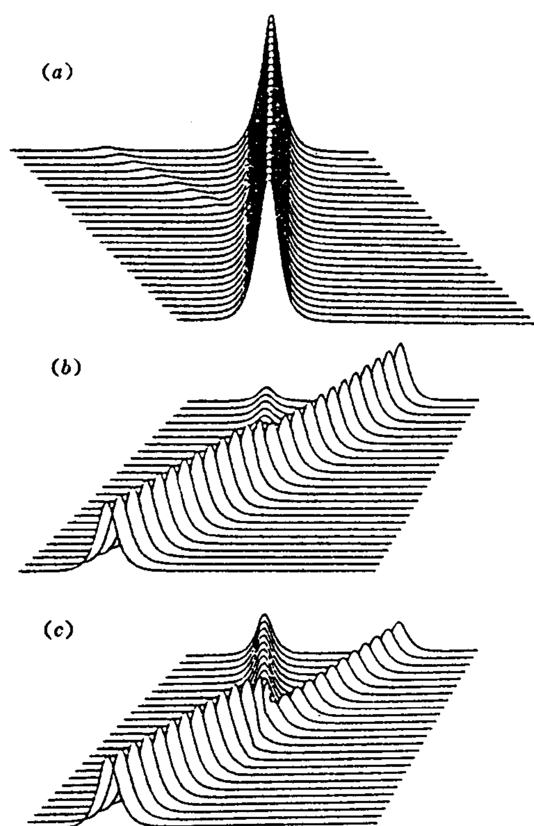


图 11－7　反射、透射过程中波形的演化，
(D= 10 ps／km· nm，T_0=0.2 ps)
(a) Δ_1=0.05；(b) Δ_1=0.5；(c) Δ_1=2.0

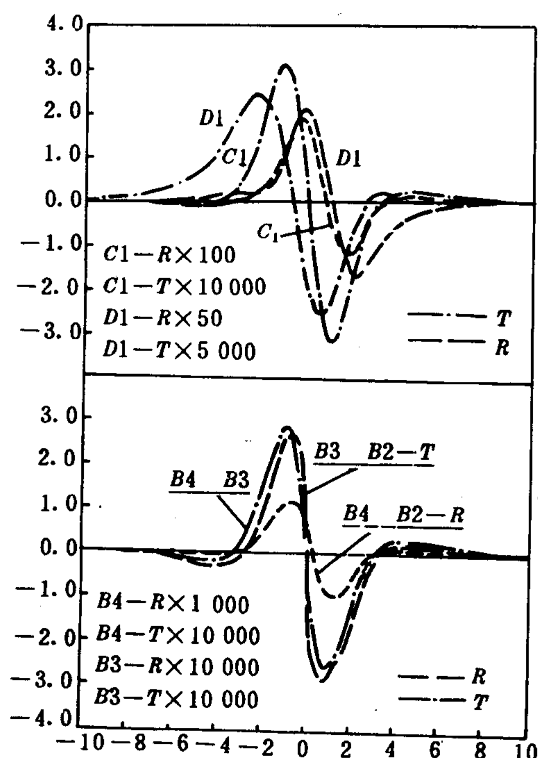


图 11－8　波峰离开界面 $10T_0$ 时间距离时，
反射透射波与入射波差值——
(R/r_1-Q)与(T/t_1-Q)的波形

选β= 5× 10^{-2}，它对应于$D\approx$ 161 ps／(km· nm)、Δ_1 =0.05，可粗略地表征两种不同材料的光纤完全吻合地连接而形成的界面(对应的能量反射约为 0.06%)；Δ_1 =0.5 和 Δ_1 =2.0 的一些特种光纤(即非通讯光纤)界面反射透射，当然也可粗略近似在通讯光纤接缝两界面中的每一个界面，只要间隙宽度 $d\ll\lambda_0$。在亚皮秒情况下，非线性反射偏离线性反射仍甚小，透射波和反射波的色散展宽需要较长的时间才可表现出来，边界使反射波峰前半部分和透射波峰的后半部分增强，而使反射波峰的后半部分和透射波峰前半部分减弱，比较上节边界条件无 ΔQ 项情况下的差值波形，不难发现边界条件高阶项对孤波反射所产生的影响。反射波和透射波在离开界面的短距离内，在亚皮秒情况下，都保持在 sech(·)波形的附近。由于线性反射系数$|r_l|^2<1$，因此，反射波和低透射率的透射波(色散大于非线性)将最终在长距离传输中因色散展宽而消失。然而，在一定条件下，非线性可能强于色散，这时反射波或透射波可以继续传输，由分析无量纲化之后的式(11.22)和式(11.51)可知，对于反射波，这个条件是:

$$\left[\sqrt{\varepsilon_N}-\sqrt{\bar{\varepsilon}_N}+\frac{2\sqrt{\varepsilon_N}\,\Delta Q}{Q}\right]^2\geqslant(\sqrt{\varepsilon_N}+\sqrt{\bar{\varepsilon}_N})^2$$

这意味着$\|\frac{\partial}{\partial x}\|\sim k_0$,即慢变波包近似失效。因此,在慢变波包近似适应的情况下，反射波一般是色散大于非线性的情况。但对于透射波,这个条件是$\left[\frac{1}{1+\sigma_1}\cdot\frac{1+\Delta_1}{1+\Delta_2}\right]t_N^2\geqslant 1$,可用线性透射系数$t_1$代替非线性情况下的透射系数$t_N$进行估计。在$D$保持不变的情况下，应是$(1+\Delta_1)^4/(1+\Delta_1/2)^2\geqslant(1+\Delta_2)$。在$\Delta_2=0$，只需$\Delta_1\geqslant 0$。前面不等式中取等号代表了孤波遇到界面后能继续不形变传输的条件。

11.2.5　小结

本节讨论了上节建立的决定光孤子在小突变界面的反射、透射支配方程并建立了亚皮秒孤子情况下的边界条件，给出了不同的亚皮秒孤子的界面反射、透射特性的数值模拟，讨论了孤子遇到界面后能继续无形变输的条件。由于，较严格地考虑这个问题将是一个非常复杂的问题，于是本章在$\overline{n_1^2}\,\overline{\Delta}\approx n_1^2\Delta$的前提下，对此问题进行了初步研究，抽象出这一模型。这一方面可使我们对皮秒孤子及亚皮秒孤子反射问题的主要特征有一个初步的认识，同时又为较严格地处理这一问题（即考虑界面附近的高次辐射模）建立了的必要基础，对于这一问题还需作深入研究。

11.3　光孤子的等价粒子理论

11.3.1　引言

对光孤子的研究，几乎都是从波的角度进行的，从粒子角度研究甚少。Aceves, Moloney 和 Newell[148, 152, 153]用等价粒子概念研究了自聚焦通道(空间孤子)在非线性界面的反射问题，A.M.Kosevich[154]研究了孤子被杂质散射时的粒子特性及波特性。本节首先给出空间孤子界面反射、透射的等价粒子理论，然后提出光孤子相互作用的等价粒子理论，从而使我们从粒子角度对孤子有了进一步的认识。这一方法也能给出与逆散射理论及其它解析结果相一致的结论。

11.3.2　光孤子粒子理论的一般描述

研究扰动非线性 schrodinger 方程(NSE)

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+2|u|^2u=\varepsilon\hat{U}(x,\ t)u\equiv\hat{V}(x,\ t)u\tag{11.53}$$

式中，$\hat{U}(x)$一般为一算子，例如它可代表 Raman 自泵效应、高阶色散等等。NSE 支持拓扑孤子和非拓扑孤子。在非拓扑孤子情况下，波函数当$|x|\to\infty$时趋于零（或同一确定值），或者说$x\to\pm\infty$时无相位变化，因此从场的角度看，光子总数（把场量子化后）为

$$N(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,\ t)u^*(x,\ t)\mathrm{d}x\tag{11.54}$$

它代表了电场总能量。但从粒子角度看，式(11.53)又是一个处于自身相关非线性势$(V-2|u|^2)$中的粒子，而且它代表了一粒子在t时刻出现在$-\infty< x< +\infty$的几率，式(11.53)中$\hat{V}(x)=0$时非扰动 NSE 所描述的粒子的质量是 1／2，因此孤子质量M与光子总数 N 的关系是

$$M=\frac{N}{2} \tag{11.55}$$

这时，$|u(x,\ t)|^2$ 是孤子作为粒子（不是光子）出现在 x 点的几率，则粒子所处位置是

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xu(x,\ t)u^*(x,\ t)\mathrm{d}x}{N} \tag{11.56}$$

式(11.53)的复共轭是

$$\mathrm{i}u_t^*-u_{xx}^*-2|u|^2u^*=-\hat{V}^*(x,\ t)u^* \tag{11.57}$$

对式(11.54)求导并利用式(11.53)及式(11.57)有

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*\right]\mathrm{d}x \tag{11.58}$$

如果算子满足

$$u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*=\mathrm{i}2Huu^* \tag{11.59}$$

且 H 是空间不变或慢变函数(相对$|u|^2$)，则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=2HN \tag{11.60}$$

因此，H 代表了某种损耗或增益，对式(11.56)求导并利用式(11.53)、式(11.57)、式(11.58)，可得粒子速度。

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{i}}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right]\mathrm{d}x-\bar{x}\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{i}}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*\right]\mathrm{d}x \tag{11.61}$$

于是粒子的动量是

$$Mv=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right]\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\bar{x}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u\right]\mathrm{d}x \tag{11.62}$$

在上面两式中，第二、三项相对第一项是小量，可以略去。由上式可得动量变化率

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}=&-\frac{1}{2}\bar{x}\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*\right]\mathrm{d}x\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\frac{\partial V^*}{\partial x}u^*+u^*\frac{\partial V}{\partial x}u\right]\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\left(\hat{V}^*\frac{\partial}{\partial x}\right)u^*+u^*\left(\hat{V}\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11.63}$$

粒子加速度与动量变化率有如下关系:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=\frac{2}{N}\frac{d(Mv)}{dt}-\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt} \tag{11.64}$$

可写成

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=-\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}}-\frac{2}{N}\frac{dN}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt}-\frac{1}{N}\frac{d^2N}{dt^2}\bar{x}-\frac{i}{N}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*\right]dx \tag{11.65}$$

式中:

$$\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}}=\frac{2}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\frac{\partial\hat{V}^*}{\partial x}u^*+u^*\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}u\right]dx+\frac{2}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\left(\hat{V}^*\frac{\partial}{\partial x}\right)u^*+u^*\left(\hat{V}\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right]dx \tag{11.66}$$

式 (11.63)、式 (11.65)、式 (11.66) 的部分项中含有二次 $\hat{V}$ 的部分可以忽略，如式 (11.65) 右边第二项和第三项等。如果式 (11.63) 满足，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt}&=\frac{i}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx\\ Mv&=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx\end{aligned}\right\} \tag{11.67}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(Mv)}{dt}&=-\frac{N}{2}\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}}\\ \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}&=-\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}}-\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{11.68}$$

当 $\hat{V}(x, t)$ 是非作用于 $u(x, t)$ 的函数，且式 (11.59) 满足

$$H=I_m(V)$$

这时

$$u\frac{\partial\hat{V}^*}{\partial x}u^*+u^*\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}u=2R_e\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)|u|^2 \tag{11.69}$$

粒子(即孤子)总能量

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2-|u|^4+F[u,\ \hat{V}u]\right)dx \tag{11.70}$$

式中，$F[u,\ \hat{V}u]$ 是一泛函（相对前两项是小量，可以忽略），由 $u(x, t)$ 和 $\hat{V}u(x, t)$ 决定并满足

$$\delta F[u,\ \hat{V}u]=\hat{V}u\delta u^*+\hat{V}u^*\delta u \tag{11.71}$$

这里已假定上式右边是可积或求近似可积的，如 $\hat{V}(x, t)$ 是一个不依赖 $u(x, t)$ 的实函

数，则

$$F[u,\ \hat{V}u]=V(x,\ t)|u|^2 \tag{11.72}$$

在两孤子相互作用分析中，$\hat{V}$ 是近似可积的，由后面 $\hat{V}_1$，$\hat{V}_2$ 给出，这时，

$$F[u_i,\ \hat{V}u_i]=2|u_i|^2(u_iu_j^*+u_ju_i^*) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ i\neq j) \tag{11.73}$$

以上各式给出了孤子各种粒子特性。作为例子，考虑有耗系统，这时，取 $\hat{V}=-\mathrm{i}\Gamma$，即 $H=-\Gamma$，于是式 (11.60) 给出

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-2\Gamma t}$$

式(11.66)、式(11.68)给出:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t}=v=\text{恒量}$$

$$Mv=M_0v_0\mathrm{e}^{-2\Gamma t}$$

即孤子的动量与光子总数随时间呈指数衰减，而孤子速度却不受损耗的影响。对于三阶色散，$\hat{V}=\mathrm{i}\beta\partial^3/\partial x^3$，代入式 (11.58)、式 (11.63) 和式 (11.65) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}=0$$

即在准确到 $O(\beta)$ 的情况下，三阶色散不改变光子总数 (孤子质量)，也不改变孤子的速度和动量，即这三种参量所受到的影响都在 $O(\beta^2)$ 量级。

11.3.3 光孤子相互作用的等价粒子分析

按照 Anderson 等的方法 [148]，把 N 一孤子近似成 N 个充分远离的单孤子解的叠加，即

$$u(x,\ t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(x,\ t) \tag{11.74}$$

上式代入光孤子的 NLSE，即非扰动 NLSE，并按文献〔148〕中的方式分离有:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial^2u_i}{\partial x^2}+2|u_i|^2u_i=\varepsilon\hat{U}_iu_i=\hat{V}_iu_i\\&-\hat{V}_i=2\sum_{j\neq i}^{N}u_j^*u_i+4\sum_{j\neq i}^{N}u_ju_i^*\end{aligned}\right\} \tag{11.75}$$

$$u_i(x,\ t)=a_i(t)\,\mathrm{sech}[a_i(t)(x-x_0(t))]\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}b_i(t)(x-x_0(t))+\mathrm{i}\delta_i(t)} \tag{11.76}$$

为简单计，本文只考虑二孤子的相互作用，并假定孤子幅值相等。把 x 坐标移到两孤子的质心，并把式 (11.76) 中的指数简单地表示为 $\mathrm{i}\theta_k(x,\ t)$，则有:

$$\left.\begin{aligned}&u_1(x,\ t)=\eta_0(t)\mathrm{sech}\,[\eta_0(t)(x-a(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(x,\ t)}\\&u_2(x,\ t)=\eta_0(t)\mathrm{sech}\,[\eta_0(t)(x+a(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2(x,\ t)}\end{aligned}\right\} \tag{11.77}$$

将上式代入式 (11.68) 及式 (11.75)，并注意到指数缓慢变化，或者说认为 $\theta_k(x,\ t)$

和 $\varphi(x,\ t)=\theta_2-\theta_1$ 随 x 的变化的特征长度远大于波包的宽度，这时 $\theta_k(x,\ t)$ 可从积分号中提出，而且含 $\partial\theta_k/\partial x$ 的项可以忽略。考虑初相差近似为 $\varphi(x,\ 0)\approx\varphi(0,\ 0)\approx 0$ 或 π 的情况，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}_1}{\mathrm{d}t^2}\approx\frac{6\times 16\times 2}{N_1}\eta_0^4\cos\varphi\mathrm{e}^{-2\eta_0 a}\left[C+\frac{1}{2}D+\frac{1}{3}E-A\ln\alpha\right] \tag{11.78}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}&A=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-\alpha)^4}\qquad C=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-\alpha)^3}\\&D=\frac{1-3\alpha}{(1-\alpha)^2}\qquad E=-\frac{2}{1-\alpha}\\&\alpha=\mathrm{e}^{-4\eta_0 a}\end{aligned}\right\}$$

$$N_1=N_2\approx\frac{N}{2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u_1+u_2\right|^2\mathrm{d}x\approx\frac{2\eta_0+16\eta_0^2\cos\varphi\cdot a\mathrm{e}^{-2\eta_0 a}}{1-\mathrm{e}^{-2\eta_0 a}} \tag{11.79}$$

$$\bar{x}_1=\frac{1}{N_1}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_1u_1^*\,\mathrm{d}x=a(t) \tag{11.80}$$

因此，式(11.78)给出了双孤子相互作用牛顿方程。式(11.78)右端代表双孤子间的相互作用力随相对间距$2a(t)$的依赖关系。当 $2a$ 较大时，$\eta_0(t)\approx\eta_\infty=N/4$，这里可取$\eta_0(t)\approx 1$，这时$N_1\to 2\eta_0$，$E\to-2$，$A\to 0$，$B\to 0$，$C\to 0$，$D\to 1$，$A\ln\alpha\to 0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2a(t)}{\mathrm{d}t^2}=-16\eta_0^3\cos\varphi\cdot\mathrm{e}^{-2\eta_0 a} \tag{11.81}$$

由于式(11.77)中孤子 3dB 宽度为$2x_D=1.76/\eta_0$，当$2a=1.2/\eta_0=0.65(2x_D)$时 $\alpha=0.1$。因此，孤子间距即使减小到 0.65 孤子宽度，$\alpha\to 0$ 的近似对 A，B，C 和 D 只引起大约 10%～20%的误差，因而式(11.81)能在较大范围内适用。当 $a\to 0$ 时，$\eta_0(t)$及$\varphi(x,\ t)$将有较大的变化，式(11.77)不再适应对 NLSE 的解的描写。

对于初相差$\varphi(x,\ 0)=0$ 的同相孤子对，式(11.81)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}=-16\eta_0^3\mathrm{e}^{-2\eta_0 a} \tag{11.82}$$

令 $a'(t)=p(a)$，$a''(t)=p\cdot p'(a)$ 代入上式可解出

$$a(t)-a(0)=\frac{1}{\eta_0}\ln\left|\cos(4\eta_0^2\mathrm{e}^{-\eta_0 a(0)}t)\right| \tag{11.83}$$

这代表了同相孤子相互作用的周期性合并，周期是

$$T=\frac{\pi}{4\eta_0^2}\mathrm{e}^{\eta_0 a(0)} \tag{11.84}$$

从 $t=0$(相距 $a(0)$) 到 $a(t)=0$ 所需时间

$$\tau=\frac{1}{4\eta_0^2}\mathrm{e}^{\eta_0 a(0)}\arccos\left(\mathrm{e}^{-\eta_0 a(0)}\right) \tag{11.85}$$

这个时间主要花费在 $2a$ 较大的漫长距离上。而在 $2a(t)$ 较小的路程上，由于孤子运动极快，所用时间极短，对式 (11.85) 的贡献极小。

对于初差相 $\varphi(x,\ 0)=\pi$ 的反相孤子对，式 (11.81) 是

$$\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2}=16\eta_0^3\mathrm{e}^{-2\eta_0 a} \tag{11.86}$$

可解出$a(t)$的演化规律

$$a(t)-a(0)=\frac{1}{\eta_0}\ln\left[\cosh\left(4\eta_0^2\mathrm{e}^{-\eta_0 a(0)}t\right)\right] \tag{11.87}$$

上式代表了反相孤子对的一致远离地排斥。如果对时间作变换$t\to t/2$，则$\partial^2/\partial t^2\to 4\partial^2/\partial t^2$，于是式(11.53)在$\hat{V}=0$时就与文献〔148〕及〔99〕中的 NLSE 完全一样了。这时式(11.81)也与文献〔99〕中的式(12)完全一致。而且，如果作代换$\eta_0(t)\to 2V(t)$，则式(11.83)和式(11.87)就变成文献〔148〕中的式(15)和式(18)。也就是说，本节基于等价粒子理论所给出的结论与文献〔148〕中基于微扰变分法和文献〔99〕中基于逆散射方法的结论完全一致。

11.3.4 自聚焦空间孤子界面反射方程及其分析

图 11–9 所示的是两种非线性电介质的界面波反射示意图。波从左方($x<0$)向界面($x=0$)入射，入射角 ψ_j 很小，以使 $k_x\ll k_z$，这个模型可看作平面波导的一个界面反射(为简单计，这里不考滤波导的双界面反射问题)，左右双方非线性介电常数分别为 $n_0^2+\alpha_0|E|^2$ 和 $n_1^2+\alpha_1|E|^2$。下面也只讨论 TE 非线性波。于是，在 x–z 平面，Maxwell 方程可用标量方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=-n^2k_0^2E \tag{11.88}$$

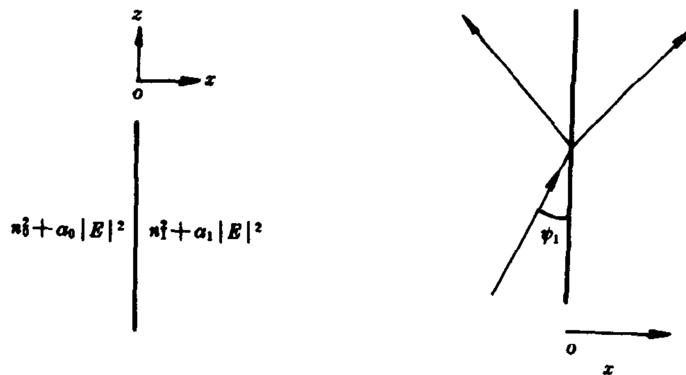


图 11–9 平面波界面反射示意图

(ψ_j 为入射角，且 $0<\alpha_0\leqslant\alpha_1$，$n_0>n_1$)

表示。式中，k_0 是真空波数。众所周知，上式支持平面波解，且波矢量满足 $k_x^2+k_y^2=n^2k_0^2$，但当 n^2 为非线性情况下，且只考虑 $k_x \ll k_z$ 这一情况，并设

$$E(x,\ z)=F(x,\ z)e^{i\beta k_0 z} \tag{11.89}$$

代入式(11.87)，有

$$i2\beta k_0\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-(\beta^2-n^2)k_0^2F=0 \tag{11.90}$$

作变换 $x\to k_0x$，$z\to k_0z$，便有

$$i2\beta\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-(\beta^2-n^2)F=0 \tag{11.91}$$

对于 $F(x,\ z)$的求解，应满足使 $\boldsymbol{E}$及 $\boldsymbol{H}$的切向分量连续的条件。对于束缚解，还应满足 $F_x\to 0$（当 $x\to\pm\infty$时）。

(1) 线性近似

上面方程式(11.91)的线性近似解是:

$$\left.\begin{aligned} F_L&=e^{i(k_x x+k_z z)}+R(k_x)e^{i(-k_x x+k_z z/2\beta)} && (x<0)\\ F_R&=T(k_x)e^{i(k_x' x+k_z' z/2\beta)} && (x>0)\end{aligned}\right\} \tag{11.92}$$

式中，$k_z=-k_x^2-(\beta^2-n_0^2)$，$k'_z=-k'^2_x-(\beta^2-n_1^2)$，由于 $k_z=k'_z$(由连续条件)，因此，$k'^2_x=k_x^2-(n_0^2-n_1^2)$，此即 Snell 定律。由 F和$\partial F/\partial x$的连续性，可确定:

$$\left.\begin{aligned} R(k_x)&=\frac{\bar{k}_x-(k_x^2-1)^{1/2}}{\bar{k}_x+(k_x^2-1)^{1/2}}\\ T(k_x)&=\frac{2\bar{k}_x}{\bar{k}_x+(\bar{k}_x^2-1)^{1/2}}\end{aligned}\right\} \tag{11.93}$$

式中，$\bar{k}_x=k_x/\sqrt{\Delta}$，$\Delta=n_0^2-n_1^2>0$。对于波包反射和透射，可将式(11.92)乘上入射波包的 Fourier 变换的系数 $A(k_x)$后，再对 dk_x 积分即可。

(2) 表面非线性驻波

对于驻波情况，波包不随 z 变化，这对$\partial/\partial z=0$，于是式(11.91)变成

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2}-[\beta^2-n^2(x,\ |F|^2)]=0 \tag{11.94}$$

于是有解:

$$F\pm(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{2(\beta^2-n_0^2)}{\alpha_0}\right]^{1/2}\text{sech}\,[(\beta^2-n_0^2)^{1/2}(x\mp x_0)] & (x<0)\\ \left[\dfrac{2(\beta^2-n_0^2)}{\alpha_1}\right]^{1/2}\text{sech}\,[(\beta^2-n_1^2)^{1/2}(x\mp x_1)] & (x>0)\end{cases} \tag{11.95}$$

$F^+(x)$ 和 $F^-(x)$ 分别代表了处于界面右边及左边的驻孤波。其中，x_1，x_0，β 应由 TE 波的

F及$\partial F/\partial x$在界面连续条件确定，结果是:

$$x_0=\frac{1}{2(\beta^2-n_0^2)^{1/2}}\ln\frac{1+r(1-\mu^2)^{1/2}}{1-r(1-\mu^2)^{1/2}} \tag{11.96}$$

$$x_1=\frac{1}{2(\beta^2-n_0^2)^{1/2}}\ln\frac{1+(1-\mu^2)^{1/2}}{1-(1-\mu^2)^{1/2}} \tag{11.97}$$

$$\mu=\frac{(n_0^2-n_1^2)}{(1-\alpha)(\beta^2-n_1^2)}$$

$$r=\left[\frac{\beta^2-n_1^2}{\beta^2-n_0^2}\right]^{1/2} \tag{11.98}$$

并要求$\mu<1$，以保证是实解。$\mu^2<1$意味着对β作了限制

$$\beta^2>\beta_{\min}^2=n_1^2+\frac{\Delta}{1-\alpha}>n_0^2 \tag{11.99}$$

式中，$\alpha=\alpha_0/\alpha_1$。

图 11－10 中给出了$F^{\pm}(x)$的剖面曲线。

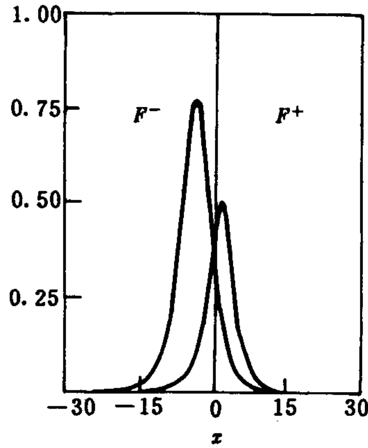


图 11－10 $F^{\pm}(x)$的剖面曲线

($\alpha_0=0.5$, $\alpha_1=2.0(\alpha=0.25)$, $n_0^2=0.11$, $n_1=0.01$, $\beta=0.7$)

11.3.5 自聚焦空间孤子界面反射等价粒子理论

1. *左方介质中的等价粒子分析*

假设波随z演化，以致其波峰始终能保持在界面左边，令

$$F(x,\ z)=\left(\frac{2}{\alpha_0}\right)^{1/2}A(x,\ \tau)e^{i(\beta^2-n_0^2)z/(2\beta)} \tag{11.100}$$

式中，$\tau=z/2\beta$，且$A(x,\ t)$满足:

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial \tau}+\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+2|A|^2 A=\hat{v}A \tag{11.101}$$

$$\hat{V}=V=\begin{cases}0 & x<0\\ \Delta-2[\alpha^{-1}-1]|A|^2 & x>0\end{cases} \tag{11.102}$$

式中，$\Delta=n_0^2-n_1^2$，如果设 $A(x,\ \tau)=2\eta_0\mathrm{sech}[2\eta_0(x-\bar{x})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(vx/2+2\sigma)}$ 且 $\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\tau=v$，$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\tau=-v^2/8+2\eta_0^2$，把上式代入式(11.68)之前，先由式(11.66)计算

$$\begin{aligned}U_L(\bar{x})&=M^{-1}\int^{\bar{x}}f(|A(s)|^2)\mathrm{d}s\\&=\Delta\left(1-\frac{1}{\alpha S_0}\right)\tanh(2\eta_0\bar{x})+\frac{\Delta}{3\alpha S_0}\tanh^3(2\eta_0\bar{x})\end{aligned} \tag{11.103}$$

式中，$f(|A|^2)=\Delta|A|^2+(1-\alpha^{-1})|A|^4$ 是粒子所受的力，$S_0=1/[4(\eta_0/\sqrt{\Delta})^2(1-\alpha)]$，而粒子质量是

$$M=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}A(x,\ \tau)A^*(x,\ \tau)\mathrm{d}x \tag{11.104}$$

于是式(11.68)可写成

$$M\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}}{\mathrm{d}\tau^2}=-f(|A|^2) \tag{11.105}$$

由式(11.103)可得

$$\frac{\mathrm{d}U_L}{\mathrm{d}\bar{x}}=2\eta_0\Delta\mathrm{sech}^2(2\eta_0\bar{x})[1-\alpha s_0^{-1}\mathrm{sech}^2(2\eta_0\bar{x})] \tag{11.106}$$

由此得势的临界点：$\mathrm{d}U_L/\mathrm{d}\bar{x}=0$ 存在的条件是 $\alpha S_0<1$，并且始终是一个最大值。当 $\alpha S_0\geqslant 1$ 时，U_L 是 $\bar{x}$ 的增函数。由 Newton 第二定律式(11.105)可解出

$$v^2(\bar{x})-v^2(\bar{x}_0)=2[U_L(\bar{x}_0)-U_L(\bar{x})] \tag{11.107}$$

上式即能量守恒定律，即总能量$v^2(\bar{x})/2+U_L(\bar{x})$守恒(第一项为动能，第二项为势能)。图 11-11 中给出了 $\alpha S_0<1$ 和 $\alpha S_0\geqslant 1$两种情况下的$U_L(\bar{x})$曲线。由图可知，当 $\alpha S_0\geqslant 1$ 时，虽然$U_L(\bar{x})$是增函数，但由于总有$U_L(\bar{x})<0$，故任何 $v\neq 0$ 的孤子都将穿过界面(透射)，也就是说，在左边区域不存在稳态解。当 $\alpha S_0<1$ 时，$U_L(\bar{x})$在左边有一个极大值，故若 $v^2(\bar{x}_0)/2+U_L(\bar{x}_0)>\max(U_L)$，则波仍将穿过界面；当不等式反过来时，在波峰还未到达界面时，波将被反射回去，但是，由于极大值的存在（即受力为零的点存在），故孤子在这一点是不稳定的（在两边受到的力不是恢复力，即不是指向这一点，而是恰好相反)，这对应于中心存在于左边区域的不稳定的稳态孤子解，并与前面的严格解 $F^-(x)$对应。关于孤子的速度，它对应于入射角 ψ_i，且 $v_r=v_i\propto k_x^{(i)}\propto\sin\psi_i$，当 $\psi_i=\pi/2$ 时，代表垂直入射，这时，本节分析失效（本节只适应 $\psi_i\ll 1$ 的掠射情形)，$\psi_i\to 0$ 时，$v_i\to 0$。同理，在右方介质中，$v_t\propto k_x^{(t)}\propto\sin\psi_t$。

2. 右方介质中的等价粒子分析

在右方介质中，可令

$$F(x,\ z)=\left(\frac{2}{\alpha_1}\right)^{1/2}A(x,\ \tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta^2-n_1^2)z/(2\beta)} \tag{11.108}$$

于是仍可得到式(11.101)，这时式(11.102)应由下式取代：

$$\hat{V}=V=\begin{cases}-\Delta-2(\alpha^{-1}-1)|A|^2 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases} \tag{11.109}$$

可得

$$U_R(\bar{x})=\Delta(1-S_1^{-1})\tanh(2\eta_1\bar{x})+\frac{\Delta}{3S_1}\tanh^3(2\eta_1\bar{x}) \tag{11.110}$$

这里已设

$$A(x,\ \tau)=2\eta_1\operatorname{sech}[2\eta_1(x-\bar{x})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(vx/2+2\sigma)}$$

并有$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\tau=-v^2/8+2\eta_1^2$，$S_1=1/[4(\eta_1/\sqrt{\Delta})^2(1-\alpha)]$。

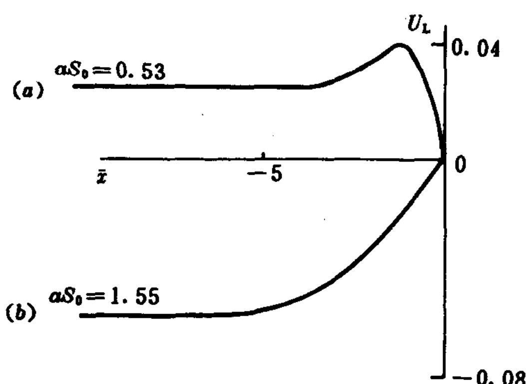


图 11－11　$U_L(\bar{x})$随$\bar{x}$变化的曲线

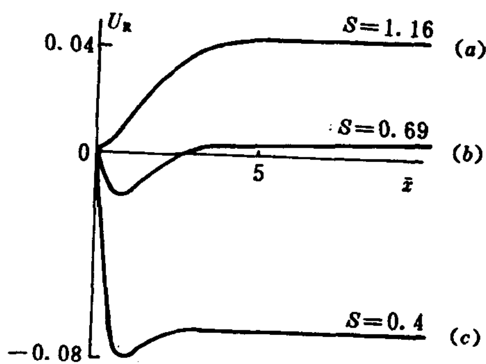


图 11－12　$U_R(\bar{x})$随$\bar{x}$变化的曲线

图 11-12 给出了三种典型的$U_R(\bar{x})$曲线。当 $S_1>1$ 时，$U_R(\bar{x})$是$\bar{x}$的增函数，且$U_R(\bar{x})>0$，这时从左方传来的孤子，如果$v^2(\bar{x}_0)/2+U_L(\bar{x}_0)<\max\{U_R(\bar{x})\}=U_R(+\infty)$，则波穿过界面后，仍会返回到左方介质。如果上面的不等式反向，则波将透射，且$v^2(+\infty)/2+U_R(+\infty)=v^2(\bar{x}_0)/2+U_L(\bar{x}_0)$，这时$v(+\infty)=v^2(\bar{x}_0)/2+U_L(\bar{x}_0)-U_R(+\infty)<v^2(\bar{x}_0)/2$，即透射角 ψ_t 小于入射角 ψ_i。当 $S_1<1$ 时，$U_R(\bar{x})$有一个极小值，在这一点，孤子所受力为零，且在这点两边时，所受力即一种恢复力，即都指向这一点，故在这一点存在稳定的稳态孤子解，对应于前面 $F^+(x)$ 严格解，这个解被约束在这个极小值点附近，并作周期振荡。以上是基于孤子脉冲入射的假设而得出的，在实际中，脉冲往往不是孤子[sech(・)]脉冲，这时的结果应与以上结果有区别，也就是对势的表达式会产生一定的影响。

11.3.6 小结

本节给出了含一般扰动项(算子形式)的 NSE 的等价粒子理论，一方面使我们对动力学孤子(非拓扑孤子)的粒子性质有了更深入的了解，而且，作为一种微扰方法，还可用于研究相当广泛的一类问题。利用这一理论，本节一方面研究了空间孤子的界面反射，同时还从等价粒子角度研究了同相反相光孤子对的相互作用问题，得到了与 Gordon 等基于逆散射理论的结论及 Anderson 等基于微扰变分法的分析完全一致的结论。本章方法显然容易用于三孤子及多孤子序列的相互作用问题，为这类问题提供了解析分析途径，因为到目前为止，这一类问题的分析只能借助数值模拟。这一方法使物理图像更加直观，也易于被实验工作者所接受，因为他们只需要在牛顿力学框架下进行分析。本节的分析业已表明，等价粒子理论，作为一种微扰法，能得到与逆散射微扰法及变分微扰法相同的结论；但更重要的是，在某些问题中，使用后两种方法显得非常不方便，这时等价粒子理论就能显示出其优越性。例如，对于绝热近似失效的情况，这时使用逆散射微扰就不方便了，对于方程微扰部分做不到可积甚至近似可积，这时，微扰 NLS 方程的 Lagrange 无法构造，因此，也就无法使用变分微扰法，但是对这两种情况，等价粒子方法都能有效而且方便地使用。

第 12 章

耦合 NLS 方程与光孤子耦合

12.1 耦合 NLS 方程及其物理背景

12.1.1 引言

耦合非线性 NLS 方程

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}u_t + \mathrm{i}\delta u_x + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a|u|^2 u + b|v|^2 u + c_1 u + dv^2 u^* = \mathrm{i}\gamma u + R_1(u,\ v) \\ &\mathrm{i}v_t - \mathrm{i}\delta v_x + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a|v|^2 v + b|u|^2 v + c_2 v + du^2 v^* = \mathrm{i}\gamma v + R_2(u,\ v) \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

可以描述相当广泛的一类物理问题。例如，双折射无耗光纤中线性极化准单色波包的演化方程是[155]：

$$\delta = 0 \quad \sigma = 1 \quad a = 1 \quad c_1 = c_2 = 0 \quad \gamma = 0 \quad R_1 = R_2 = 0$$

的情况，Muraki 和 Kath[156] 分析了这个系统的 Hamilton 动力学问题。Malomed 在他的两篇文献[157, 158] 中分别取:

$$\delta = c \quad a = 2 \quad b = 2\mu \quad c_1 = c_2 = 0 \quad d = 2(1-\mu) \quad \gamma = 0 \quad R_1 = R_2 = 0$$

和

$$\delta = c \quad a = 2 \quad b = 2(1+\beta) \quad c_1 = -c_2 = -\omega \quad d = 2\beta' \quad \gamma = 0 \quad R_1 = R_2 = 0$$

对这个系统分别进行了孤子相互作用和 Lagrangian 变分分析。这样的参数选取来源于 Menyuk 及其合作者[159~164]。Kivshar 选取

$$\sigma = 1 \quad a = 1 \quad b = 2/3 \quad c_1 = c_2 = 0 \quad d = 0 \quad R_1 = R_2 = 0 \quad \gamma \neq 0$$

对有耗系统进行了 Lagranian 变分分析。在文献〔163〕中讨论了利用双折射作为光纤中孤子的相干开关的机理，其中耦合方程中的参数选取如下:

$$\sigma = 1 \quad a = 1 \quad c_1 = c_2 = d = 0 \quad \gamma = 0 \quad R_1 = R_2 = 0$$

可见，耦合方程式(12.1)具有广泛的物理背景，对其进行理论分析有着重要的意义。这个方程，既包括了自相位调制(SPM)，又包含了交叉相位调制(XPM)。前面我们已经看

到，同相位调制是形成孤子的先决条件，而交叉相位调制则引起不同模式(包括极化)或不同信道之间的耦合。当两束或更多束光波同时在光纤中传输时，它们将通过光纤中的非线性发生相互作用。通常，这样的互作用在适当的条件下通过不同的非线性现象会产生新的波，如受激喇曼散射和受激布里渊散射、谐波产生以及四波混频，但是，相同的非线性通过上述交叉相位调制现象也可在入射波之间产生耦合。交叉相位调制的产生是因为一光波的有效折射率不仅与此波的强度有关，而且与另外一些同时传输波的强度有关，所以交叉相位调制总伴有自相位调制产生。下面先简要地将单束光脉冲传输理论扩展到两束光脉冲在单模光纤中传输的情形，在此过程中我们将阐明交叉相位调制的起因。一般两个光场不仅波长可能不同，偏形态也可能不同，而且由光学上的非线性双折射，每个场的偏振态在传输过程中也可能发生改变。实际上，早在 1964 年已观察到这种自感应偏振效应[183,184]，并且从此得到广泛的研究，特别是光 Kerr 效应[16, 185~192]。在这一节中，将两种情形分开考虑。首先，考虑两束不同波长的光场沿保偏光纤的一个主轴方向线偏振，并且在传输过程中保持偏振态不变的情况；然后，考虑在包括了固有模式双折射和非线性双折射之后，相同光波偏振分量之间交叉相位调制耦合情况。

12.1.2 双信道间的耦合

在波分复用中，需要多种波长(或频率)的光脉冲同时在光纤中传输。下面考虑光场沿保偏光纤的一个主轴方向线偏振并保持偏振态不变的情况。在准单色近似情况下，$\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$，$\Delta W$ 为谱宽，ω_0 为中心频率，一般 $\omega_0 \sim 10^{15}$rad／s，因而对脉宽≥0.1 ps($\Delta\omega \leqslant 10^{13}$ rad／s)的脉冲是适用的。这时

$$\boldsymbol{E}(x,\ t)=\frac{1}{2}\hat{x}[E_1\exp(-\mathrm{i}\omega_1 t)+E_2\exp(-\mathrm{i}\omega_2 t)]+\mathrm{c.c.}^{①} \tag{12.2}$$

式中，$\hat{x}$是偏振方向的单位矢量，ω_1 和 ω_2 是两脉冲的中心频率，并且假设对应的振幅 E_1 和 E_2 是相对时间量 $\omega_j^{-1}(j=1$ 或 $2)$的慢变化函数。这种假设与 $\Delta\omega_j \ll \omega_j$ 的假设是等价的，$\Delta\omega_j$ 是谱宽，此假设对脉宽＞0.1 ps 成立，慢变振幅 E_1 和 E_2 的变化由波方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}_L}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2} \tag{12.3}$$

描述。式中:

$$\boldsymbol{P}_L(\boldsymbol{r},\ t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\chi}^{(1)}(t-t')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t')\mathrm{d}t' \tag{12.4}$$

$$\boldsymbol{P}_{NL}(\boldsymbol{r},\ t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\chi}^{(3)}(t-t_1,\ t-t_2,\ t-t_3)\vdots\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t_1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t_2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t_3)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3 \tag{12.5}$$

在准单包近似($\Delta\omega \ll \omega_0$)下，将式(12.2)代入式(12.4)得:

$$\boldsymbol{P}_L(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{2}\hat{x}[P_{L1}(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1}+P_{L2}(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2}+\mathrm{c.c.}] \tag{12.6}$$

---

①c.c.是在它前面复量的共轭复量。

$$P_{Lk}=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{xx}^{(1)}(t-t')E_k(\boldsymbol{r},\ t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k(t-t')}\mathrm{d}t'$$

$$=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)E_R(\boldsymbol{r},\ t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_k)t}\mathrm{d}\omega\ (k=1,\ 2) \tag{12.7}$$

代式(12.2)代入式(12.5)将给出

$$P_{NL}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{2}\hat{\chi}\{P_{NL}(\omega_1)\exp(-\mathrm{i}\omega_1 t)+P_{NL}(\omega_2)\exp(-\mathrm{i}\omega_2 t)$$

$$+P_{NL}(2\omega_1-\omega_2)\exp[-\mathrm{i}(2\omega_1-\omega_2)t]$$

$$+P_{NL}(2\omega_2-\omega_1)\exp[-\mathrm{i}(2\omega_2-\omega_1)t]\}+\mathrm{c.c.} \tag{12.7}$$

$$P_{NL}(\omega_1)=\chi_{\mathrm{eff}}(|E_1|^2+2|E_2|^2)E_1 \tag{12.8}$$

$$P_{NL}(\omega_2)=\chi_{\mathrm{eff}}(|E_2|^2+2|E_1|^2)E_2 \tag{12.9}$$

$$P_{NL}(2\omega_1-\omega_2)=\chi_{\mathrm{eff}}E_1^2E_2^* \tag{12.10}$$

$$P_{NL}(2\omega_2-\omega_1)=\chi_{\mathrm{eff}}E_2^2E_1^* \tag{12.11}$$

且有:

$$\chi_{\mathrm{eff}}=\frac{3\varepsilon_0}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}=2\varepsilon_0 nn_2$$

$$\bar{n}(\omega,\ |E|^2)=n(\omega)+n_2|E|^2 \tag{12.12}$$

$\chi_{xxxx}^{(3)}$与频率的明显关系没有给出。这里已把$\chi^{(3)}$的时间关系用δ函数给定了，即已假定非线性响应是瞬时作用，这相当于已忽略了色散。方程式(12.7)的非线性感应极化强度具有在新频率$2\omega_1\omega_2$和$2\omega_2\omega_1$下的振荡项，这些项产生四波混频现象。如果在实际中打算有效地建立新的频率分量，必须满足相位匹配条件，此条件在实际过程中一般不满足，除非作特殊的安排。在本节中假设相位匹配条件不满足，所以忽略四波混频项，剩下的两项对折射率产生非线性作用，这可通过将$P_{NL}(\omega_j)$写成下面形式看出

$$P_{NL}(\omega_j)=\varepsilon_0\varepsilon_j^{NL}E_j \qquad (j=1,\ 2) \tag{12.13}$$

将它与线性部分合在一起，则总的感应极化强度写成

$$P(\omega_j)=\varepsilon_0\varepsilon_jE_j \tag{12.14}$$

式中:

$$\varepsilon_j=\varepsilon_j^L+\varepsilon_j^{NL}=(n_j+\Delta n_j)^2 \tag{12.15}$$

n_j是折射率的线性部分，Δn_j是三阶非线性效应引起的折射率改变量。利用$\Delta n_j\ll n_j$，则折射率的非线性部分为

$$\Delta n_j\approx\frac{\varepsilon_j^{NL}}{2n_j}\approx n_2(|E_j|^2+2|E_{3-j}|^2) \tag{12.16}$$

式中，非线性折射率系数

$$n_2=\frac{3}{8n}\chi_{xxxx}^{(3)} \tag{12.17}$$

并且已假定$n_1\approx n_2$，参量n_2与方程式12.12中的n_2相同。

方程式(12.16)表明，一个光波的折射率不仅与这个波的强度有关，而且与另一共同传输波的强度有关。当光波在光纤中传输时，获得一个与强度有关的非线性相位

$$\varphi_j^{NL} = \frac{\omega_j z}{c}\Delta n_j = \frac{\omega_j z n_2}{c}[|E_j|^2 + 2|E_{2-j}|^2] \qquad (j=1,\ 2) \tag{12.18}$$

第一项与自相位调制相联系；第二项产生于共同传输的另一光波对这束光波的相位调制，它与交叉相位调制相联系；方程式(12.18)右边的因子 2 表示对相同的光强，交叉相位调制作用是自相位调制的两倍。其起因可追溯到方程式(12.5)中与非线性极化强度三部分之和有关的项数，定性地讲，两光频不同时的情形与频率简并时的情形相比项数加倍。假设非线性效应对光纤的模式影响不大，横向关系可以通过分离变量看出，把 $E_j(x,\ t)$写成

$$E_j(z,\ t) = F_j(x,\ y)A_j(z,\ t)\exp(\mathrm{i}\beta_{0j}z) \qquad (j=1,\ 2) \tag{12.19}$$

式中，$F_j(x,\ y)$是第 j 个场的模式分布，$A_j(z,\ t)$是慢变化振幅，β_{0j} 是中心频率为 ω_j 对应的传播常数，将每个与频率有关的传播常数 $\beta_j(\omega)$展开，并且仅保留到二次项，就可包含色散效应。对 $A_j(z,\ t)$所导出的传输方程是

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \beta_{3j}\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\beta_{2j}\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} + \frac{\alpha_j}{2}A_j = \frac{\mathrm{i}n_2\omega_j}{c}[f_{jj}|A_j|^2 + 2f_{jk}|A_k|^2] \qquad (j,\ k=1,\ 2,\quad k\neq j) \tag{12.20}$$

式中，$k\neq j$，$\beta_{1j}=1/v_{gj}$，v_{gj} 是群速度，β_{2j} 是群速色散系数，α_j 是损耗系数，交叠积分 f_{jk} 定义为

$$f_{jk} = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty}|F_j(x,\ y)|^2|F_k(x,\ y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left[\iint_{-\infty}^{+\infty}|F_j(x,\ y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\left[\iint_{-\infty}^{+\infty}|F_k(x,\ y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]} \qquad (j,\ k=1,\ 2) \tag{12.21}$$

在多模光纤中，两束光波可以以不同的光纤模式传输，交叠积分之间的差别可能很大。对单模光纤来说，因为模式分布 $F_j(x,\ y)$与频率有关，所以 f_{11}、f_{22}、f_{12} 一般也不相同，它们之间的差别很小，在实际情况中可以忽略。这时方程式(12.20)可以写成下面形式的两个耦合方程:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\beta_{21}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_1}{2}A_1 = \mathrm{i}\gamma_1[|A_1|^2 + 2|A_2|^2]A_1 \tag{12.22}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}}\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\beta_{22}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_2}{2}A_2 = \mathrm{i}\gamma_2[|A_2|^2 + 2|A_1|^2]A_2 \tag{12.23}$$

式中，非线性系数 γ_j 与单束光情况类似，即

$$\gamma_j = \frac{n_2\omega_j}{cA_{\mathrm{eff}}} \qquad (j=1,\ 2) \tag{12.24}$$

A_{eff} 是有效纤芯面积($A_{\mathrm{eff}}=1/f_{11}$)，并假设对两光波 A_{eff} 相同。在可见光范围典型的 $A_{\mathrm{eff}}=10\sim 20\ \mu\mathrm{m}^2$，相应的 γ_1 和 γ_2 的值在 $20\sim 30\ \mathrm{W^{-1}km^{-1}}$ 范围内，与频率 ω_1 和 ω_2 有关。一般情况下，两个脉冲不仅具有不同的群速色散系数，而且以不同的速度传输，因为它们的群速度不同。由于脉冲互相走离将限制交叉相位调制的互作用，所以群速度失配起

着很重要的作用。可用方程:

$$\left.\begin{aligned} L_w &= \frac{T_0}{|d_{12}|} \\ d_{12} &= \beta_1(\lambda_1) - \beta_1(\lambda_2) = v_g^{-1}(\lambda_1) - v_g^{-1}(\lambda_2) \end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

描述由于群速度失配导致两交叠脉冲互相分开时的光纤长度值，其中，T_0 为脉冲宽度。

12.1.3 两种极化分量之间的耦合

这里先简单推导两种不同极化分量之间的耦合。在下节中，将对双折射光纤中的耦合方程进行严格推导。一个椭圆偏振光波的电场可写成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}(\hat{x}E_x + \hat{y}E_y)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) + \text{c.c.} \tag{12.26}$$

式中，E_x 和 E_y 是中心频率为 ω_0 光波偏振分量的复振幅。和前面一样，将方程式(12.26)代入方程式(12.5)可得非线性极化强度 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}$，在各向同性介质中，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}$ 的一般形式可写成

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}(\hat{x}P_x + \hat{y}P_y)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) + \text{c.c.} \tag{12.27}$$

P_x 和 P_y 为[16]

$$P_i = \frac{3\varepsilon_0}{2}\sum_i [\chi^{(3)}_{xxyy}E_iE_jE_j^* + \chi^{(3)}_{xyxy}E_jE_iE_j^* + \chi^{(3)}_{xyyx}E_jE_jE_i^*] \tag{12.28}$$

式中，i, $j = x$ 或 y。$\chi^{(3)}$ 的三个独立分量与 $\chi^{(3)}_{xxxx}$ 的关系为

$$\chi^{(3)}_{xxxx} = \chi^{(3)}_{xxyy} + \chi^{(3)}_{xyxy} + \chi^{(3)}_{xyyx} \tag{12.29}$$

三个分量的相对大小与决定 $\chi^{(3)}$ 的物理机制有关。对石英光纤三个分量大小基本相同[186]。为简单起见假设它们相等，则由方程式(12.28)偏振分量 P_x 和 P_y 为

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}\{[|E_x|^2 + \frac{2}{3}|E_y|^2]E_x + \frac{1}{3}(E_x^*E_y)E_y\} \tag{12.30}$$

$$P_y = \frac{3\varepsilon_0}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}\{[|E_y|^2 + \frac{2}{3}|E_x|^2]E_y + \frac{1}{3}(E_y^*E_x)E_x\} \tag{12.31}$$

方程式(12.30)和式(12.31)中的最后一项与方程式(12.7)中的四波混频项类似，只是此时是在相同的频率下起作用，因为极化分量是简并的($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$)。它对偏振演变过程的重要性与正交偏振的光纤模式之间的相位匹配程度有关。这些正交偏振的光纤模式由方程式(12.21)定义的偏振拍长 L_{B} 描述。如果光纤长度 $L \gg L_{\mathrm{B}}$，像强双折射光纤情况，因为相位失配很大，方程式(12.30)和式(12.31)中最后一项的作用可忽略。另一方面，在弱双折射光纤中，如果 $L < L_{\mathrm{B}}$，则必须包括这一项。折射率的非线性变化 Δn_x、Δn_y 由方程式(12.30)中比例于 E_x 的项决定，用与方程式(12.14)和式(12.15)相似的关系式，可得:

$$\Delta n_x = n_2\left[\,|E_x|^2 + \frac{2}{3}|E_y|^2\,\right] \tag{12.32}$$

$$\Delta n_y = n_2\left[\,|E_y|^2 + \frac{2}{3}|E_x|^2\,\right] \tag{12.33}$$

式中，n_2 由方程式(12.17)定义。与方程式(12.16)比较可知，两种情况的形式相似。运用与方程式(12.18)类似的关系式可得到非线性相移，可以发现两个偏振分量之间的交叉相位调

制比两个不同频率波之间的小，因为它包含的因子是 2／3 而不是 2；但是定性行为仍然是相同的。特别是当入射脉冲是椭圆偏振时，交叉相位调制引起的场分量 E_x 和 E_y 之间的非线性耦合将产生非线性双折射，它使偏振态发生改变。因为它表现为偏振椭圆的一个旋转，所以这种现象被称为椭圆旋转[183]。由方程式(12.19)定义的慢变化振幅 A_x 和 A_y 满足下面两个耦合方程:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}+\beta_{1x}\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\beta_{2x}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}A_x = \mathrm{i}\gamma\left[|A_x|^2+\frac{2}{3}|A_y|^2\right]A_x+\frac{\mathrm{i}\gamma}{3}A_x^* A_y^2\exp(-2\mathrm{i}\Delta\beta z) \tag{12.34}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z}+\beta_{1y}\frac{\partial A_y}{\partial t}+\frac{\mathrm{i}}{2}\beta_{2y}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}A_y = \mathrm{i}\gamma\left[|A_y|^2+\frac{2}{3}|A_x|^2\right]A_y+\frac{\mathrm{i}\gamma}{3}A_y^* A_x^2\exp(2\mathrm{i}\Delta\beta z) \tag{12.35}$$

式中，$\Delta\beta=\beta_{1x}-\beta_{1y}$ 是由于光纤的线性双折射或模式产生的波矢量失配，应该注意同样的线性双折射也导致两偏振分量之间的群速度失配。除最后一项外，方程式(12.34)和式(12.35)与方程式(12.22)和式(12.23)相似。另一个值得注意的特征是由于两偏振分量的频率简并、所以两个偏振分量的非线性参量 γ 相同。

12.2　双折射光纤中光波耦合的严格理论

12.2.1　引　言

在 Kerr 介质中，非线性波的演化起源于 $\chi^{(3)}$响应，而 $\chi^{(2)}$响应几乎是零或可以忽略。例如，包含一定数量的 $LiNbo_3$ 和 GaAs 的波导及光纤属于这种情况。这里注意力将集中于一对正交极化本征模，它们在双折射可被忽略时是简并的。在单模光纤中，它们仅对应于那些可传播的模。它们通过 Kerr 效应非线性地相互耦合。耦合的性质及强度关键取决于双折射。在线性双折射中[61]，交叉耦合项只有自耦合项的 2／3 倍。还存在另一耦合项，它在低双折射情况下，导致椭圆旋转。

在圆双折射光纤中[193]，交叉耦合项是圆耦合项的 2 倍，这表明可能存在一个理想的椭圆度，它使自耦合与交叉耦合相等，这正是椭圆角 $\theta=35°$ 情况，这一点下面还会看到。

交叉耦合项可能在开关应用中起着重要作用，一个可能的方案(见图 12-1 中示意)已由 Lattes 等[194]和 LaGasse 等[195]提出。在该方案中，一个沿某一方向偏振的信号脉冲分成两个脉冲，并使每一分量各自进入 Mach-Zender 干涉仪的两个臂，在一个臂中引入另一偏振的开关脉冲(虚线)，于是，这个开关脉冲将使在同一臂中的信号(即下臂中的信号)脉冲产生附加相移。这样，当两信号脉冲在干涉仪出射端合并时，它们的相干是相消的，而不是加强的。

在光纤代用品(implementation)[195]中，两个干涉臂必须是时间相干的而不是空间相干的，而且是分离的，以避免两臂中参数变化的影响。两信号脉冲之一被时间延迟，两个

信号通过同一光纤，在两个信号脉冲合并之前，被延迟的脉冲得到加快。为了能方便超前和延迟其中一个信号脉冲，而不影响另一脉冲，他们应该是反向极化的。开关脉冲的极化应与它所要改变相位的信号脉冲的极化相反。

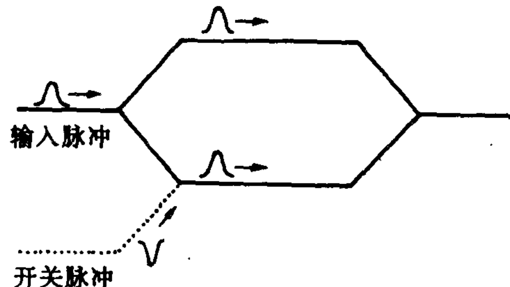


图 12-1 Kerr 开关方案示意图

另一些开关方案也被提出[196~200]，虽然它们具有优点，但也存在缺点，在刚才提到的方案中，潜在的缺点是：当开关脉冲通过信号脉冲时，开关脉冲不仅使信号脉冲产生相移，而且还给信号脉冲留下一个影子，这个影子是信号脉冲的一部分，但与开关脉冲有相同的极化，这个影子从属于信号脉冲，但不能从信号脉冲分离出来。影子已在数值研究中被发现[161]。

当介质是椭圆双折射介质以致可使交叉耦合项与自耦合项相等时[62]，影子不再出现。在这种情况下，Manakov[201]的研究表明，支配波演化的耦合 NLS 方程可用逆散射方法[202]求解，因此，存在孤子解。

当一种极化的孤子与另一种极化的任意形状脉冲相互作用时，它将经历一个均匀的相移并具有一定的空间位移，但极化及形状都不发生变化。因此，只要信号脉冲是孤子，开关脉冲的形状可以任意选择。

椭圆双折射介质是可以得到的，例如在控制过程中扭转一种适当掺杂的光纤[203~205]即可实现。

12.2.2 线性理论——色散分析

为简单计，下面从平面波近似(单色近似)出发导出耦合 NLS 方程。这里不考虑横向效应，在文献[24]中考虑过详细的几何结构，几何结构不影响方程的结构，只是对系数有一些影响而已。从 Maxwell 方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} \tag{12.36}$$

出发，其中 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 通过 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 \boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 相联系，$\boldsymbol{P}$ 是极化矢量，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 通过

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \overleftrightarrow{\chi}(t-t') \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t')\mathrm{d}t' \tag{12.37}$$

相联系。定义 Fourier 变换及逆变换:

$$\tilde{F}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{12.38}$$

$$F(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(\boldsymbol{r},\ \omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{12.39}$$

并定义

$$\tilde{\boldsymbol{F}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},\ \omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases} \tag{12.40}$$

和$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},\ \omega)-\tilde{\boldsymbol{F}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega)$，因而$F^{+}(\boldsymbol{r},\ t)$和$F^{-}(\boldsymbol{r},\ t)$通过式(12.39)得到定义。由于$F(\boldsymbol{r},\ t)=F^{+}(\boldsymbol{r},\ t)+F^{-}(\boldsymbol{r},\ t)$是实数，因此，$F^{+}$和$F^{-}$是独立的复数并互为共轭。下面假定，对 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 的贡献都来自载频 ω_0 和$-\omega_0$ 附近狭窄的频率区域。实$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)$意味着$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\ -\omega)=\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}(\boldsymbol{r},\ \omega)$。如果在 $\omega=\omega_0$ 附近不为零，则在 $\omega=-\omega_0$ 附近也不为零。因此，在通常的推导过程中，只在计算结束时，才在复数场再加上其复共轭。与这样的过程等价：只考虑在 $\omega=\omega_0$ 附近的正频率分量成分而不考虑负频率成分，它们在计算结束才加以考虑。式(12.37)是自关联形式，在频域可写成

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\varepsilon_0\tilde{\chi}^{+}(\omega)\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega) \tag{12.41}$$

$\tilde{\chi}^{+}$ 有两个正交本征矢量并满足:

$$\begin{aligned}&\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1^{*}=\hat{e}_2\cdot\hat{e}_2^{*}=1\\&\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2^{*}=0\end{aligned} \tag{12.42}$$

对 $\tilde{\chi}^{-}$ 也同样，重写:

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}=\tilde{\boldsymbol{E}}_1^{+}\hat{e}_1+\tilde{\boldsymbol{E}}_2^{+}\hat{e}_2\\&\tilde{\boldsymbol{P}}^{+}=\tilde{\boldsymbol{P}}_1^{+}\hat{e}_1+\tilde{\boldsymbol{P}}_2^{+}\hat{e}_2\end{aligned} \tag{12.43}$$

于是得到

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{P}}_1=\chi_1\tilde{\boldsymbol{E}}_1^{+}\\&\tilde{\boldsymbol{P}}_2^{+}=\chi_2\tilde{\boldsymbol{E}}_2^{+}\end{aligned}\right\} \tag{12.44}$$

式中，χ_1 和 χ_2 是与$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$相应的本征值。具体的 $\chi_1(\omega)$，$\chi_2(\omega)$，$\hat{e}_1(\omega)$和$\hat{e}_2(\omega)$等价于具体的 $\chi(\omega)$，与本征值相应的线性色散关系由下面方程给出:

$$\left.\begin{aligned}&k(\omega)=\frac{\omega}{c}[1+\tilde{\chi}_1(\omega)]^{1/2}\\&l(\omega)=\frac{\omega}{c}[1+\tilde{\chi}_2(\omega)]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{12.45}$$

式(12.41)和式(12.45)是一般成立的，它不依赖于 $E^{+}(\omega)$在 ω_0 邻域之外的区域为零的条件。但现在就要用这个条件，并令$\hat{e}_1(\omega)=\hat{e}_1(\omega_0)$和$\hat{e}_2(\omega)=\hat{e}_2(\omega_0)$，这等价于忽略线性模耦合，根据后一假设可得

$$P_1^{+}(\boldsymbol{r},\ t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{t}\chi_1(t-t')E_1^{+}(\boldsymbol{r},\ t')\mathrm{d}t' \tag{12.46a}$$

$$P_2^+(\boldsymbol{r},\ t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{t}\chi_2(t-t')E_2^+(\boldsymbol{r},\ t')\mathrm{d}t' \tag{12.46b}$$

重写后有:

$$P_1^+(\boldsymbol{r},\ t)=\rho(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{12.47}$$

$$E_1^+(\boldsymbol{r},\ t)=U(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{12.48}$$

式中，$k_0=k(\omega_0)$ 由色散关系式(12.45)决定，由于 P_1^+ 及 E_1^+ 的频谱集中在 $\omega=\omega_0$ 附近，因此 ρ，U 的频谱集中在 $\omega=0$ 附近。ρ，U 是慢变波包，随 ω_0 的快变部分已被去掉。于是有

$$\rho(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\chi}_1(\omega+\omega_0)\tilde{U}(\boldsymbol{r},\ \omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{12.49}$$

由于 $\tilde{U}$在$\omega=0$的邻域之外是零，把χ_1按Taylor展开

$$\tilde{\chi}_1(\omega+\omega_0)=\tilde{\chi}_1(\omega_0)+\tilde{\chi}'_1(\omega_0)\omega+\frac{1}{2}\tilde{\chi}''_1(\omega_0)\omega^2+\cdots \tag{12.50}$$

式中，$\tilde{\chi}_1^{(n)}(\omega_0)=\mathrm{d}^n\tilde{\chi}_1(\omega)/\mathrm{d}\omega^n(\omega=\omega_0)$，把式(11.50)代入式(12.49)，并作 Fourier 变换

$$\rho(\boldsymbol{r},\ t)=\tilde{\chi}_1 U(\boldsymbol{r},\ t)+\mathrm{i}\bar{\chi}'_1\frac{\partial U(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\tilde{\chi}''_1\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t^2}+\cdots \tag{12.51}$$

上式带撇量都是在 $\omega=\omega_0$ 处的取值，如果令

$$D_1^+(\boldsymbol{r},\ t)=\Delta(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{12.52}$$

则

$$\Delta(\boldsymbol{r},\ t)=\tilde{\varepsilon}_1 U(\boldsymbol{r},\ t)+\mathrm{i}\tilde{\varepsilon}'_1\frac{\partial U(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}''_1\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t^2}+\cdots \tag{12.53}$$

这里

$$\tilde{\varepsilon}_1(\omega)=\varepsilon_0[1+\tilde{\chi}_1(\omega)] \tag{12.54}$$

这样，已把 D_1^+ 用 E_1^+ 表示出来了。同样，可以把 D_2^+ 用 E_2^+ 表示出来，注意到 $D_1^-=D_1^{+*}$ 和 $D_2^-=D_2^{+*}$，因此，$\boldsymbol{D}$ 的线性部分完全被 $\boldsymbol{E}$ 所确定。

在式(12.45)中，给出了前向波的色散关系。由于 Maxwell 方程相对于 z 是二次的，因此还存在后向波，其色散关系是式(12.45)的反号。但是，这只是在前面特定假设下的结论，即假设了 E_1^+ 的频谱只集中在 $\omega=\omega_0$ 附近的邻域内，也就是波数分布在 $k=k_0$ 或 $k_0=-k_0$ 的邻域内。换一句话说，除了一些短暂的瞬间外，光脉冲总是存在着前向和后向波，但我们仍假设只有前向波也不失一般性。

现在化简 Maxwell 方程以便只保留 z 的一阶项，把 E_1^+ 及 D_1^+ 的表达式代入 Maxwell 方程，可得

$$-k_0^2U+\nabla_T^2U+2\mathrm{i}k_0\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\omega_0^2}{c^2}\varepsilon_r U+\mathrm{i}\left(\frac{\omega_0^2}{c^2}\varepsilon'_r+2\frac{\omega_0}{c^2}\varepsilon_r\right)\frac{\partial U}{\partial t}$$
$$-\left(\frac{\omega_0^2}{2c^2}\varepsilon''_r+2\frac{\omega_0}{c^2}\varepsilon'_r+\frac{1}{c^2}\varepsilon''_r\right)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \tag{12.55}$$

下面的目的是为了消去$\partial^2 U/\partial^2 z$项，由于 U 在时间及空间上都是缓慢变化的，因此有:

$$|k_0^2 U| \gg \left|k_0 \frac{\partial U}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right| \tag{12.56}$$

$$|\omega_0^2 U| \gg \left|\omega_0 \frac{\partial U}{\partial t}\right| \gg \left|\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right| \tag{12.57}$$

将式(12.55)以导数的阶数展开，最低阶给出

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_T^2 U + k_c^2 U = 0 \\ &k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\varepsilon_r - k_c^2 \end{aligned}\right\} \tag{12.58}$$

上式本质上确定了色散关系式(12.45)，下一阶量确定

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial z} + \mathrm{i}\left(\frac{\omega_0^2}{2k_0 c^2}\varepsilon'_r + \frac{\omega_0}{k_0 c^2}\varepsilon_r\right)\frac{\partial U}{\partial t} \equiv \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{i}k'\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{12.59}$$

式中，$k'=\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega$ 是在 $\omega=\omega_0$ 处的取值。在这一数量级，光脉冲的整体运动由 $v_g=1/k'$ 确定，由式(12.59)可得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (k')^2\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{12.60}$$

将式(12.60)代入式(12.55)

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial z} + \mathrm{i}k'\frac{\partial U}{\partial t} - \left[\frac{\omega_0^2}{4k_0 c^2}\varepsilon''_r + \frac{\omega_0}{k_0 c^2}\varepsilon''_r + \frac{1}{2k_0 c^2}\varepsilon_r - \frac{1}{2k_0}(k')^2\right]\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

即

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial z} + \mathrm{i}k'\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{2}k''\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{12.61}$$

同理，如果令

$$v(\boldsymbol{r},\ t) = E_2^+(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l_0 z - \mathrm{i}\omega_0 t} \tag{12.62}$$

式中，$l_0 = l(\omega_0)$，则有

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z} + \mathrm{i}l'\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}l''\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{12.63}$$

时间导数的系数恰好包含了色散关系的导数。这并不奇怪，这一点通过 Green 函数或 Fourier−Laplace 变换逼近就更明白了。E_1^+ 的 Waxwell 方程的 Fourier 变换给出

$$\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{E}}_1^+}{\partial z^2} + k^2(\omega)\,\tilde{\boldsymbol{E}}_1^+ = 0 \tag{12.64}$$

把 Laplace 变换写成下列形式:

$$\overline{E}_1^+(k,\ \omega) = \int_0^{+\infty} \tilde{E}_1(z,\ \omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z \tag{12.65}$$

式中，$\mathrm{Im}(k)<0$，我们可将式(12.64)写成

$$[k^2(\omega)-k^2]\overline{E}_1^+=\tilde{E}'_0+\mathrm{i}k_0\tilde{E}_0 \tag{12.66}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{E}}'_0=\partial\tilde{\boldsymbol{E}}/\partial z$，$\tilde{\boldsymbol{E}}_0=E(z,\ \omega)$在 $z=0$ 处的取值。限定光波是前向的，这等价于 $E'_0=\mathrm{i}k(\omega)E_0$，这时，式(12.66)变成

$$\mathrm{i}[k-k(\omega)]\overline{E}_1^+=\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \tag{12.67}$$

在 $\omega=\omega_0$ 附近把 $k(\omega)$展开成 Taylor 级数

$$\mathrm{i}[(k-k_0)-k'(\omega-\omega_0)-\frac{1}{2}k''(\omega-\omega_0)^2]\overline{E}_1^+=\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \tag{12.68}$$

利用$U(\boldsymbol{r},\ t)$的定义可以看出，式(12.68)刚好是 Fourier−Laplace 变换式(12.61)。用这种方法得出线性方程比前述方法更为容易，但这个方法对非线性问题并不是一个一般性的简单方法，但前面的方法却是。

12.2.3 非线性理论——耦合 NLS 方程

下面考虑 $\boldsymbol{P}$ 中非线性部分的贡献，假定没有二阶非线性项，因此最低阶就是三阶项，并假设介质是弱各向异性的，以致非线性响效应可看成是各向同性的，把二阶谐波撇在一边，它们只出现在特殊的情况。把这两个假设用于光纤，非线性极化率必定能写成下面形式：

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\ t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_3\chi(t-t_1,\ t-t_2,\ t-t_3)\cdot[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t_1)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t_2)]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t_3) \tag{12.69}$$

在计算 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{E}$矢量的各种组合时，只需计及在转动和镜面反演下保持不变的组合。由式(12.69) $\chi(\tau,\tau_2;\ \tau_3)$在交换 $\tau_1\longleftrightarrow\tau_2$ 是不变的，而不要求在交换 $\tau_1\longleftrightarrow\tau_3$ 和 $\tau_2\longleftrightarrow\tau_3$ 下保持不变。因为 $\boldsymbol{E}$的频谱在分布在 $\omega=\omega_0$ 及 $\omega=-\omega_0$ 的邻域内这导致 $\boldsymbol{P}$ 的频谱集中在 $\omega=\pm 3\omega_0$ 和 $\omega=\pm\omega_0$ 的邻域内。假定(在光纤也确如此)，如果波在 $\omega=\omega_0$ 上传播，在 $\omega=3\omega_0$ 上不能传播，于是可忽略 $\boldsymbol{P}$ 中的 $\omega=3\omega_0$ 的成分对电场的贡献。把在 $\omega=\omega_0$ 的邻域中的成分对 $\boldsymbol{P}$ 的贡献记作$\boldsymbol{P}^+$，可以看到，$\boldsymbol{P}$ 包含了 $\boldsymbol{E}$的所有这样的组合：即两个带“+”的 $\boldsymbol{E}$和一个带“−”的 $\boldsymbol{E}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^+(\boldsymbol{r},\ t)=&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_3\chi(t-t_1,t-t_2;\ t-t_3)\\&\cdot\{2[\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},\ t_1)\cdot\boldsymbol{E}^-(\boldsymbol{r},\ t_2)]\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},\ t_3)\\&+[\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},\ t_1)\cdot\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},\ t_2)]\boldsymbol{E}^-(\boldsymbol{r},\ t_3)\}\end{aligned} \tag{12.70}$$

在频域中，式(12.70)变成

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{P}}^+(\boldsymbol{r},\ \omega)=&\frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_2\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\omega_1,\ \omega_2;\ \omega_3)\\&\cdot\Big\{2[\tilde{\boldsymbol{E}}^+(\boldsymbol{r},\ \omega_1)\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^-(\boldsymbol{r},\ \omega_2)]\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^+(\boldsymbol{r},\ \omega_3)\end{aligned}$$

$$+\left.[\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega_1)\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega_2)]\tilde{\boldsymbol{E}}^{-}(\boldsymbol{r},\ \omega_3)\right\}\tag{12.71}$$

式中，$\omega_3=\omega-\omega_1-\omega_2$，式(12.71)的第一项源于 $\omega_1=-\omega_2=\omega_3=\omega_0$ 的邻域，式(12.71)的第二项源于 $\omega_1=\omega_2=-\omega_3=\omega_0$ 的邻域。如果像得到线性响应那样将$\tilde{\chi}(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$展开成 Taylor 级数，但又只保留最低项，于是

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_2\left\{2a[\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega_1)\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^{-}(\boldsymbol{r},\ \omega_2)]\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega_3)\right.$$

$$+\left.b[\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega_1)\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^{+}(\boldsymbol{r},\ \omega_2)]\tilde{\boldsymbol{E}}^{-}(\boldsymbol{r},\ \omega_2)\right\}\tag{12.72}$$

式中:

$$a=\tilde{\chi}(\omega_0,-\omega_0,\ \omega_0)$$

$$b=\tilde{\chi}(\omega_0,\omega_0;\ -\omega_0)$$

忽略高阶项等价于忽略非线项中含有$\partial/\partial t$的项及其高阶导数项。这一假设对于长光脉冲是适应的，只要脉宽大于几百 fs(飞秒)。在相反的极限端，即短脉冲情况，这高阶导数项导致了 Raman 自频移(这也是一重要物理现象[206])和其它一些效应。现在回到时域

$$\boldsymbol{P}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)=2a[\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\boldsymbol{E}^{-}(\boldsymbol{r},\ t)]\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)+b[\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)]\boldsymbol{E}^{-}(\boldsymbol{r},\ t)\tag{12.73}$$

应该强调，导出式(12.73)时，曾假设场包络(而不是场本身)的变化相对介质的时间响应非常慢。在介质响应快到可以认为是同时的情况下，也就是响应时间比 ω_0^{-1} 大很多时

$$\tilde{\chi}(\omega_0,-\omega_0;\ \omega_0)=\tilde{\chi}(\omega_0,\omega_0;\ -\omega_0)=\tilde{\chi}(0,\ 0;\ 0)\tag{12.74}$$

这时便有 $a=b$，不独立的 Kerr 系数也从两个减少到一个。为说明这一点，返回到式(12.70)并注意到，如果 $\chi(\tau_1,\tau_2;\ \tau_3)\to 0$ 的速度是足够地快，以致E^{+} 的变化可以忽略，于是

$$\boldsymbol{P}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_3\chi(t-t_1,t-t_2;\ t-t_3)$$

$$\cdot\{2[\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\boldsymbol{E}^{-}(\boldsymbol{r},\ t)]\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)+[\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r},\ t)]\boldsymbol{E}^{-}(\boldsymbol{r},\ t)\}\tag{12.75}$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_3\chi(t-t_1,\ t-t_2;\ t-t_3)=\tilde{\chi}(0,\ 0;\ 0)\tag{12.76}$$

并与式(12.75)和式(12.73)比较，就能得到式(12.74)。在光纤中，非线性响应可认为是同时的，因此有 $a=b$。关于当非线性响应变化的同时，Kerr 系数从两个减少为一个的结论，可参考文献〔184〕。

回顾单位矢量$\hat{e}_1\equiv\hat{e}_1(\omega_0)$和$\hat{e}_2\equiv\hat{e}_2(\omega_0$定义了本征模，利用正交关系式(12.42)，可得到

$$\boldsymbol{P}_1^{+}=2a[E_1^{+}E_1^{-}+E_2^{+}E_2^{-}]E_1^{+}+b[E_1^{+}E_1^{+}(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2)+2E_1^{+}E_2^{+}(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2)$$

$$+ E_2^+ E_2^+ (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2)] \cdot [E_1^- (\hat{e}_1^* \hat{e}_1^*) + E_2^- (\hat{e}_1^* \cdot \hat{e}_2^*)] \tag{12.77}$$

包含 a 的项不依赖本征模的结构，但包含 b 的项要依赖本征模的结构，因此非线性模耦合的强度有赖于本征模的结构。一般情况下，Kerr 介质可能是椭圆双折射的。选择 $\hat{e}_x$ 沿双折射椭圆的主轴。$\hat{e}_y$ 沿次短轴(这并不失一般性)，因此有:

$$\left.\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{\hat{e}_x + \mathrm{i}r\hat{e}_y}{\sqrt{1+r^2}} \\ \hat{e}_2 &= \frac{r\hat{e}_x - \mathrm{i}\hat{e}_y}{\sqrt{1+r^2}} \end{aligned}\right\} \tag{12.78}$$

式中，$r=\tan(\theta/2)$，而且 $\cos\theta=\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1=\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2$，$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2=\sin\theta$，$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1^*=1$，$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2^*=1$，$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2^*=0$。线性双折射对应于 $\theta=0$ 即 $r=0$；而圆双折射对应于 $r=1$ 即 $\theta=\pi/2$。前一情况，$\hat{e}_1=\hat{e}_x$，$\hat{e}_2=-\mathrm{i}\hat{e}_y$，这与通常的选择（$\hat{e}_1=\hat{e}_x$，$\hat{e}_2=\hat{e}_y$)不同，但对演化方程不引起任何变化。后一情况是标准的选择。注意到 $E_1^-=E_1^{+*}$，$E_2^-=E_2^{+*}$，式(12.77)变成

$$P_1^+ = (2a+b\cos^2\theta)|E_1^+|^2E_1^+ + (2a+2b\sin^2\theta)|E_2^+|^2E_1^+ - (b\cos\theta\sin\theta(E_1^+)^2E_2^-$$
$$+ 2b\cos\theta\sin\theta|E_1^+|^2E_2^+ + b\cos^2\theta(E_2^+)^2E_1^- + b\cos\theta\sin\theta|E_2^+|^2E_2^+ \tag{12.79}$$

利用式(12.48)和式(12.62)中波包的定义，可以得到

$$\rho=(2a+b\cos^2\theta)|U|^2U+(2a+2b\sin^2\theta)|V|^2U+b\cos^2\theta V^2U^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(k_0-l_0)z}$$
$$+ b\cos\theta\sin\theta\{U^2V^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0-l_0)z}+(2|U|^2+|V|^2)V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_0-l_0)z} \tag{12.80}$$

上式给出了非线性极化率。把上式与式(12.51)(给出线性极化率)合并，并把结果代入 Maxwell 方程。我们假设非线性贡献与色散贡献是同一量级的，因为孤子是在二者平衡时才产生的。把总极化率代入 Maxwell 方程并这样约简方程：使 $\partial/\partial z$ 是一阶的，这与严格线性情况是相同的，于是我们得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial z}+\mathrm{i}k'\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{1}{2}k''\frac{\partial^2U}{\partial t^2}+(2a'+b'\cos^2\theta)|U|^2U+(2a'+2b'\sin^2\theta)|V|^2U$$
$$+ b'\cos^2\theta V^2U^*\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(k_0-l_0)z}+b'\cos\theta\sin\theta\{U^2v^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0-l_0)z}+2(|U|^2$$
$$+ |V|^2V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_0-l_0)z}\}=0 \tag{12.81}$$

式中，$a'=a/2k_0$，$b'=b/2k_0$。同理可得:

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{i}l'\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{2}l''\frac{\partial^2V}{\partial t^2}+(2a'+2b'\sin\theta)|U|^2V+(2a'+b'\cos^2\theta)|V|^2V$$
$$+ b'\cos^2\theta\, U^2V^*\cdot\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(k_0-l_0)z}+b'\cos\theta\sin\theta\{V^2U^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_0-l_0)z}$$
$$+ (|U|^2+2|V|^2)U\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0-l_0z}\}=0 \tag{12.82}$$

这里已假设 $a/2k_0\approx a/2l_0$，$b/2k_0\approx b/2l_0$。下面把式(12.81)和式(12.82)写成归一化形

式。在光纤中，l'' 与 k'' 的差别很小并写略，且 $k'-l'=(k_0-l_0)/\omega_0$，令:

$$\left.\begin{aligned} k''&=-\frac{\lambda_0}{2\pi c^2}D(\lambda_0) \\ l''&=-\frac{\lambda_0}{2\pi c^2}D(\lambda_0) \end{aligned}\right\} \tag{12.83}$$

并定义:

$$\xi=\frac{\pi z}{2z_0} \qquad z_0=\frac{\pi^2c^2t_0^2}{D(\lambda_0)\lambda_0} \qquad t_0=0.568\tau$$

$$S=\frac{1}{t_0}\left(t-\frac{z}{\bar{v}_g}\right) \qquad \bar{v}_g=2/(k'+l')$$

$$u=(2a'+b'\cos^2\theta)^{1/2}U \qquad v=(2a'+b'\cos^2\theta)^{1/2}v$$

$$\delta=\frac{t_0(k'-l')}{2|k''|}=\frac{\pi c\Delta nt_0}{[D(\lambda_0)\lambda_0]} \qquad R=\frac{8\pi c}{\lambda_0}t_0$$

$$B=\frac{2a'+2b'\sin^2\theta}{2a'+b'\cos^2\theta} \qquad C=\frac{b'\cos^2\theta}{2a'+b'\cos^2\theta} \qquad D=\frac{b'\cos\theta\cdot\sin\theta}{2a'\cos^2\theta}$$

式中，τ 是脉冲强度的 3 dB 带宽(FWHM)，$\Delta n=(k_0-l_0)C/\omega_0$ 是折射率差值。由这些定义，式(12.81)和式(12.82)变成:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\mathrm{i}\delta\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2u}{\partial s^2}+(|u|^2+B|v|^2)u+cv^2u^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\delta\xi}+D[u^2v^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}R\delta\xi/2} \\ &\quad+(2|u|^2+|v|^2)v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\delta\xi/2}]=0 \\ &\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\xi}-\mathrm{i}\delta\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2u}{\partial s^2}+(B|u|^2+|v|^2)v+cu^2v^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}R\delta\xi}+D[v^2u^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\delta\xi/2} \\ &\quad+(|u|^2+2|v|^2)u\mathrm{e}^{+\mathrm{i}R\delta\xi/2}]=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.84}$$

时间 s 并不是与实验坐标时间 t 成正比，只是其差值与实验室时间差值成正比，但其原点依赖于 ξ。原点应这样选择：如果信号以两模群速的平均速度运动，则随 ξ 演化的过程中，其 s 方向的剖面是不变的。因此，方程中$\partial u/\partial s$和$\partial v/\partial s$出现了相反的符号，这样就考虑了两模的群速差。事实上，这些项可通过变下面变换消去:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}&=u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta^2\xi/2+\mathrm{i}\delta s} \\ \bar{v}&=v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta^2\xi/2-\mathrm{i}\epsilon s} \end{aligned}\right\} \tag{12.85}$$

于是得到:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial s^2}+(|\bar{u}|^2+B|\bar{v}|^2)\bar{u}+C\bar{v}^2\bar{u}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\delta\xi+4\mathrm{i}\delta s}+D[\bar{u}^2\bar{v}^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}R\delta\xi/2-2\mathrm{i}\delta s} \\ &\quad+(2|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2)\bar{v}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\delta\xi/2+2\mathrm{i}\delta s}]=0 \\ &\mathrm{i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial s^2}+(B|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2)\bar{v}+C\bar{u}^2\bar{v}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\delta\xi/-4\mathrm{i}\delta s}+D[\bar{u}^2\bar{v}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\delta\xi/2+2\mathrm{i}\delta s} \\ &\quad+(2|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2)\bar{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\delta\xi/2-2\mathrm{i}\delta s}]=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.86}$$

物理上，这一变换等价于把两个模的中心频率充分远离使得他们的群速相等。但代价是增加了显含时间的因子。δ 因子在大多数光纤实验中是相当大的，例外情况是，把光纤用于特低频或宽度短于皮秒的短脉冲。文献中(其中取 $\cos\theta=1$，$\delta=0$)对非线性双折射的处理使用了这一极限[64, 207]。从实验角度考虑，宁愿用式(12.84)而不用式(12.85)，因为两个本征模通常是以相同的中心频率注入光纤的。

12.2.4 空间周期平均

在大多数有意义的实验中，$R\delta\gg 1$，在这种情况下，式(12.84)中出现指数的项快速振荡，因此可以忽略。在物理上，这一假设对应于假设双折射的拍长度相对色散长度很小。于是，式(12.84)具有非常简单的形式：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mathrm{i}\delta\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(|u|^2+B|v|^2)u=0\\ &\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \xi}-\mathrm{i}\delta\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+(|v|^2+B(|u|^2)v=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.87}$$

根据 B 的定义，当 $\cos^2\theta=2\sin^2\theta$ 时，$B=1$，这时

$$\theta=35^\circ \tag{12.88}$$

这一结果不依赖于比值 b/a。由于$\partial u/\partial s$及$\partial v/\partial s$可以消去，因此式(12.87)正是 Manakov 方程[201]的一个版本，而这个方程是可积的，即可使用逆散射方法求解。特别情况是，一种极化的孤子将通过另一相反极化的脉冲，而不产生影子。

现在回顾一下本节采用过的近似：

(1) 准单色平面波近似，忽略横向效应。

(2) 慢变波近似。

(3) 无线性模耦合，相对非线性耦合非常弱。

(4) 对 k，χ 的展开只到二阶。

(5) 双折射拍长远小于色散长度。

(6) 假设 $k''\approx l''$，$k'-l'=\dfrac{k_0-l_0}{\omega_0}$

12.3 Manakov 方程的解

当 $B=1$ 时，Manakov 用逆散射求解了方程式(12.87)，这里只给结论，不给步骤。显然，式(12.87)有单孤子解：

$$\left.\begin{aligned} &u=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}A_1^2\xi/2}\operatorname{sech}\Phi_1\\ &v=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.89}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &u=0\\ &v=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}A_2^2\xi/2}\operatorname{sech}\Phi_2 \end{aligned}\right\} \tag{12.90}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= A_1(s - s_1 - \delta\xi)\\ \Phi_2 &= A_2(s - s_2 + \delta\xi)\end{aligned}\right\} \tag{12.91}$$

而 A_1，A_2，s_1，s_2 是任意参数。但当 $B=1$ 时，有下面结果：在 $\xi=0$ 处设初值条件是:

$$\left.\begin{aligned}u &= A_1\operatorname{sech}[A_1(s - s_1)]\\ v &= D(s)\end{aligned}\right\} \tag{12.92}$$

式中，$D(s)$是实函数，并假定两种极化的波能相互穿过。于是，当 ξ 很大时，可得到

$$u = A_1 e^{iA_1^2\xi/2 + i\psi_1}\operatorname{sech}(\varphi_1 - \Delta_1) \tag{12.93}$$

换句话说，相互作用后，孤子除了产生相移 ψ_1 和位移(时移)Δ_1/A_1 之外，不会发生任何变化，尤其是孤子的极化状态不发生变化，也不留下影子。

下面考虑两个相反极化孤子的碰撞，式(12.87)的解是:

$$u = \frac{2A_1 e^{iA_1^2\xi/2}[e^{\varphi_2} + \Omega_1 e^{-\varphi_2}]}{e^{\varphi_1+\varphi_2} + e^{\varphi_1-\varphi_2} + e^{-(\varphi_1-\varphi_2)} + |\Omega_1|^2 e^{-(\varphi_1+\varphi_2)}} \tag{12.94}$$

$$v = \frac{2A_2 e^{iA_2^2\xi/2}[e^{\varphi_1} + \Omega_2 e^{-\varphi_1}]}{e^{\varphi_1+\varphi_2} + e^{\varphi_1-\varphi_2} + e^{-(\varphi_1-\varphi_2)} + |\Omega_2|^2 e^{-(\varphi_1+\varphi_2)}} \tag{12.95}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{2\delta + i(A_1 - A_2)}{2\delta + i(A_1 + A_2)}\\ \Omega_2 &= \frac{2\delta + i(A_1 - A_2)}{2\delta + i(A_1 + A_2)}\end{aligned}\right\} \tag{12.96}$$

当 $\varphi_1 \approx 0$，$\xi \to -\infty$ 和 $\varphi_2 \to -\infty$ 时

$$u = \frac{2A_1\Omega_1 e^{iA_1^2\xi/2}}{e^{\varphi_1} + |\Omega_1|^2 e^{-\varphi_1}} \tag{12.97}$$

当 $\xi \to +\infty$，$\varphi_2 \to +\infty$ 时

$$u = \frac{2A_1 e^{iA_1^2\xi/2}}{e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}} \tag{12.98}$$

因此可求出相移和时移

$$\tan\psi_1 = -\frac{\operatorname{Im}(\Omega_1)}{\operatorname{Re}(\Omega_1)} = \frac{4\delta A_2}{4\delta^2 + A_1^2 - A_2^2} \tag{12.99}$$

$$\Delta s = \frac{1}{2A_1}\ln\left[\frac{4\delta^2 + (A_1 + A_2)^2}{4\delta^2 + (A_1 - A_2)^2}\right] \tag{12.100}$$

当 $A_2 \gg A_1$ 时，相移最大，这时:

$$\left.\begin{aligned}\Delta s &\approx \frac{2}{A_2}\\ \tan\psi_1 &= -\frac{4\delta}{A_2}\end{aligned}\right\} \tag{12.101}$$

这时 $\psi_1 \approx \pi - 4\delta / A_2$，当 $A_1 = A_2 = A$ 时，可得:

$$\left.\begin{aligned}\Delta s &= \frac{1}{2A}\ln\left(1+\frac{A^2}{\delta^2}\right)\\ \tan\psi_1 &= \frac{A}{\delta}\end{aligned}\right\} \tag{12.102}$$

这时，$\psi_1 < \pi / 2$。讨论式(12.95)中 $\delta = 0$ 的极限是有意义的，这时有驻波解，即$|u|^2$和$|v|^2$与 ξ 无关。由于这个原因，才把这个解认为是孤子解[64]，实际上，它应是双孤子(或双极点)解。

式(12.101)的结果可用一个基本观点加以解释，假定 v 极化脉冲宽度为 s。幅值为 A_2，并在这时与 u 极化孤子相互作用；还需假设 v 极化脉冲足够强，以致在与 u 极化孤子相互作用时，能支配 u 极化孤子的演化；最后再假设相互作用足够快，以致 v 极化脉冲的形状不受任何影响。于是便有:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} = |v(\xi,\ s)|^2 \tag{12.103}$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}|v|^2\mathrm{d}s \approx \frac{A_2^2}{2\delta}s_0 \tag{12.104}$$

对于孤子 $s_0 = 2 / A_2$，就给出了与式(12.103)相符的结果。式(12.104)适合于 v 脉冲积分值很大但其导数值很小的情况(即宽胖型脉冲)。

12.4 极化调制明孤波行波耦合分析

12.4.1 Hirota 方法及其行孤波行波解

下面我们用 Hirota 方程来分析耦合方程[165, 160]的行波解:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{i}u_t + \sigma_1 u_{xx} + \alpha^2 u + |u|^2 u + \beta|v|^2 u + (1-\beta)v^2 u^* = 0\\ &\mathrm{i}v_t + \sigma_2 v_{xx} - \alpha^2 v + |v|^2 v + \beta|u|^2 v + (1-\beta)u^2 v^* = 0\end{aligned}\right\} \tag{12.105}$$

式中，α^2 代表椭圆双折射纤芯的椭圆度。对于理想圆柱面，$\alpha = 0$，但是要使极化调制孤波能够存在，必需使 $\alpha \neq 0$。式 (12.105) 相当于式 (12.34) 和式 (12.35) 中取 $\gamma = 1$ 且 $\Delta\beta \to 0$ 时的情形。在那里的 2／3 即上式中的 β。$\sigma = +1$ 代表反常色散区，$\sigma = -1$ 代表正常色散区，u，v 分别代表极化场的两个横向分量。研究这一问题有重要的意义，因为光纤存在双折射[166]，因此单模光纤并不能完全做到单模，实际中往往是双模。这样，双折射就对孤子在传输过程中产生影响：线性双折能将一个脉冲分为两个；非线性双折射可以抑制脉冲展宽，只要脉冲在反常色散区被压缩就行。当 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 时（相当于式 (12.35) 中的 $\beta_{1x} = \beta_{2x}$，即 $\Delta\beta = 0$)，在 $u(x,\ t)$ 和 $v(x,\ t)$ 其中之一为 0 的条件下，式 (12.105) 给出 NLS 方程，并有耦合明孤子解:

$$v=0\text{时},\quad u=u_0\operatorname{sech}\left[\frac{u_0}{\sqrt{2}}(x-ct-x_0)\right]\exp\left\{\mathrm{i}\left(\frac{u_0^2}{2}+\alpha^2-\frac{1}{4}c^2\right)t+\frac{c}{2}x+\varphi_0\right\} \tag{12.106}$$

$$u=0\text{时},\quad v=v_0\operatorname{sech}\left[\frac{v_0}{\sqrt{2}}(x-ct-x_0)\right]\exp\left\{\mathrm{i}\left(\frac{v_0^2}{2}-\alpha^2-\frac{c^2}{4}\right)t+\frac{c}{2}x+\varphi_0\right\} \tag{12.107}$$

于是，在一般情况下，构造行波解:

$$u(x,\ t)=u(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(z-\frac{1}{2}ct)+\mathrm{i}\varphi_0} \tag{12.108}$$

$$v(x,\ t)=v(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(z-\frac{1}{2}ct)+\mathrm{i}\varphi_0} \tag{12.109}$$

式中:

$$\xi=x-ct$$

将式(12.108)、式(12.109)代入式(12.105)中，可得:

$$\sigma_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(u^2+v^2)u=(a^2-\alpha^2)u \tag{12.110}$$

$$\sigma_2\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+(v^2+u^2)v=(a^2+\alpha^2)v \tag{12.111}$$

把式(12.110)、式(12.111)的解表示成Pada近似，即:

$$\left.\begin{aligned}u(\xi)&=\frac{G(\xi)}{F_1(\xi)}\\ v&=\frac{H(\xi)}{F_2(\xi)}\end{aligned}\right\} \tag{12.112}$$

代入式(12.110)

$$\sigma_1\frac{G''F_1-2G'F'_1+F''_1G}{F_1^2}-\frac{(a^2-\alpha^2)GF_1}{F_1^2}$$
$$+\frac{\sigma_1(-2F''_1F_1G+2F'_1F''_1G)+G(G^2+H^2)}{F_1^3}=0$$

即:

$$\sigma_1(G''F_1-2G'F'_1+F''_1G)=(a^2-\alpha^2)GF_1 \tag{12.113}$$

$$G^2+H^2=\sigma_1(2F''_1F_1-2F'^2_1)=2\sigma_1F_1^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{F'_1}{F_1}\right) \tag{12.114}$$

式(12.114)即为

$$\frac{G^2+H^2}{F_1^2}=2\sigma_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}[\ln F_1] \tag{12.115}$$

同理，把式(12.112)代入式(12.111)，可得:

$$\sigma_2(H''F_2 - 2H'F'_2 + F''_2H) = (a^2 + \alpha^2)HF_2 \tag{12.116}$$

$$\frac{G^2 + H^2}{F_2^2} = 2\sigma_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}[\ln F_2] \tag{12.117}$$

到此，可以看到，现在引入了四个未知函数 F_1，F_2，G，H，有四个方程即式(12.113)、式(12.115)、式(12.116)和式(12.117)，满足有解的必要条件。当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma>0$，可取 $F_1(\xi)=F_2(\xi)=F(\xi)$，这时未知函数退化为三个，而方程式(12.115)、式(12.117)退化为一个。下面分析 $\sigma_1=\sigma_2=+1$ 的情况，这时束缚条件要求 $|x|\to\infty$ 时，$|u|\to 0$，$|v|\to 0$，因此，把 F，G，H 展开为如下 ε 的幂级数(得到最终结果后令 $\varepsilon=1$):

$$\left.\begin{aligned} F &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F^{(n)} \\ G &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n G^{(n)} \\ H &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n H^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{12.118}$$

代入式(12.113)～式(12.117)，并合并各 ε^n 的系数，可得各级量 $F^{(n)}$，$G^{(n)}$，$H^{(n)}$ 所满足的方程，如第一项给出:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0 \\ &\sigma\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial \xi^2} = (a^2 - \alpha^2)G^{(1)} \\ &\sigma\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial \xi^2} = (a^2 + \alpha^2)H^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{12.119}$$

这个方程的解可写成:

$$\left.\begin{aligned} F^{(1)} &= 0 \\ G^{(1)} &= \sqrt{8(a^2 - \alpha^2)}\,\mathrm{e}^{P_1} \\ H^{(1)} &= \sqrt{8(a^2 - \alpha^2)}\,\mathrm{e}^{P_2} \end{aligned}\right\} \tag{12.120}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2}{\sigma}}(\xi - x_{01}) = \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2}{\sigma}}(x - ct - x_{01}) \\ P_2 &= \sqrt{\frac{a^2 + \alpha^2}{\sigma}}(\xi - x_{02}) = \sqrt{\frac{a^2 + \alpha^2}{\sigma}}(x - ct - x_{02}) \end{aligned}\right\} \tag{12.121}$$

第二项给出:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial\xi^2}=\frac{1}{2}[G^{(1)}]^2+\frac{1}{2}[H^{(1)}]^2\\
&\sigma\frac{\partial^2 G^{(2)}}{\partial\xi^2}=(a^2-\alpha^2)G^{(2)}\\
&\sigma\frac{\partial^2 H^{(2)}}{\partial\xi^2}=(a^2+\alpha^2)H^{(2)}
\end{aligned}\right\}\tag{12.122}$$

上式中第一方程的解是

$$F^{(2)}=e^{2P_1}+e^{2P_2}$$

由于式 (12.122) 中的第二、三方程与式 (12.119) 中的完全一样，如果其解可写为式 (12.120) 的形式，则可与 $G^{(1)}$，$H^{(1)}$ 合并，而得不到任何新内容，因此取另一平凡解:

$$\left.\begin{aligned}
&G^{(2)}=0\\
&H^{(2)}
\end{aligned}\right\}=0\tag{12.123}$$

式 (12.123) 可作为 $G^{(2)}$、$H^{(2)}$ 的解。

第三项给出:

$$\frac{\partial^2 F^{(3)}}{\partial\xi^2}=0$$

$$\sigma\frac{\partial^2 G^{(3)}}{\partial\xi^2}+\sigma F^{(2)}\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial\xi^2}-2\sigma\frac{\partial F^{(2)}}{\partial\xi}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial\xi}+\sigma G^{(1)}\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial\xi^2}=(a^2-\alpha^2)(G^{(3)}+F^{(2)}G^{(1)})\tag{12.124}$$

$$\sigma\frac{\partial^2 H^{(3)}}{\partial\xi^2}+\sigma F^{(2)}\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial\xi^2}-2\sigma\frac{\partial F^{(2)}}{\partial\xi}\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\xi}+\sigma H^{(1)}\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial\xi^2}=(a^2+\alpha^2)(H^{(3)}+F^{(2)}H^{(1)})\tag{12.125}$$

于是有解:

$$\left.\begin{aligned}
&F^{(3)}=0\\
&G^{(3)}=\sqrt{8(a^2-\alpha^2)}\,Be^{P_1+2P_2}\\
&H^{(3)}=\sqrt{8(a^2-\alpha^2)}\,Be^{P_2+2P_1}
\end{aligned}\right\}\tag{12.126}$$

$$B=\frac{\sqrt{a^2-\alpha^2}-\sqrt{a^2+\alpha^2}}{\sqrt{a^2-\alpha^2}+\sqrt{a^2+\alpha^2}}\tag{12.127}$$

第四项给出:

$$\sigma\frac{\partial^2 F^{(4)}}{\partial\xi^2}+\sigma F^{(2)}\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial\xi^2}-\sigma\frac{\partial F^{(2)}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial F^{(2)}}{\partial\xi}=G^{(1)}G^{(3)}+H^{(1)}H^{(3)}\tag{12.128}$$

$$\sigma\frac{\partial^2 G^{(4)}}{\partial\xi^2}=(a^2-\alpha^2)G^{(4)}\tag{12.129}$$

$$\sigma\frac{\partial^2 H^{(4)}}{\partial\xi^2}=(a^2+\alpha^2)H^{(4)} \tag{12.130}$$

因此有解:

$$F^{(4)}=\frac{a^2-\sqrt{a^4-\alpha^4}}{a^2+\sqrt{a^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{2P_1+P_2} \tag{12.131}$$

$$\left.\begin{aligned}G^{(4)}=0\\ H^{(4)}=0\end{aligned}\right\} \tag{12.132}$$

到此，F，G，H可表示成:

$$F(\xi)=1+\mathrm{e}^{2P_1}+\mathrm{e}^{2P_2}+\frac{a^2-\sqrt{a^4-\alpha^4}}{a^2+\sqrt{a^2-\alpha^4}}\mathrm{e}^{2P_1+P_2} \tag{12.133}$$

$$G(\xi)=\sqrt{8(a^2-\alpha^2)}\mathrm{e}^{P_1}(1+B\mathrm{e}^{2P_2}) \tag{12.134}$$

$$H(\xi)=\sqrt{2(a^2+\alpha^2)}\mathrm{e}^{P_2}(1-B\mathrm{e}^{2P_1}) \tag{12.135}$$

式 (12.133) ~ 式 (12.135) 虽然在第四项截断，它刚好是方程式 (12.113)、式 (12.116)、式 (12.117) 的严格解，只要代人方程即可容易证明。到此可以有:

$$u(x,\ t)=\frac{\sqrt{8(a^2-\alpha^2)}(1+B\mathrm{e}^{2P_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-\frac{1}{2}ct)+\mathrm{i}\varphi_0+P_1}}{1+\mathrm{e}^{2P_1}+\mathrm{e}^{2P_2}+B^2\mathrm{e}^{2P_1+2P_2}} \tag{12.136}$$

$$v(x,\ t)=\frac{\sqrt{8(a^2+\alpha^2)}(1-B\mathrm{e}^{2P_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-\frac{1}{2}ct)+\mathrm{i}\varphi_0+P_2}}{1+\mathrm{e}^{2P_1}+\mathrm{e}^{2P_2}+B^2\mathrm{e}^{2P_1+2P_2}} \tag{12.137}$$

12.4.2 解的物理意义及结果分析

现在分析五个参数 φ_0，c，a^2，x_{01}，x_{02} 的物理意义。φ_0 和 c 是显然的，即分别代表初相和波速。下面讨论 x_{01}，x_{02}。

当 $x_{01}\to\infty$ 时，由式(12.121)，$P_1\to-\infty$，这时$\mathrm{e}^{P_1}\to 0$，于是有:

$$u(x,\ t)\to 0 \tag{12.138}$$

$$v(x,\ t)\to\frac{\sqrt{8(a^2+\alpha^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-ct)+\mathrm{i}\varphi_0+P_2}}{1+\mathrm{e}^{2P_2}}$$

$$=\sqrt{2(a^2+\alpha^2)}\mathrm{sech}(P_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-ct)+\mathrm{i}\varphi_0} \tag{12.139}$$

当$x_{02}\to\infty$时，$P_2\to-\infty$，$\mathrm{e}^{P_2}\to 0$，于是有:

$$u(x,\ t)\to\sqrt{2(a^2-\alpha^2)}\mathrm{sech}(P_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-ct)+\mathrm{i}\varphi_0} \tag{12.140}$$

$$v(x,\ t)\to 0 \tag{12.141}$$

可见，x_{01}，x_{02} 分别代表两个极化孤波的初始位置 (由式 (12.121) 中 P_1，P_2 的表达式)。

a^2 标志了两极化孤波的幅值，且当两孤波相距较远时，孤波幅值分别由$\sqrt{2(a^2+\alpha^2)}$

和$\sqrt{2(a^2-\alpha^2)}$给出，因此，两孤波幅值不可能相同，除非 $\alpha=0$。

以上只讨论了 $a^2>\alpha^2$ 的情况，因此式 (12.136)、式 (12.137) 只适应能量在阈值之上，即 $a^2>\alpha^2$ 的情形。当 $a^2<\alpha^2$ 时，将给出性质极其不同的解析解。事实上，当 $a^2<\alpha^2$ 时，P_1 变成虚函数，e^{P_1} 变成周期函数，但由于 P_2 仍为实函数，因此，式 (12.136)、式 (12.137) 不可能变成完全周期函数。这时，$x_{02}\to\infty$ 导致

$$\left.\begin{aligned}&u(x,\ t)\to\frac{\mathrm{i}\sqrt{8(\alpha^2-a^2)}\,\mathrm{e}^{P_1+\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-\frac{1}{2}ct)+\mathrm{i}\varphi_0}}{1+\mathrm{e}^{2P_1}}\\&v(x,\ t)\to 0\end{aligned}\right\}\tag{12.142}$$

这时 $u(x,\ t)$ 变成周期函数，但当 $x_{02}\to-\infty$ 时，$P_2\to\infty$，这时

$$\left.\begin{aligned}&u(x,\ t)\to\frac{\mathrm{i}\sqrt{8(\alpha^2-a^2)}\,B\mathrm{e}^{2P_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2t+\frac{1}{2}\mathrm{i}c(x-ct)+\mathrm{i}\varphi_0+P_1}}{(1+B^2\mathrm{e}^{2P_1})\mathrm{e}^{2P_2}}\\&v(x,\ t)\to 0\end{aligned}\right\}\tag{12.143}$$

仍然是周期函数。

12.5　暗—暗孤波、明—暗孤波耦合的分析

在前面，我们只讨论了脉冲工作在反常色散区的情况($\sigma_1=\sigma_2=1$)。此外，如当 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，但 $\sigma_1\neq\sigma_2$ 时，当脉冲工作在正常色散区时；$\sigma_1<0$，$\sigma_2<0$，或者两种极化分别处于正常和反常色散区时。这些情况都是有实际意义的。下面讨论 $\sigma_1=\sigma_2<0$ 的情况，这时利用式(12.112)，把式(12.110)写成另一种双线性形式:

$$\sigma_1(G'F_1-2G'F'_1+F''_1G)=0\tag{12.144}$$

$$\sigma_1(2F''_1F_1-2F'^2_1)=G^2+H^2-(a^2-\alpha^2)F_1^2\tag{12.145}$$

注意式 (12.144)，式 (12.145) 与式 (12.113)，式 (12.114) 的区别。同理可得:

$$\sigma_2(H''F_2-2H'F'_2+F''_2H)=0\tag{12.146}$$

$$\sigma_2(2F''_2F_1-2F'^2_2)=G^2+H^2-(a^2+\alpha^2)F_2^2\tag{12.147}$$

于是可对u，分别寻求满足条件:

$$\left.\begin{aligned}&|u(x,\ t)|_{x\to\pm\infty}\to u_0\\&|v(x,\ t)|_{x\to\pm\infty}\to v_0\end{aligned}\right\}\tag{12.148}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}&u_0^2=a^2-\alpha^2\\&v_0^2=a^2+\alpha^2\end{aligned}\right\}\tag{12.149}$$

的解。下面可以看到，即使 $\sigma_2=\sigma_1$ 时，也不能取 $F_1(\xi)=F_2(\xi)$。这时式 (12.118) 给出的

展开是不适应的，应取为:

$$\left.\begin{aligned} F_j(\xi)&= F_{0j}+\sum_{n=1}^{\infty}F_j^{(n)}\\ G(\xi)&= G_0+\sum_{n=1}^{\infty}G^{(n)}\\ H(\xi)&= H_0+\sum_{n=1}^{\infty}H^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{12.150}$$

式中，G_0，H_0 为常数，但为使式(12.145)，式(12.147)两端相容，应使:

$$G_0^2+H_0^2-(a^2-\alpha^2)F_{01}^2=0 \tag{12.151}$$

$$G_0^2+H_0^2-(a^2+\alpha^2)F_{02}^2=0 \tag{12.152}$$

可以看到，若 $F_{01}=F_{02}$，则在 $a\neq0$，$\alpha\neq0$ 时，给出矛盾结果。以下的分析与前面分析类似，这一点也与上一章中求解双暗孤子解过程相似。

12.6 非等幅线性极化孤子的耦合及其可能的应用

12.6.1 引言

光纤中快速非线性过程对于全光开关研究有巨大的应用潜力，在文献〔208〕和〔209〕中，曾分别报道: 在正常色散区，用强皮秒脉冲实现两个反向传输的圆极化模之间或双芯光纤中的两个线性模之间的功率诱导开关过程，Lattes 等人[194]和 LaGasse 等人[195]，提出了一种使用光纤双折射的非线性耦合光开关的方案。这展现了交叉耦合在光开关应用中的重要作用。Menyuk 对光纤双折射支配的非线性脉冲的传输作了系统研究[62, 64, 159, 161]，其中包括耦合非线性 Schrodinger 方程的建立。研究表明，当开关脉冲通过信号脉冲时，开关脉冲不仅使信号脉冲相移，它还留一个影子，这个影子虽是信号脉冲一部分，但却与开关脉冲极化相同，它严重影响了开关对比度；但是，当自耦合项与交叉耦合项相等时，影子可基本消除[163]，条件是椭圆角 $\theta=35°$，如 θ 偏离在$\pm 5°$ 以内，对比度仍可在 10 以上。文献〔210〕中模拟了圆极化分量的耦合过程，同时也作了基于绝热近似的微扰解析分析，并给出了绝热近似的参数演化公式。本节将研究线性极化下的非线性双折射(即 $\theta=0°$)所支配的脉冲耦合特性，包括双通道中孤子开关作用。由文献〔62〕，当 $\theta=0°$ 时，$B=2/3$，在 $R\delta\ll1$(由于 $R=8\pi Ct_0/\lambda_0$，$\delta=(k'-l')t_0/(2|k''|)$，因此，此条件代表群速近匹配情况)时，耦合 NLSE(非线性 Schrodinger 方程)可写成:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\mathrm{i}\delta\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(|u|^2+B|v|^2)u+Cv^2u^*=0\\ &\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\xi}-\mathrm{i}\delta\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+(|v|^2+B|u|^2)v+Cu^2v^*=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.153}$$

式中，已注意到 $\theta=0$ 和 π 时，$D=0$(对圆极化，$\theta=\pi/2$，这时 $D=0$，$C=0$)。耦合 NLSE 还支配着双模光纤[211]、方向耦合器[212]及波分复用(双频通道)[192]中脉冲间的耦合作用，因此，对耦合 NLSE 的研究有重要意义，因高技术发展依赖于对其中物理过

程的深刻理解。

12.6.2　两种极化分量的耦合与能量周期转移

耦合 NLSE 同 NLSE 一样，只有在一些特殊的初始注入下，才能解析求解；一般情况下，只能借助数值分析。下面用分裂步长 Fourier 变换法，数值模拟了方程组式(12.153)，模拟中取 $\sigma=1$(即反常色散区)，$B=2/3$，初始注入为:

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 \operatorname{sech}\left[A_1\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]e^{i\varphi_1} \\ v &= A_2 \operatorname{sech}\left[A_2\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)\right]e^{i\varphi_2} \end{aligned}\right\} \tag{12.154}$$

A_1 和 A_2 也可看作同一线性极化注入的两个分量:

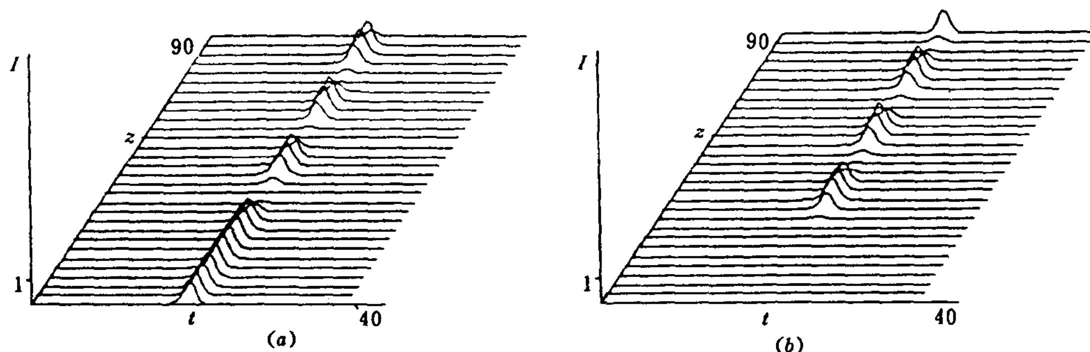
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\sin\alpha \\ A_2 &= A\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{12.155}$$

这时，应取 $\Delta=0$，$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$。由于方程式(12.153)的最后一项(即 u^2v^* 或 v^2u^*)非常类似于水槽中参数激励下的流体孤子方程的激励项，即方程

$$i2\omega\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+(\omega_0^2-\omega^2)\varphi_1+i2\mu\omega\varphi_1-\frac{1}{2}kTa\Omega^2\varphi_1^*e^{i\varphi_0}-c^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=A_0|\varphi_1|^2\varphi_1 \tag{12.156}$$

中的 $(-kTa\Omega^2e^{i\varphi_0}/2)\varphi_1^*$ 项。式中，a 代表激励幅度，Ω 是激励频率，式(12.156)是文献〔213〕中 $\omega_1^2=gkT$，$A_1=0$，$A_2=0$ 的情况，式(12.156)中 μ 代表损耗项，孤波的能量是通过 φ_1^* 项获得的，能量获得的功率因数正比于 $\sin(\varphi_0-2\psi)$，ψ 是 φ_1 的相角。如果把这些概念对应到式(12.153)，那么就意味光纤中的每一极化都要受到另一极化的"激励"(或"泵浦")，是与式(12.153)中的激励是强度相关的。例如，对式(12.153)中 u 通道来说，激励正比于 $v^2=|v|^2e^{i\varphi_0}$，这时 $\varphi_0/2$ 代表 v 的相角。于是，如果 v 极化比 u 极化强且 $\sin(\varphi_0-2\psi)$ 为正时，便从 v 极化中获得能量；当然，如果 $\sin(\varphi_0-2\psi)<0$(激励做负功)，即使 $|v|^2>|u|^2$，能量将由 u 向 v 转移，因为这时对 v 极化来说正是 $\sin(\varphi'_0-2\psi')>0$ 的情形，$\varphi'_0=2\psi$，$\psi'=\psi_0/2$，ψ 代表 u 的相角。根据这一类比，不难看出 Cv^2u^* 和 Cu^2v^* 项可实现 u 极化与 v 极化间的周期性地相互开关，以 $\Delta=0$，$\Delta\varphi=0$ 为例说明这个过程。由式(12.154)，当 $\Delta=0$，$\Delta\varphi=0$ 时，如果 $A_1=A_2$，则能量交换不会发生；但如果 $A_1\neq A_2$，如 $A_1>A_2$，这时，能量还不能马上开始交换，由于这时 $\sin(\varphi'_0-2\psi')=0$。但是，由于 $|u|^2>|v|^2$，式(12.153)中自相位调制项所决定的相移随强度而增加，因此 u 极化相移比 v 极化相移增加得快，这使得 $\sin(\varphi'_0-2\psi')$ 正值增加，于是出现能量从 u 向 v 转移，经过一段时间之后，u 的部分能量转移到 v，使得 $|v|^2>|u|^2$，但 $\sin(\varphi'_0-2\psi')$ 仍为正值，因此还须花费一些时间使 v 的相移赶上 u 的相移(过去的相对积累)，因而 $|v|^2$ 还会继续增加，直到相移赶上时 $\varphi'_0=2\psi'$，这时能量停止从 u 向 v 转移。然而，能量转移是不会停止的，因为这时 $|v|^2>|u|^2$，因此 v 的相移又比 u 的相移增加得快，于是，紧接着出现 $\sin(\varphi'_0-2\psi')=-\sin(\varphi_0-2\psi)<0$，这时出现了与初始状况对调的情形，因此能量又从 v 向 u

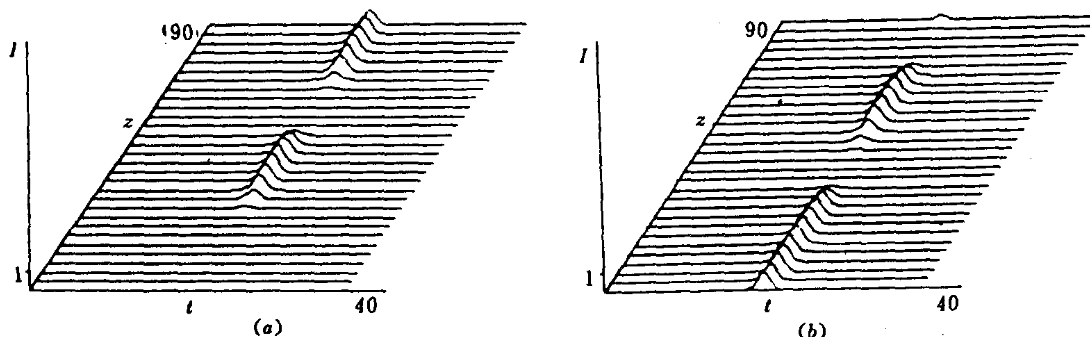
转移。这样周而复始，以后便是周期性地重复。一般情况下，上述与初始状况对调的情形，并不是完全对调(即全部参量对调)，只是一种关系对调，即虽然相移刚好对调，但对比度只是关系对调，因对比度对调后并不一定与初始时对比度相等。只有在形成周期性转移之后的对调状态才是完全对调。因此，完成第一次从 u 到 v 的转移所用时间(或传输距离 L_1)与以后 u 与 v 之间的周期相互能量转移所需时间(即半周期或传输距离 L_2)是不同的。L_1 敏感地依赖于 C 值的大小和对比度，但 L_2 只敏感地依赖于 C 值大小。在我们各种模拟中，还未发现 L_2 对对比度的明显依赖。当 C 较大或 A_1/A_2 较小时 L_1 很小，因此，这里只给出 A_2 很小的几种情况，如取 A_2 在 $10^{-6}\sim10^{-4}$ 之间，便于观察 L_1 对 A_2 的依赖关系(取 $A_1=1.0$)。要说明一点，即当 $\theta=0°$ 时，$B=2/3$，$C=1/3$，但为了研究 C 项对耦合的作用，我还是把 C 看作可变化的(即在较大值域取不同值)以便观察 C 项对能量周期转移的决定作用。图 12-2 和图 12-3 给出了 u 通道和 v 通道的典型演化过程，从中可看到启开距离 L_1 和周期性能量转移距离 L_2。图 12-4 和图 12-5 分别给出了 L_1 和 L_2 随 C 的依赖曲线(拟合)，以及 L_1 随 A_1 的依赖曲线，图中圆圈代表数值点。由图 12-4 可看出 L_1 和 L_2 对 C 的敏感依赖；由图 12-5 可知，随着 A_2 增加，L_1 对其依赖很快减弱；由此也可说明，进入周期转换之后的最大对比度比初始时的对比度小得多，因为图 12-2 和图 12-3 中 $L_1>L_2$。



$C=0.8$，$A_1=1.0$，$A_2=10^{-6}$，$\Delta=0$，$\delta=0.013$(见文献〔161〕的取值)

图 12－2　u 通道和 v 通道的典型演化过程

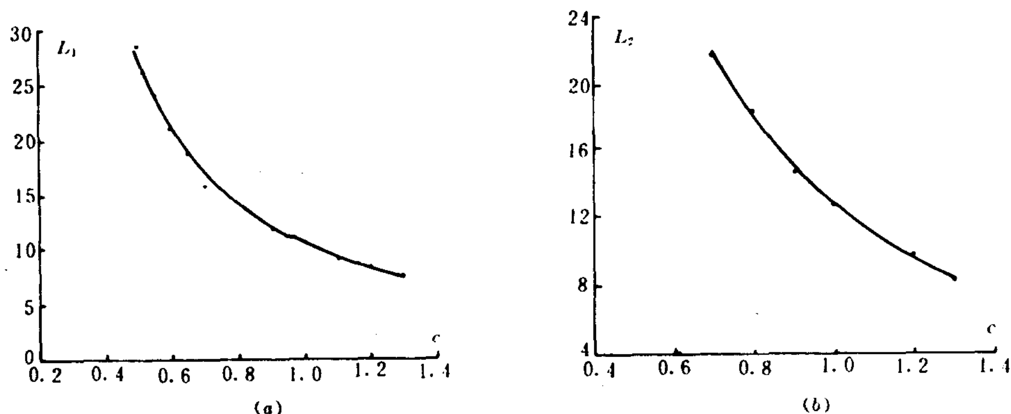
(*a*) u 通道；(*b*) v 通道



$C=0.6$，$A_1=1.0$，$A_2=10^{-4}$，$\Delta=0$，$\delta=0.013$

图 12－3　u 通道和 v 通道的典型演化过程

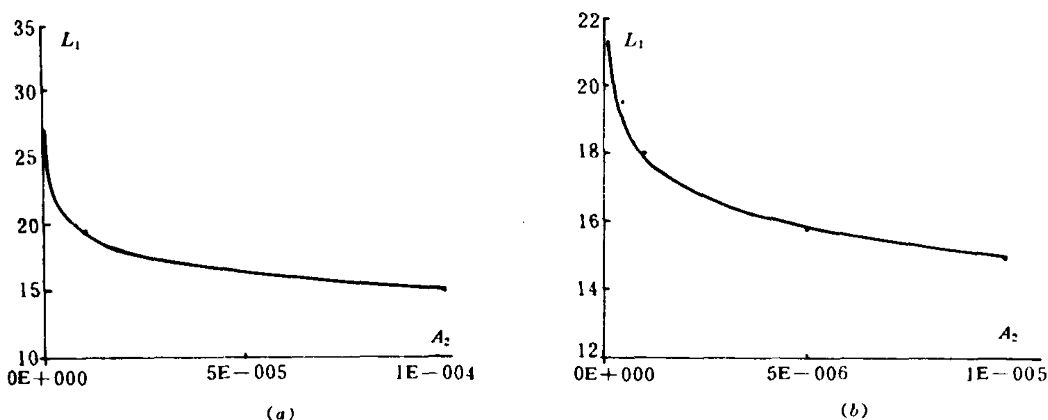
(*a*) u 通道；(*b*) v 通道



$A_1=1.0$，$A_2=10^{-5}$，$\Delta=0$，$\delta=0.013$

图 12–4　L_1 和 L_2 对 C 的依赖曲线(最佳拟合曲线)

(*a*) $L_1=18.432\,3C^{-1.37547}$；(*b*) $L_2=12.640\,3C^{-1.540\,99}$



$A_1=1.0$，$\Delta=0$，$\delta=0.013$

图 12–5　L_1 对 A_2 的依赖曲线(最佳拟合曲线)

(*a*) $L_1=5.956\,37A_1^{-0.101\,76}$，$C=0.8$；(*b*) $L_1=6.260\,59A_1^{-0.076\,27}$，$C=1.0$

12.6.3　线性极化耦合孤子开关应用设想

根据前面所述线性极化孤子的耦合特性，这里提出一种基于这种特性的全光开关机理。我们知道，文献〔194〕中提出的方案是利用 Mach–Zehnder 干涉仪，即把一信号脉冲分成两个脉冲分别进入干涉仪的每一个臂，然后在一个臂中引入另一偏振方向的开关脉冲，与这个臂中的信号进行非线性脉冲耦合，使信号脉冲产生附加相移，使得这个信号脉冲在出射端与另一臂上信号脉冲合并时，是反相相消的。文献〔195〕中的方案只不过是用光纤作为其代用品，无论是哪一种方案，都需要使开关脉冲在非线性耦合时，对信号脉冲产生的附加相移刚好为 π。因此，对这两臂中的参数以及脉冲参数有严格限制，如开关脉冲偏强，则附加相移就会偏大等。实际中，信号及开关脉冲的强弱是容易发生起伏的，因此难以将附加相移刚控制在 π 附近，因而不易获得高对比度开关。如果使用低椭圆度

线性极化双折射光纤作为耦合式开关，这时耦合行为由式(12.153)描写，于是如果把 u 通道作为信号，按图 12-6 将开关脉冲和信号脉冲同步注入双折射光纤，要求开关脉冲沿 v 极化方向偏振。根据具体光纤参数，适当选择光纤长度、开关脉冲强度及相位，使得对不同开关脉冲有正确的相对相位$(\varphi_0-2\psi)/2$，以便开关脉冲能对信号脉冲(即 u 通道)起到开和关的作用。具体地说，开关脉冲不需要比信号更强的功率，不妨取$|v|^2<|u|^2$，但为保证开关速率，尽可能大的耦合系数是必要的。对于"开"功能，要求开关脉冲进入光纤时，相对信号通道的相差$(\varphi_0/2-\psi)$应控制在 $0<\varphi_0-2\psi<\pi$。这时，u 通道(信号)便从 v 通道(控制脉冲)获得能量，经过一段耦合距离之后，两束光从光纤另一端出射并进入检偏器，滤去 v 极化分量，剩下净余的 u 极化。因此，这时对 u 极化(信号)来说是启开的。这里已看到，对开关脉冲的强度和相位要求并不太严格，因为只要求在初始时 $0<\varphi_0-2\psi<\pi$ 即可。至于 v 的强度，由于初始时$|u|^2>|v|^2$，因此 u 的相移比 v 的增加得快，即 2ψ 比 φ_0 增加得快，因而 $\varphi_0-2\psi$ 逐渐减小。如果两束光从光纤末端出射时，$\varphi_0-2\psi$ 还未减小到零，则在出射端，u 通道得到净余增长，也能通过检偏器；如果在达到出射端之前，$\varphi_0-2\psi$ 已减小到负值，则能量虽然又从 u 通道(信号)向 v 通道转移，但这也只是把在前面一段时间内从 v 通道吸收的能量还给了 v 通道，对 u 通道并不出现能量损失，在检偏器之后，仍能检测出 u 信号。对于"关"功能，要求初始时$-\pi<\varphi_0-2\psi<0$，这时能量将从 u 通道(信号)向 v 通道转移。在初始时，因$|u|^2>|v|^2$，2ψ 比 φ_0 增加得快，于是 $\varphi_0-2\psi$ 向大负值方向增加；当$|v|^2=|u|^2$ 时，$|\varphi_0-2\psi|$最大；此后，由于$|v|^2>|u|^2$，这又出现 φ_0 比 2ψ 增加得快，于是 $\varphi_0-2\psi$ 又在负值一边向零靠近。因此，为了保证：$|\varphi_0-2\psi|$最大时，不致于 $\varphi_0-2\psi<-\pi$，应尽可能使$|\varphi_0-2\psi|$的初值处在较小的值。事实上，如果$|v|^2\ll|u|^2$，则只要 $\varphi_0-2\psi\approx0$ 即可。这时甚至允许 $\varphi_0-2\psi>0$(但$|\varphi_0-2\psi|$很小)，在$|v|^2\ll|u|^2$ 这一条件下，保证 $\varphi_0-2\psi$ 由正值向负值演化，从而实现对信号的关闭，这时要求光纤长度是$L_1+L_2/2$，由图 12-2 和图 12-3 可知，这时 u 通道处于最深的关闭状态。

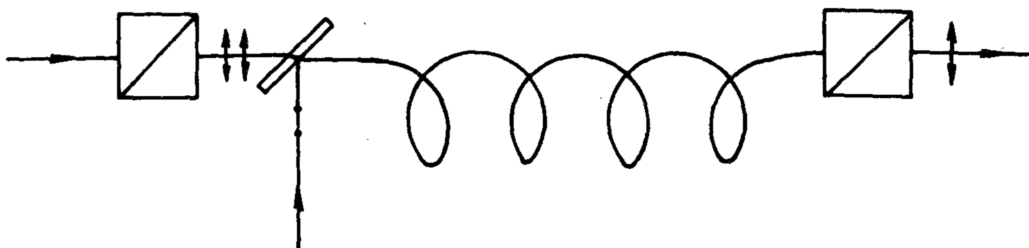


图 12-6 耦合式线性极化孤子光开关原理示意图

上述方案还存在一个困难，就是如何控制开关脉冲的相对初相位，使分别处于$(-\pi/2,\ 0)$和$(0,\ \pi/2)$之内(把$(-\pi,\ \pi)$改为$(-\pi/2,\ \pi/2)$是为了不出现 $\varphi_0-2\psi<-\pi$)。如果开关脉冲是一个与信号无关的脉冲，那么很难做到与信号脉冲的同步和相位匹配。因此，应按图 12-7 对开关脉冲进行"诱导"使之进入光纤时能与信号脉冲同步并满足需要的相位关系。借助 Mach-Zehnder 干涉仪，在其中一个臂引入控制脉冲，它与进入这个臂的部分信号脉冲一同进入光强控制相移器，使这部分信号脉冲产生所需要相移，相移量的多少由控制脉冲光强决定，如果经过相移器时，还出现了时延，则应在另一臂中使另一部

分信号产生相同的时延，或者在经过相移器后对产生的时延加以补偿，使之成为开关脉冲，并使它在干涉仪出射端与另一部分信号是同步的并具有正确的相位关系。相移器可任意选择一种光强依赖的类型，例如，可选择另一类型完全相反的双折射光纤作为相移器，这类光纤的两模群速完全失配以致 $R\delta \gg 1$(这刚好与式(12.153)的条件：$R\delta \ll 1$ 完全相反)，这时 NLSE 可写成〔62〕：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mathrm{i}\delta\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(|u|^2+B|v|^2)u=0\\ &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\mathrm{i}\delta\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+(|v|^2+B|u|^2)v=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.157}$$

虽然，上式相当于式(12.153)中 $C=0$ 的情况。因此，u 与 v 两通道是不会发生能量转移的，只会发生与对方强度相关的相移(自相移和交叉相移都只与强度$|u|^2$ 和$|v|^2$ 有关)。事实上，当 $B=1$ 时($\theta \approx 35°$)，式(12.157)也正是 Manakov 方程，已用逆散射方法得到其解。结果是：两种极化的孤子相互作用后，孤子除产生相移和时移外，不发生任何变化。例如，两反相孤子相互作用后，将产生相移 ψ_1 和时移 Δs 并分别由式(12.99)、式(12.100)给出，因此，选择控制脉冲的幅值 A_2，可得所需要的相移，然而这里出现了时移，因此需要在开关脉冲通道中对脉冲延迟 Δs 时间，或在信号通道中进行补偿。可以看到，如果控制 A_2，使开关脉冲与信号脉冲合并时刚好是反相相消的，也能实现光开关。事实上，这正是文献〔194〕和〔195〕中的方案。但是，这时对 A_2 的大小(还有 A_1 大小)应有严格的限制，才使相移刚好满足相消条件。但在上述设想方案中，却允许相移处于较大范围内，因而降低了对控制脉冲及信号脉冲强度等参数的严格限制，从而可提高开关工作稳定性。

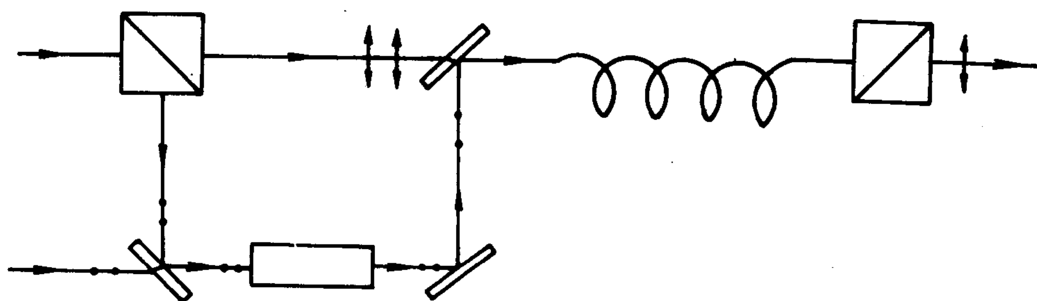


图 12-7　一种使用 Mach-Zehnder 干涉仪的线性极化孤子开关方案

12.6.4　小结

本节首先采用流体力学中水槽参量激励孤波类比方法，分析了低椭圆度线性极化双折射光纤中两传输模的耦合机理。这一分析方法是我们首次提出来的，它从动力学角度说明了耦合模之间能量转化的机理，即一传输模对另一传输模“激励”做功，能量发生转移，转移方向取决于两通道之间的相对相位。这是能量转移过程的生动形象描述。流体力学类比方法，还可直观地和定性地分析耦合器中传输脉冲之间的能量转移，因耦合模方程常含有类似于式(12.153)中的 v^2u^* 等项。数值模拟进一步显示了由这一方法所预见的能量转移现象，并观察到了第一次启开或关闭距离 L_1 和转换周期 L_2，并分析了 $L_1>L_2$ 的原因。最

后，根据孤子这种耦合行为，提出了一种全光孤子开关设想。这一设想对控制脉冲及信号脉冲的幅值等参数限制不太严格，因而允许这些参数在较大的范围内波动，从而能提高开关工作的稳定性。

此外，还有一点需要说明，即当式(12.153)的条件不能满足时，v^2u^*等项应为$cv^2u^*e^{-iR\delta\xi}$和$cu^2v^*e^{iR\delta\xi}$。这时，流体力学类比方法仍然适用，只需作代换$\varphi_0\to\varphi_0-R\delta\xi$，$\varphi'_0\to\varphi'_0+R\delta\xi$，即能量转移依赖于$\sin(\varphi_0-R\delta\xi-2\psi)=-\sin[2\psi+R\delta\xi-2(\varphi_0/2)]=-\sin(\varphi'_0+R\delta\xi-2\psi')$。因此，如果$R\delta$很小以致对光纤全长，$R\delta\xi_{max}\ll 1$，则能量转移主要由$v$和$u$自身演化而定，这就是式(12.153)的情形；若$R\delta$很大以致sin(•)发生迅速的周期变化，而作为时间累积的能量转移还来不及反应，这时就对应式(12.157)所描述的情形。

12.7　耦合孤子的相互作用

12.7.1　引言

在上一节中，我们已看到双折射光纤中孤子脉冲的耦合在光耦合器及光开关方面有着巨大的应用潜力，并综述了前人已有的研究。双折射光纤中的线性极化孤子有两种极限情况，一种是低椭圆度情况下的群速近匹配情况，这时耦合方程是式(12.153)，线性极化时，$\theta=0$，因此，$B=2/3$。另一种是群速完全失配的情形，这时方程是式(12.157)，式(12.157)也正是圆极化(即$\theta=\pi/2$)情况下的耦合方程。对于方程式(12.153)已有了许多解析分析，如文献〔157〕在等幅条件下，研究了处于不同通道的孤子相互作用。研究结果表明：这一系统支持两种束缚态，其一是两道中孤子中心为重合的强束缚态，另一种是孤子中心相距较远的弱束缚态；对弱束缚态起作用只是C项，而强束缚态的约束能则是这两项共同的贡献。式(12.153)也是文献〔158，214，215〕中线性项为零的特殊情况。如文献〔215〕的线性项是$-ku$，kv两项，文献〔214〕和〔158〕中只是符号不同而已。在文献〔214〕中，借助Hirota方法研究了以式(12.153)为模型的椭圆芯光纤束缚态极化孤子；文献〔215〕和〔159〕都是以可积系统(即Manakov方程，也就是式(12.157)中$B=1$时情况)为基础的。把式(12.153)偏离严格可积系统的部分，作为微扰Hamilton场，再以可积系统的严格孤子解作为“绝热近似”，即把解参数看作是微扰Hamilton场所支配的慢变参数，从而确定它们的演化。对于方程式(12.157)，文献〔59〕和〔216〕也用上述类似的微扰方法进行了解析分析，而且在文献〔216〕中还计及了作为微扰的损耗。文献〔159〕从数值上研究了当$B=2/3$时，式(12.157)所支配的孤子的传输及稳定性。文献〔163〕则研究了各种不同极化椭圆角θ(即不同B值)情况下，式(12.157)所决定的孤子相移和孤子光开关。在本节中，首先研究式(12.153)所决定的不同通道中非等幅线性极化孤子的相互作用特点，这是解析方法难以做到的；然后研究在正常色散区(即$\sigma=-1$)情况下，圆极化暗孤子的耦合传输及相互作用规律。前面所有文献都是取$\sigma=1$(即反常色散区)进行分析的。这是因为这种情况是光孤子通信和光孤子开关感兴趣的区域，而对暗孤子，也有助于对正常色散区非线性动力学，包括非线性耦合的研究。

12.7.2　不同线性极化孤子间的相互作用

在反常色散区 $\sigma=1$、线性极化下，式(12.153)中的 $B=2/3(\theta=0°$ 时，虽然 $C=1/3$，小 C 值表现为长周期，但为了在分析中能多观察几周期的能量转移和相互作用，我们把 C 取成 1。因为，我们的目的是研究这个过程中的物理机制，试图找到一般性规律)。对于非等幅孤子的相互作用，只能借助数值方法，用分裂步长 Fourier 变换法，可模拟式(12.153)在式(12.154)初始注入情况下的演化及耦合。式(12.153)中有三项非线性项：即自相位调制项，它是形成孤子态的保证；其次是非相干的交叉调制项，即 B 项；最后是相干交叉调制项，即 C 项。对于 C 项的作用，在前一节中已阐述清楚，即两通道间通过类似于流体力学中参量激励而相干并实现能量转移；而 B 项则是非相干的，它提供了孤子间的作用能，对应于相互作用力，按照作者给出的孤子相互作用等价粒子理论[118]，孤子间的相互作用取决于两孤子的交叠积分。对式(12.153)，正是与 B 项对应的积分，它决定了不同通道中孤子间的相互作用力。然而 C 项在耦合中起双重作用，一方面它作为另一种交叠积分，对相互作用能有贡献；同时又作为相干激励使能量发生转移。事实上，按文献〔118〕中孤子相互作用的等价粒子理论，双通道中孤子相互作用一般应是四体问题，而不是二体问题；虽然在式(12.154)初始注入下，相互作用一开始可认为是二体问题。由于相干项的作用，使 u 道中孤子 $u_1=u(0, s)$(即式(12.154))的能量向 v 道转移，并在 v 道中(与 u 道中的 u_1 孤子同位置处)产生一个脉冲，记为 v_2(由 u_1 的能量转移到 v 道而形成)。同理，v 道中的孤子 $v_1=v(0, s)$的能量向 u 道转移，并在 u 道产生一个 u_2。因此，一般情况下，构成了由 u_1，v_1，u_2，v_2 组成的四体问题。在 u_1—v_2 及 v_1—u_2 作用中，相干项与非相干项同等重要，它们造就了前面所述的能量在两通道之间的周期性转移。v_1—v_2 及 u_1—u_2 作用分别可作为如同文献〔118〕中单通道中双孤子的相互作用(因在同一通道中)，例如对于 u_1—u_2 作用，在文献〔118〕的近似条件下，作用势主要由 $\hat{V}_1=V_1$ 的实部决定，即

$$
\begin{aligned}
V_1 &\approx \mathrm{Re}[-2u_2^* u_1 - 4u_2 u_1^*] \\
&= -6\eta_1\eta_2 \mathrm{sech}(x-x_1)\mathrm{sech}(x-x_2)\cos(\theta_2-\theta_1)
\end{aligned} \tag{12.158}
$$

式中，x_1，x_2，η_1，η_2 及 θ_1，θ_2 代表 u_1 及 u_2 孤子的位置、幅值及相位。由文献〔118〕可知，当 $\cos(\theta_2-\theta_1)>0$ (即 $V_1<0$) 时代表吸引势，$\cos(\theta_2-\theta_1)<0$ (即 $V_1>0$) 代表排斥势。双孤子相互作用的解析及数值分析都表明：当初始时 $\cos(\theta_2-\theta_1)>0$ 时，孤子对将相互吸引，同时相位差也发生变化，达到最小间距；相位差变化到使 $\cos(\theta_2-\theta_1)<0$，于是又出现相互排斥而远离；当达到最大间距时，相位差又变化到使 $\cos(\theta_2-\theta_1)>0$。这样形成周期性地靠近与远离。$u_1$—$v_1$ 及 u_2—v_2 作用与 u_1—u_2 作用非常不同(在不同通道中)，以 u_1—v_1 作用为例，把式(12.153)写成类似于文献〔118〕中的微扰形成，则 $\hat{V}_1=V_1$ 是

$$
\begin{aligned}
V_1 &= -\left[B|v_1|^2 + \frac{Cv_1^2 u_1^*}{u_1}\right] \\
&= -A_2^2 \cdot \mathrm{sech}^2\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)[B + C\cos(2\varphi_2 - 2\varphi_1)]
\end{aligned}
$$

$$+ \mathrm{i}A_2^2C \cdot \mathrm{sech}^2\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)\sin(2\varphi_2 - 2\varphi_1) \tag{12.159}$$

上式是把式(12.154)代入得到的。当初始注入满足 $\varphi_1=\varphi_2$ 时，在慢变近似下，上式右边第二项(即虚部)可以忽略。因此，在开始的一段距离上 $V_1<0$，即两通道孤子总是相互吸引的，这就解释了数值模拟中观察到的现象，即在开始的很短距离上，孤子总是相互靠近的。一般情况下，V_1 的虚部是不能忽略的，它代表了两孤子能量转移。也就是说，动量转移主要由 V_1 的实部描写；而虚部描写能量转移。这一点可通过文献〔118〕中的式(4)看出。我们也注意到，它与前一节分析吻合，那里的 $\sin(\varphi_0-2\psi)$即式(12.159)中的 $\sin(2\varphi_2-2\varphi_1)$。因此，可以预料，不同通道中孤子的耦合，既有单通道中孤子的相互作用(v_1—v_2 及 u_1—u_2 作用)的特征，也具有前节研究中所观察到的能量周期转移特征(u_1—v_2 及 v_1—u_2 作用)；同时，还存在交叉相互作用(即 u_1—v_1 及 u_2—v_2 作用)。数值研究的结果表明，在非等幅情况下，也确实存在与文献〔157〕中等幅解析结果类似的现象，即也存在两种类型的束缚态。当初始间距足够大时，由于初始相互作用势能很小，也就是 u_1—v_1、v_2—u_2 作用和 v_1—v_2、u_1—u_2 作用都很小，孤子基本维持不变间距，这时几乎只有 v_1—u_2，u_1—v_2 作用，它使孤子对中每个孤子的能量在两个通道之间周期地转移。图 12–8 给出一例，从中可看到上述特点。随着初始间距的减小，初始相互作用势能增大，这时，u_1—v_1、v_2—u_2 作用和 u_1—u_2、v_1—v_2 作用变为重要，它们使两孤子动量发生变化，即孤子在开始很短距离上吸引靠近，但因其相对相位变化，很快出现 $\cos(2\varphi_2-2\varphi_1)<0$ 等情形，于是出现孤子迅速远离，势能转化成各自动能。当间距增大到充分大时，相位关系还没有反转(即像单通道中双孤子相互作用那样，在达到最小间距时，相位由 $\cos(2\theta_2-\theta_1)>0$ 反转成 $\cos(2\theta_2-2\theta_1)<0$)；当距离增大到很大(如 $\Delta\geqslant 8$)时，相互作用势能又减小到很小(即相互作力很小)，从这以后，u_1—v_1 及 u_2—v_2 作用和 u_1—u_2 及 v_1—v_2 作用很小，出现无相互作用特征，两孤子几乎匀速相互远离，每个孤子的能量却同单孤子一样，在 u 道和 v 道之间相互转移，这种转移经第一次之后，也是周期性的，这个过程是由 v_1—u_2 及 u_1—v_2

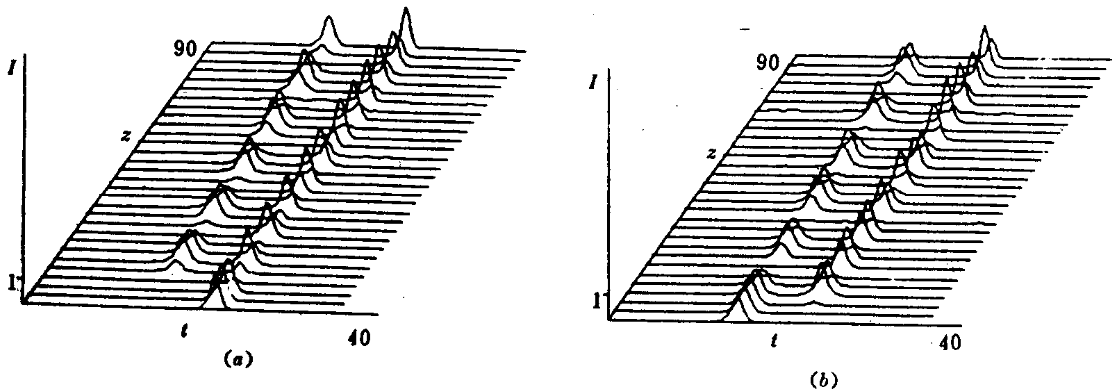


图 12–8　不同通道中孤子间的耦合与相互作用

($C=1.0$，$A_1=1.2$，$A_2=1.0$，$\Delta=8$，$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$，$\delta=0.013$)

(a) u 通道；(b) v 通道

作用而起作用的。

同时，我们注意到，图 12–9 和图 12–10 中，在前一段较短时间内，较小幅值的孤子的能量向较大幅值孤子发生了不可逆转的转移，很快达到一定的比例构成之后稳定下来。这种比例构成与初始间距有关。从图 12–9 和图 12–10 可看出，初始间距 Δ 越小，向大幅孤子转移能量越多；当 Δ 继续减小并达到充分小时(如 Δ⩽ 2)，孤子能量几乎全部转移到原来的大孤子。这时，也可认为是两通道中孤子位置出现合并，形成另一种束缚态，这一束缚态也类似于文献〔157〕等幅解析结果所预示的中心重叠束缚态，图 12–11 就是一例。在这种情况下，u 与 v 之间能量转移量明显下降，这是因为作为时间积累的能量转移跟不上相位差的迅速的周期性变化。出现上述不可逆转的能量转移的原因可作如下的分析。当初始间距 Δ 不过分小时，两孤子各占一通道，这时只有 u_1—v_1 作用，由式(12.159)可知，u_1 与 v_1 是相互吸引的；又由于在 u_1 的中心处，$|u_1|^2>|v_1|^2$ 且是同初相的，因此，在此处 u_1 的相位增长快于 v_1(仅在此处)，于是能量由 u_1 向 v 道转移形成 v_2，这时能量转

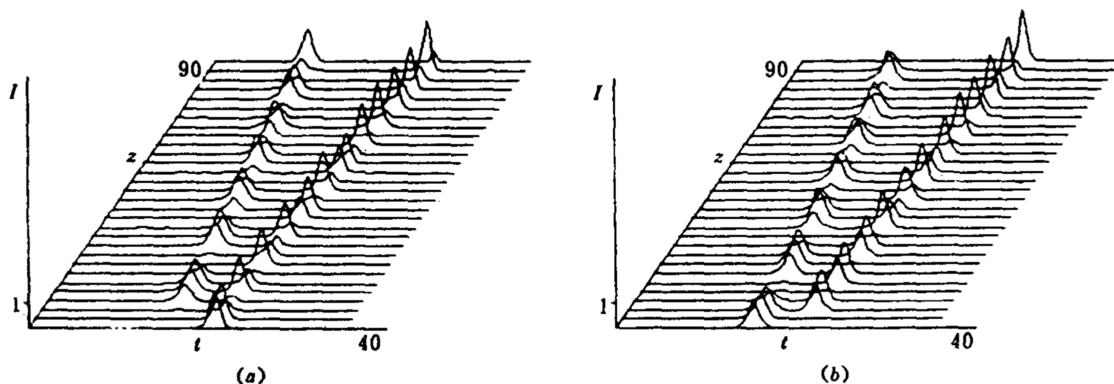


图 12－9 不同通道中孤子间的耦合与相互作用
($C=1.0$, $A_1=1.2$, $A_2=1.0$, $\Delta=6$, $\delta=0.013$)
(*a*) u 通道；(*b*) v 通道

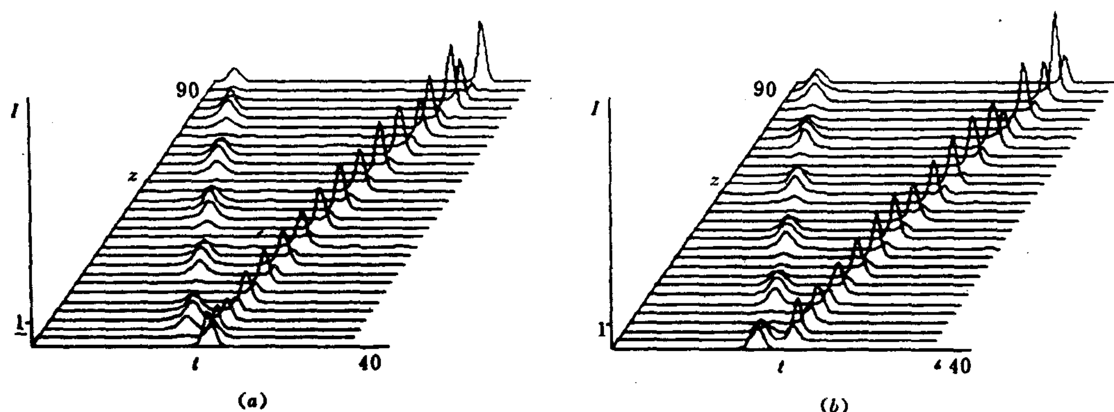


图 12－10 不同通道中孤子间的耦合与相互作用
($C=1.0$, $A_1=1.2$, $A_2=1.0$, $\Delta=4$, $\delta=0.013$)
(*a*) u 通道；(*b*) v 通道

移速度取决于$|u_1|^2$。同理，在v_1的中心处，$|v_1|^2>|u_1|^2$，也是同初相的，因此能量由v_1向u道转移形成u_2，转移速度取决于$|v_1|^2$，因而u_2的增长慢于v_2。从图12–9可证实这一点，即v道中第二条线就出现了v_2的波形，但这时u道中的u_2还没明显生长出来。由于相互吸引作用，当u_2—u_1及v_1—v_2达到最近距离时，u_2与u_1及v_1与v_2重叠最多，这时由u_1向v_2的能量转移速度取决于$|u_1+u_2|^2$在u_1中心处的值，而v_1向u_2的转移速度取于$|v_1+v_2|^2$在v_1中心处的值，在达到最近间距及其以后的一段时间内，一方面u_1—u_2，v_1—v_2经过最大重叠程度后出现远离，同时v_1已把大部分能量转移到u_2上，使得$|u_1+u_2|^2$在u_1处的值较大，而$|v_1+v_2|^2$在v_1处的值较小，出现由u_1和u_2(重叠部分)向v_2的能量转移快于由v_1和v_2向u_2的转移。于是，在这期间v_2从u_2中(即从u_2与u_1重叠的部分中)获得更多的能量。最后结局是：能量先由v_1转移到u_2，再从u_2通过上述机理转移到v_2，使得大幅孤子(即u_1或v_2，即各通道右边孤子)被增强，小值孤子(即v_1或u_2)被削弱，由于孤子在这一过程已被迅速地排斥远离，使能量转移(无论沿什么方向进行)量被减弱，于是在能量逆转移中，得不到等量的回报，从而出现不可逆转的转移。初始间距越小，最近间距也越小，因而上述重叠部分越大，能量转移越多；当Δ很小，就出现图12–11所表现的情形。

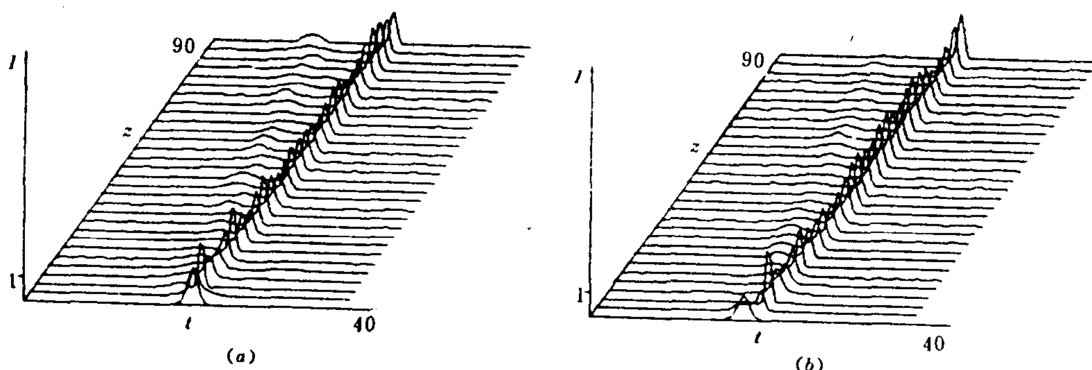


图12–11　不同通道中孤子间的耦合与相互作用

($C=1.0$, $A_1=1.2$, $A_2=1.0$, $\Delta=2$, $\delta=0.013$)

(*a*) u通道；(*b*) v通道

12.7.3　不同圆极化暗孤子及其相互作用

对于暗孤了注入双折射光纤，将会有什么现象，目前作者未见有关研究报道。下面先从最简单的耦合方程即式(12.157)出发，并取$\sigma=-1$(正常色散区)，研究圆极化暗孤波的耦合。数值模拟表明，单个暗孤波在耦合通道的演化行为与单通道光纤(即非耦合NLS方程)的行为相似，只是在连续波背景上出现了许多色散振荡。然而，对单通道，连续波背景是平坦的。图12–12和图12–13给出了双通道中孤子与双孤子的耦合，其中u与v道的初始注入相同，且注入幅值为1，在演化过程中它们都没有垮台迹象(总归一化距离为45)，

这说明这样的耦合系统是支持暗孤波的，这为我们进一步解析分析提供了线索和指导。

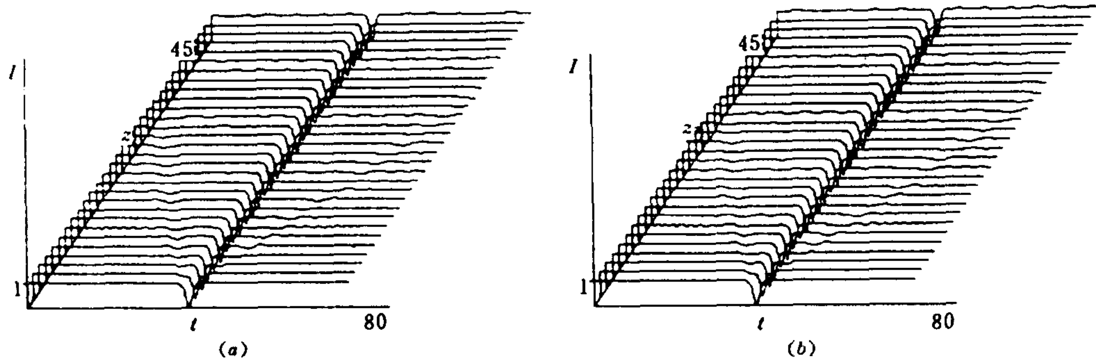


图 12-12　单暗孤子耦合($\delta=0.013$，$\sigma=-1$，$\Delta=0$)

(a) u 通道；(b) v 通道

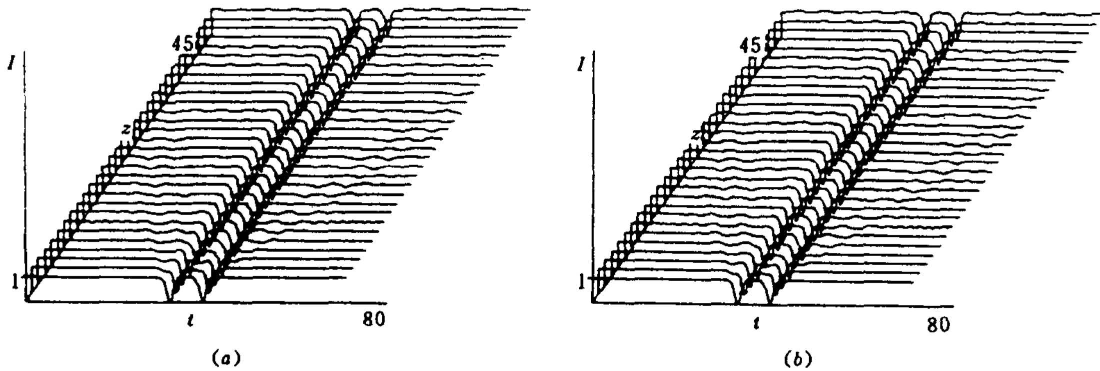


图 12-13　双暗孤子耦合($\delta=0.013$，$\sigma=-1$，$\Delta=8$)

(a) u 通道；(b) v 通道

为了比较，图 12-14 给出了单通道系统中暗孤波的传输演化过程。

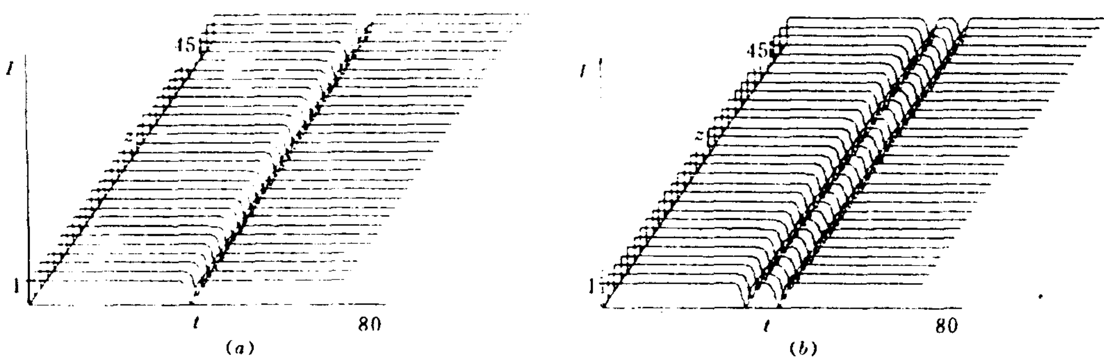


图 12-14　单通道中暗孤波的演化

(a) 单孤子；(b) 双孤子

在单通道光纤的正常色散区，我们的解析分析的结果表明(见前面章节)，在连续波背景上存在小振幅明孤波和小振幅暗孤波。数值研究中，我们首次发现，在双折射光纤的正常色散区，当一个通道中注入基本暗孤波，在另一个通道中注入连续波时，能在连续波背

景上激发出一个小振幅明孤波。图 12–15 给出一例，u 信道初始注入是一连续波均匀背景，v 信道初始注入是一基本暗孤波，双通道耦合结果是，在 u 信道激发出了一个小振幅明孤波和一系列色散波，在 v 信道中，暗孤波一直维持着，同时出现了与 u 信道互补的色散波，这一数值事例表明，耦合系统支持基本暗孤波和小振幅明孤波之间的耦合，这一点又为我们提出了解析分析任务。

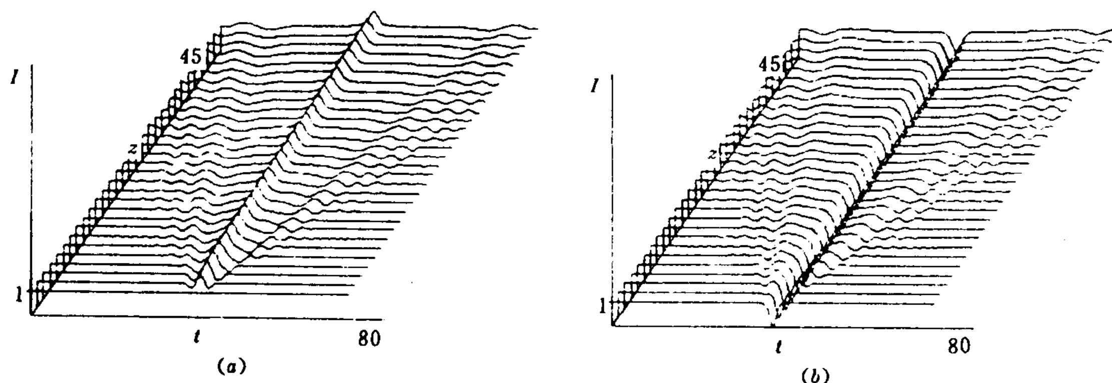


图 12–15　在连续波背景上激发小幅孤波($\delta=0.013$，$\sigma=-1$)
(*a*) u 初始注入是连续波；(*b*) v 初始注入是基本暗孤子

12.8　交叉相位调制对孤子传输及光通信的影响

12.8.1　偏振不稳定性

双折射对连续波及孤子传输将产生许多新效应，如偏振不稳定性，能量转移，脉冲整形和开关效应等。连续波的偏振不稳定性是指，当输入功率或偏振态有很小的改变时，输出的偏振态有很大的变化。当入射功率大到足以使非线性长度 L_{NL} 可与固有偏振拍 L_B 相比较时，就产生偏振不稳定性[217, 218]。这时的功率称为临界功率 P_{cr}，当 $P_i=P_{cr}$ 时，就是非线性双折射(即感应双折射)可以抵消线性双折射(即固有双折射)的情况。这时由于当入射光束接近慢轴方向偏振(即 x 轴，$n_x>n_y$)时，非线性双折射加上固有双折射，使总双折射增加，但在接近快轴方向偏振时，非线性双折射减去固有双折射使双折射减小，这使有效拍长 L_{Beff} 增加；当 $P=P_{cr}$ 时，$L_{Beff}\to\infty$。临界功率 $P_{cr}=3\Delta\beta/2\gamma$，$\Delta\beta=\beta_{1x}-\beta_{1y}$。实验已观察到偏振不稳定性[218]，如果固有双折射被调制，偏振不稳定性可导致偏振态的混沌[220]。

12.8.2　双折射对孤子传输的影响

前面几章对光孤子的讨论都是假定入射脉冲沿保偏光纤的一个主轴线偏振的。本节将以本章给出的耦合 NLS 方程为基础，进一步考虑当理想条件(入射偏振角 $\theta=0°$ 或 $90°$)在实际情况下不能满足时，孤子所受到的影响。有两个重要的问题：第一，在弱双折射光纤中，入射峰值功率可能超过偏振不稳定性临界值，偏振不稳定性反过来将可能影响接近快轴偏振的孤子发射；第二，在强双折射光纤中，两个正交偏振分量间的群速失配可导致

脉冲分裂，这可能影响孤子特性。

首先，考虑在弱双折射光纤中偏振不稳定性对孤子的影响。如果忽略群速失配，可设 $\beta_{1x}=\beta_{1y}$，类似地，$\beta_{2x}\approx\beta_{2y}=\beta_2$，用归一化变量可以改写这两个耦合方程(见前节)，并且引入孤子的参量:

$$N^2=\frac{L_D}{L_{NL}}\qquad z_0=\frac{\pi}{2}L_D\qquad L_D=\frac{T_0^2}{|\beta_2|}\tag{12.160}$$

式中，L_D 是色散长度，T_0 是脉宽，而 β_2 即为 k''_0。

数值分析结果表明[165]，偏振不稳定性对孤子稳定性的影响与上小节中讨论的连续波情况类似。当入射峰值功率超过临界值或者是当非线性长度 L_{NL} 大于偏振拍长 L_B 时，不论入射时偏振接近快轴还是接近慢轴，孤子都保持稳定。相反，如果 $L_{NL}\ll L_B$ 时，孤子沿慢轴保持稳定，而沿快轴却不稳定。$L_{NL}\ll L_B$ 时，近快轴发射的基态孤子($N=1$)变化情况如下[165]，由于偏振不稳定性的作用，在几个孤子周期内大部分脉冲能量由快模转移到慢模，同时部分能量被色散，脉冲能量在两个模之间来回转换，这一过程与弛豫振荡相似，可是大部分入射能量最终表现为类孤子脉冲沿慢轴传输。高阶孤子情况有些不同，经过初始的压缩阶段后，它们衰变成单个分量，然后部分能量转移到慢模上，最终表现为基态孤子沿慢轴传输，其脉宽比入射脉宽窄，耦合非线性薛定谔方程也有一个对应于基态孤子的精确解，其快、慢分量在传输时形状不变[221]。两分量一般具有不对称形状，并且慢分量具有双峰结构。连续波不稳定性条件也可用来获得孤子周期的一个条件，如果用上小节的条件，即 $P_0>P_{cr}$，可写成 $\Delta\beta L_{NL}<2/3$，用 $\Delta\beta=2\pi/L_B$ 和 z_0 的表达式，则 $z_0<N^2L_B/6$ 与数值分析结果基本一致[165]。即使对弱双折射光纤，典型的 $L_B<1$ m，如果 $\beta_2=-20\ \text{ps}^2/\text{km}$，一个波长为 1.55 μm 的基态孤子($N=1$)，仅对 fs($T_0<100$ fs)脉冲，才有 $z_0<1$ m。这样，对孤子通信系统，典型的 $T_0\approx10$ ns 和 $z_0\approx1$ km，就不必考虑偏振不稳定性。

在强双折射光纤中，快分量和慢分量之间的群速失配不可忽略。如果入射偏振角 θ 偏离 0° 或 90°，这样的失配将使孤子分裂成沿两个偏振轴的分量，这些分量是继续远离还是互相靠近取决于入射参数。如果假设 $\beta_{2x}=\beta_{2y}=\beta_2$，并且用归一化变量，方程即变成式(12.157)，这时 u 和 v 就是沿 x 轴和 y 轴的归一化幅值，并且 $\delta=(\beta_{1x}-\beta_{2x})\cdot T_0/|2\beta_2|$，假设双折射相当大，峰值功率比偏振不稳定性的临界值小得多，所以方程中的 u^2v^* 和 v^2u^* 项已被忽略；为了简化也忽略了光纤损耗。对偏振角为 α 的入射脉冲 $u(0,\ \tau)=N\cos\alpha\cdot\text{sech}(\tau)$，$v(0,\ \tau)=N\sin\alpha\cdot\text{sech}(\tau)$，同上两节一样，数值求解式(12.157)即可。

数值分析结果可概括如下[161]：当两个模相等($\alpha=45°$)时，如果 N 超过临界值 N_{th}，则两分量仍被束缚在一起。N_{th} 取决于 δ：当 $\delta=0.15$ 时，$N_{th}=0.7$；但当 $\delta=0.5$ 时，$N_{th}=1$。当两个模不相等并且 N 超过 N_{th} 时，不同的 δ 值产生不同的变化情况。图 12.16 给出 $\xi=5\pi$ 和 10π 处 $\alpha=30°$ 时两个模的脉冲振幅；左边一列对应于 $\delta=0.15$ 和 $N=0.8$，右边一列对应于 $\delta=0.5$ 和 $N=1.1$。对于 $\delta=0.15$ 的情形，较小的脉冲看上去被较大的脉冲俘获，并且两脉冲一起运动。对于 $\delta=0.5$ 的情形，较小脉冲仅一部分能量被较大脉冲俘获，剩下的能量在传输过程中被色散掉。对更大的 δ 和 N 值，将产生更复杂的行为。

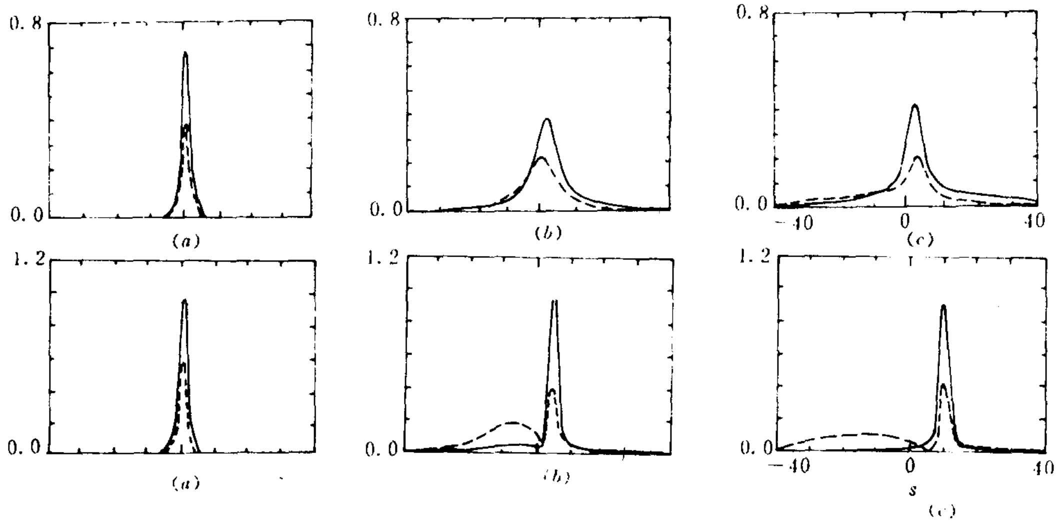


图 12−16 $\alpha=30°$ 时，两个模的脉冲振幅

(a) 在 $\xi=5\pi$ 处；(b) 在 $\xi=10\pi$ 处

总之，光纤中的非线性双折射可在许多方面影响孤子的传输，从实际角度出发，人们也许会问群速失配将怎样影响孤子光通信系统的性能。对保偏光纤情况，理想的孤子应沿某一主轴方向偏振发射。这一节的结果表明稍微偏离理想条件并不严重地影响孤子特性。因为具有较大振幅的偏振模式可以俘获另一个偏振模式，以致尽管它们的群速不同，却仍能一起传输；普通非保偏光纤中的随机双折射变化对孤子传输的影响至今还没有较好的认识。

12.8.3 交叉相位调制对孤子通信的影响

因为光纤常被用于信息传输，所以了解本章讨论的交叉相位调制效应如何影响光通信系统的性能是很重要的[222, 223]。在多信道(波分复用)系统中，自相位调制和交叉相位调制都将影响到每个信道中光场的相位。当信号通过振幅调制和非相干解调时，像直接接收的通信系统那样，非线性相位改变并不产生什么后果。可是，如果用到相干解调技术时，这种相位改变将严重地限制系统的性能。为了清楚地看出这种限制，我们考虑一个有 M 个信道的相干通信系统，每个信道中的振幅设为 $A_j(j=1, 2, \cdots, M)$。对典型的比特率(≈ 1 Gb/s)，比特通道足够宽。当考虑非线性效应时，色散效应显得较次要，所以 A_j 的方程可写成

$$\frac{\partial A_j}{\partial z}+\frac{\alpha}{2}A_j=\mathrm{i}\gamma\left[|A_j|^2+2\sum_{m\neq j}^{M}|A_m|^2\right]A_j \tag{12.161}$$

式中，假设光纤损耗 α 和非线性参量 γ 对所有信道是一样的。方程式(12.161)包括了所有信道的交叉耦合作用。此 M 组耦合方程能解析求解，其结果为

$$A_j=\sqrt{P_j}\exp(\mathrm{i}\varphi_j) \tag{12.162}$$

式中，P_j 是第 j 个信道的功率，并且

$$\varphi_j=\gamma L_{\mathrm{eff}}\left[P_j+2\sum_{m\neq j}^{M}P_m\right] \tag{12.163}$$

L_{eff} 由方程式(12.160)给出。典型的光纤长度 L 一般大于吸收长度($L \gg 1/\alpha$)，并且 L_{eff} 可由 $1/\alpha$ 近似。

对信息传输，是振幅调制还是相位调制两种情况必须分清。

首先考虑相位调制情形。由于对所有比特来说，每个信道中的功率保持恒定，所以对于所有比特，非线性相位改变也相同。这种通信系统的根本限制不是由于相位改变而是来自相位的起伏。因为方程式(12.163)中的 φ_j 与功率有关，功率的起伏导致相位起伏，从而降低了光纤输出端的信噪比。为了简化，如果假设每个信道中相等的平均功率具有相同的标准偏差 σ_p，则相位起伏的标准偏差变为[222]

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\gamma\sigma_p}{\alpha} + \frac{2\gamma\sigma_p}{\alpha}(M-1)^{1/2} \tag{12.164}$$

式中，用到方程式(12.163)并且有 $L_{\text{eff}} \approx 1/\alpha$。式中的两项分别代表自相位调制和交叉相位调制对 σ_φ 的贡献。作为数量级的估计，如果取 $\gamma \approx 1\,\text{W}^{-1}\text{km}^{-1}$，$\alpha = 0.046\,\text{km}^{-1}$ (0.2 dB / km)，以及对 1.55 μm 通信系统的典型值，$\sigma_\text{p} \approx 0.1$ mW，则可得 $\gamma\sigma_\text{p}/\alpha \approx 0.02$。自相位调制对 σ_φ 的贡献非常小，可以忽略。而交叉相位调制的贡献与信道数有关，可以变得很大，对应于约 0.5 dB 的功率损耗，估计 $\sigma_\varphi \approx 0.15$。由方程式(12.164)可知，当 $M > 20$ 时，交叉相位调制效应将严重损害系统的性能。

现在考虑振幅调制的相干通信系统。如果用相敏(零差)探测技术，取决于相邻信道的比特形式，相位 φ_j 可在比特之间变化。最坏的情况下，一个给定信道由交叉相位调制引起的相移为 $\Delta\varphi = 2(\gamma/\alpha)(M-1)P$。式中，$P$ 是功率，并假定在每个信道中有相同的值。如果我们取一个适当值 $\Delta\varphi < 0.1$，则每个信道中的功率被限制在 $P < 0.05\alpha/[\gamma(M-1)]$，这种限制说明即使对 $M = 5$，功率 P 也必须小于 1 mW。

在一个两信道的实验中已观察到了交叉相位调制效应[223]。由工作在 1.3 μm 和 1.5 μm 附近的两半导体激光器发出的光入射到一段 1.5 m 长的单模光纤中，用一干涉仪测量由 1.3 μm 波引起的 1.5 μm 波的相移。当 $P = 1$ mW，实验测得的相移 $\Delta\varphi = 0.024$，这个值与方程式(12.165)的预计值 0.022 非常一致。

12.9 反向传输的光波间的耦合[192]

前面已考虑了两个共同传输光波间的交叉相位调制，这两个波具有不同的波长或不同的偏振。第三种可能是两光波具有相同的波长和偏振态，但在光纤中以相反的方向传输，前向和后向传输的光波通过交叉相位调制发生相互作用，这样的互作用可导致新的特性。当用光纤构成一个非线性环形腔时，这种特征表现为光学双稳性[224]，这样的互作用也能导致光学不稳定性和混沌[225, 226]。具有特殊意义的是交叉相位调制产生的非互易性，它可影响光纤陀螺仪[227~230]和光纤喇曼激光器的性能[230]。反向传输光波间非互易性的起因可按 12.1 节的分析理解。如果 A_1 和 A_2 分别是前向和后向传输波的振幅，它们满足下面耦合振幅方程，即对于 A_j 满足

$$\pm\frac{\partial A_j}{\partial z} + \frac{1}{v_x}\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{i}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A_j = i\gamma(|A_j|^2 + 2|A_{3-j}|^2)A_j \tag{12.165}$$

式中的正负号分别对应于 $j=1$ 或 2。对连续波情形此方程已解出：为了简化而忽略光纤损耗，此解为

$$A_j(z)=\sqrt{P_j}\exp(\pm i\varphi_j) \tag{12.166}$$

式中，P_j 是峰值功率；非线性相移 φ_j 为

$$\varphi_j=\gamma z(P_j+2P_{3-j}) \tag{12.167}$$

如果 $P_1\neq P_2$，对两个反向传输的光波，相移 φ_1 和 φ_2 并不相同，这种非互易性是因为方程式(12.167)中交叉相位调制项出现的因子 2。

交叉相位调制产生的非互易性对高精度光纤陀螺仪是有害的[231, 232]，这种仪器用来测量每小时小到 0.01° 的旋转速率，其工作原理是基于萨格纳克效应，此效应在两反向传输的光波之间引入一个与旋转有关的相位差，净相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_j-\varphi_2=\gamma L(P_2-P_1)+S\Omega \tag{12.168}$$

式中，L 是光纤总长度；Ω 是旋转速率；S 是比例因子，它与光纤长度 L 以及光纤环的半径有关[231]。如果功率 P_1 和 P_2 是常数，方程式(12.168)中的交叉相位调制项影响不大。可是在实际情况中，功率可能会波动。如果用 $\gamma=10\ \mathrm{W^{-1}km^{-1}}$ 和 $L\approx 100$ m，即使两反向传输波之间的功率差为 1 μW，也可使 $\Delta\varphi$ 改为约 1×10^{-6} rad。这个值恰恰对应于一个等价的旋转速率(≈ 0.1° ／h)。这表明交叉相位调制将严重地限制光纤陀螺仪的灵敏度，除非功率精度被控制在 10 nW 之内。

有几种方法可用来减小交叉相位调制的影响，改善陀螺仪的性能。一种方法[233]是在两反向传输波未进入光纤环之前，使该激光功率被调制。因为光波与时间有关，这种情形可通过用适当的边界条件解方程式(12.165)来分析[233, 234]。其结果表明，如果适当选取调制频率，非互易效应可明显减小。其物理意义可理解为：仅当两脉冲在时域中有重叠时，才产生交叉相位调制。本质上是交叉相位调制引起的非互易性产生于反向传输波之间的干涉，调制降低了反向传输波之间的相干性，因而减小了这种干涉的效果。确实，利用有限相干时间的宽带光源也可得到相同的结果[227~229]。为此，热源和发光二极管都曾被采用过[231]。

下面再来简单地讨论交叉相位调制对光学双稳性的影响，任何插入腔内的非线性介质都能表现出双稳性[235, 236]，光纤也不例外。如果为此作一光纤环形腔，则不论光束沿顺时针方向还是沿反时针方向传输，都能产生光学双稳性。当光束沿两个方向入射时，可产生一种新的现象，因为交叉相位调制在反向传输光束之间产生耦合，所以这种器件可作为两个耦合的双稳系统，并且能表现出许多新的特性[224]。可是尽管对光纤环形腔中单向传输的情形已观察到光学双稳性[226]，但双向传输情形在实验上还没有引起足够的重视。但由于单模光纤中的光学双稳性可以用作快速光学开关，所以很可能变得非常重要。

12.10 双折射光纤中的孤子影

我们知道式(12.157)可认为是线性极化($B=2/3$)或圆极化光纤中的耦合方程，文献〔59, 163, 237, 238〕等对此作了数值的和解析的研究，在耦合过程将引入一个影子。下面通过数值模拟详细叙述影子的特点，在模拟中取 $B=2/3$，并使用相同幅值的初始注

入，即

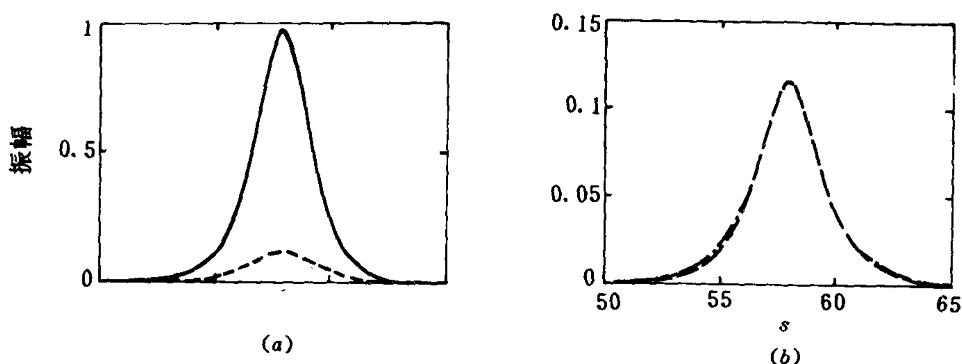
$$u(\xi=0,\ s)=A_0\mathrm{sech}[A_0(s+s_0)]$$

$$v(\xi=0,\ s)=A_0\mathrm{sech}[A_0(s-s_0)$$

不失一般性，取 $\delta=1$。对于其它 δ 值时孤子影子，可通过变换得到：$u'=\alpha u$，$v'=\alpha v$，$s'=s/\alpha$，$\xi'=\xi/\alpha^2$，$\delta'=\alpha\delta$，$B'=B$。这里 α 是尺度变换因子。图 12-17(*a*)给出了初始时的 u 极化经耦合之后，在 v 极化中引入的影子。其中，实线是 u 的强度，虚线是影子的剖面，即在 u 中心附近处的 v 极化强度。注意由于方程的对称性，初始时的 v 极化经耦合之后，也必将在 u 极化中引入一个 v 的影子，这个影子在 v 初始注入孤子中心的附近，这完全是对称的。因此，只需要讨论 u 的影子即可。图 12-17(*b*)给出了在传输 50 个孤子周期的距离后影子的放大图，即图 12-17(*a*)中影子的放大图(见虚线)和由文献〔217〕中给出的解析近似式

$$I_{\text{Amplitude}}==A_{\text{shadow}}=\{\mathrm{sech}(A_{\text{soliton}}(s-s_p)\}^{(\sqrt{1+8B}-1)/2} \tag{12.169}$$

的曲线，这个解析近似式与数值模拟的平均相对误差不大于 3.4%，差异的主要原因是影子的 FWHM(3 dB 宽度)是孤子的 1.2 倍。



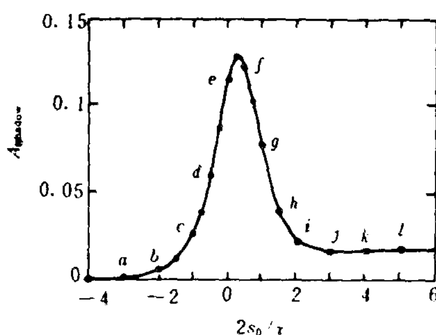
实线是 u 极化，虚线是 v 极化，点画线是解析近似

图 12-17　双折射光纤中的孤子影

(*a*) 孤子及其影子：(*b*) 在 50 倍孤子周期的距离处的影子(即 v 极化)剖面及其解析近似

影子的幅值与初始间距 $2s_0$ 有一定的关系，在 $A_0=1$ 一定时，这种关系由图 12-18 给出。其中：$s_0>0$ 时，u 在左边，v 在右边，而 u 和 v 分别是向右和向左运动的，故二者会相遇；当 $s_0<0$ 时，二者不会相遇，即不会相互穿过；当 $2s_0<0.254\tau$(τ 是孤子的 FWHM)时，A_{shadow} 随 s_0 递增；当 $s_0>0.254\tau$ 时，A_{shadow} 随 s_0 递减；当 $s_0\to+\infty$时，$A_{\text{shadow}}\to0.016\,9$，这个值是 $s_0=0$ 时 A_{shadow} 值的 10～15%。对于 $A_0\leqslant1.387$ 时，A_{shadow}—$2s_0/\tau$ 曲线都是图 12-18 的形式；但当 $A_0>1.387$ 时，由于自陷(self-trap)．曲线只有在一部分 s_0 的值域内是这样，由于自陷而形成束缚态，A_0 越大时，足够出现束缚态的 s_0 值域越大。反过来，当 s_0 一定，对于 A_0 来说，存在一个能够出现自陷的下限，在这个极限之上，交叉相位调制非常强，以致使孤子的中心频率移动以补偿初始时的群速差，即使二

者的群速趋于一致。相反，还有在一个使孤子保持分离状态的 A_0 的上限，在这个极限之下，孤子可保持着分离状态。但这两个极限在 $s_0 \to \infty$ 时，又吻合在一起了，但当 $s_0 \to +\infty$ 时，二者分别趋于 3.6 和 3.2，因而在 $3.2 < A_0 < 3.6$ 中，是一个过渡区。图 12-19 给出了各个区域。孤子在经过几次位置振荡之后，可能会相互穿过、反射回来，或自陷。A_{shadow} 与 A_0 的依赖关系，由图 12-20 给出。在过渡区，A_{shadow} 对 A_0 的依赖非常敏感，即极小的 A_0 变化，将引起 A_{shadow} 极大的变化。图 12-20 中，曲线上的水平线标记过渡区的 A_0 值。我们设想在过渡区，可能出现混沌现象，这吸引着我们的极大研究兴趣，因时间关系，暂在这里(起草本著作手稿之时)先提出此设想，或许设有混沌现象出现，或者有，也许到了本著作出版发行时，就有了结论。



a, b, c, d, e, f, g, h, i, j 相应于图 12-20 中的曲线

图 12-18　$A_{shadow}-2s_0/t$ 曲线($A_0=1$)

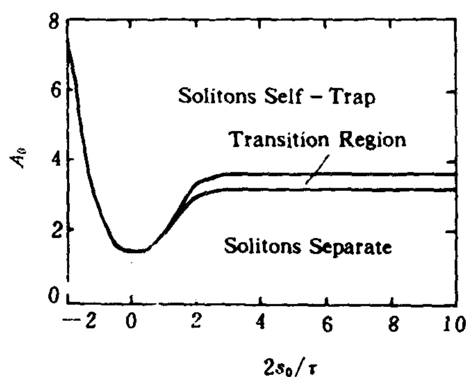


图 12-19　孤子自陷区域、分离区域及过渡区域

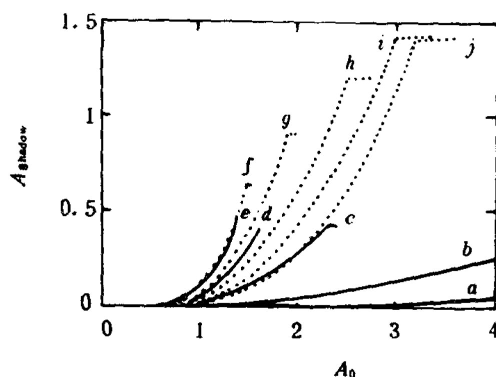


图 12-20　$A_{shadow}-A_0$ 曲线

参 考 文 献

第 一 部 分

〔1〕 Zabushy N J, Kruskal M D. Phys. Rev. Lett. 1965(15): 240
〔2〕 Lamb G L , Jr.. Elements of Soliton Theory. Wiley, 1980
〔3〕 Eckhaus W, Van Harten A. The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons, An Introduction. North−Holland, 1981
〔4〕 Eilenberger G. Solitons: Mathematical Methods for Physicists. Springer, 1981
〔5〕 Bullough R K , Caudrey P J , Eds.. Solitons. Springer, 1980
〔6〕 Lonngren K, Scott A C, Eds.. Solitons in Action. Academic, 1978
〔7〕 Bishop A R , Schneider T , Eds.. Solitons and Condensed Matter Physics. Springer, 1978
〔8〕 Wilhelmsson H, Ed.. Solitons in Physics. Physica Scripta, 1979(20): 289
〔9〕 Miura R M , Ed.. Backlund Transformation, the Inverse Scattering Method, Solitons and Their Application. Springer, 1976
〔10〕 Bishop A B , Krumhansl J A , Trullinger E E. Physica D, 1980(D1):1
〔11〕 Scott A C, Chu F Y F, McLaughlin D W. Proc. IEEE, 1973(61): 1443
〔12〕 Cercignani C. Riv. Nuoro Cimento, 1977(7): 429
〔13〕 Barone A, et al.. Riv. Nuoro Cimento, 1971(1): 227
〔14〕 Makhankov V G. Phys. Rep., 1978(C35): 1
〔15〕 Faddeev L D , Korepin V E. Phys. Rep., 1978(C42): 1
〔16〕 Rajaraman R. Phys. Rep., 1975(C21): 227
〔17〕 Toda M. Phys. Rep., 1975(C18): 1
〔18〕 Jackiv R. Rev. Mod. Phys., 1977(49): 681
〔19〕 Bullough R K. Phys. Bulletin, 1978: 78
〔20〕 Libckaber A, Toulouse G. La Recherche, 1976(7): 1027
〔21〕 陆继宗，刘福绥，屠规彰. 自然杂志. 1979(2): 441
〔22〕 Gardner C S, Greene J M , Kruskal M D , Miura R M. Phys. Rev. Lett., 1967(19): 1095
〔23〕 Krumhansl J A , Schrieffer J R. Phys. Rev., 1975(B11): 3535
〔24〕 Hasegawa A, Tappert F. Appl. Phys. Lett., 1973(23): 147.
〔25〕 Hasegawa A, Tappert F. Appl. Phys. Lett., 1973(23): 171.
〔26〕 Hasegawa A, Kodama Y. Proc. of IEEE, 1981(69): 1145
〔27〕 Mollenauer F, et al.. Phys. Rev. Lett., 1980(45): 1095
〔28〕 Drazin P G, Johnson R S. Solitons: an introduction. Cambrige Univ. Press, 1989

〔29〕 Faddeev L D , Takhtadjan L A. Hamiltonian Method in the Theory of Solitons. Academic, 1987
〔30〕 Trullinger S E, Zakharov V E, et al.. Solitons. North–Holland, 1986
〔31〕 Newell A C. Solitons in Mathematics and Physics. SIAM. Philadelphia, 1985
〔32〕 Rajaraman R. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North–Holland, 1982
〔33〕 Takeno S. Dynamical Problems in Soliton Systems. Springer, 1985
〔34〕 Kivshar Y S, Malomed B A. Rev. Mod. Phys., 1989(61): 765
〔35〕 Agrawal G P. Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, 1989
〔36〕 Hasegawa A. Optical Solitons in Fibers. Springer–Verlag, 1989
〔37〕 黄宁念，陈宗蕴. 光纤孤子理论基础. 武汉: 武汉大学出版社，1991
〔38〕 Ablowitz M J. Seger H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia, PA:SIAM, 1981
〔39〕 郭柏灵等. 孤立子. 北京: 科学出版社，1987
〔40〕 李政道. 场论与粒子物理学(上册). 北京: 科学出版社，1980
〔41〕 唐世敏. 物理学报. 1991(40): 1818
〔42〕 谷内俊弥，西原功修著. 非线性波动. 徐福元等译. 北京: 原子能出版社，1981
〔43〕 Satsuma J, Yajima N. Prog. Theor. Phys., 1974(55): 284
〔44〕 Hirota R. Direct Methods of Finding Exact Solution of Nonlinear Evolution Equations, in "Backlund Transformation", Ed. Miura R M. Springer, Berlin, 1976
〔45〕 Satsuma J. J. Phys., Soc. of Japan, 1976(40): 286
〔46〕 Satsuma J. Prog. Theor. Phys., 1974(52): 1396
〔47〕 Hase Y, Satsuma J. J. Phys., Soc. of Japan, 1988(57): 679
〔48〕 Matsukidaira J, Satsuma J. Phys. Lett., 1990(A147): 467
〔49〕 Chen H H. Phys. Rev. Lett., 1974(33): 925
〔50〕 Ablowitz M J, Kaup D J, et al.. Stud. Appl. Math., 1974(53): 249
〔51〕 Lamb G L. J. Math. Phys., 1974(15): 2157
〔52〕 Sawada S, et al.. Prog. Theor. Phys., 1974(51): 1355
〔53〕 Satsuma J, Kaup D J. J. Phys., Soc. of Japan, 1977(43): 692
〔54〕 Kumer A. Phys. Rev. A, 1991(44): 2130
〔55〕 屠规彰等. 中国科学. 1980(5): 427
〔56〕 郭柏灵. 科学探索. 1983(3): 31
〔57〕 Chen Z Y, Haung N N, et al.. Common Theor. Phys., 1989(12): 327
〔58〕 Chen Z Y, Haung N N. Phys. Rev., 1988(A38): 4355
〔60〕 陈德芳, 楼森岳. 物理学报, 1991(40): 513
〔61〕 顾祝全. 科学通报, 1989(2):86
〔62〕 曹策向. 中国科学, 1989(7): 701
〔63〕 李翊神. 中国科学, 1992(6): 600
〔64〕 陈登远等. 应用数学学报, 1988(11): 468

〔65〕 Kawahara T, Toh S. Phys. Fluids, 1985(28): 1636
〔66〕 Yoshinaga T, Kakutani T. J. Phys., Soc. of Japan, 1984(53): 85
〔67〕 Taha T R , Ablowitz M J. J. Comp. Phys., 1984(55): 203
〔68〕 Fleck J A, et al.. Appl. Phys., 1976(10): 129
〔69〕 Hermanson B, et al.. Electr. Lett, 1983(19): 570
〔70〕 Hardin R H , Tappert F D. SIAM Rev., 1973(15): 423
〔71〕 Kuffman S A. Physica, 1984(D10): 145
〔72〕 Wolfram S. Theory and Applications of Cellular Automata. World Scientific, Singapore, 1986
〔73〕 Jensen I. Phys. Rev., 1991(A,43): 3187
〔74〕 Dab D, Boon J P, Li Y X. Phys. Rev. Lett., 1991(66): 2535
〔75〕 Park K, Steiglitz K, Thurston W P. Physica, 1986(D19): 423
〔76〕 Satsuma J, Sasa N, Takahashi D. Research Reports in Physics — Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (Ed: Makhankov V G, Pashaev O K. Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, 1991)
〔77〕 Takahashi D, Satsuma J. J. Phys., Soc. of Japan, 1990(59): 3514
〔78〕 Tai K, Hasegawa A, et al.. Opt. Lett., 1988(13): 392
〔79〕 李福利. 高等激光物理学. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992
〔80〕 Hasegawa H, Tappert F. Appl. Phys. Lett., 1973(23): 171
〔81〕 Zhao W, Bourkoff E. Opt. Lett., 1990(14): 703
〔82〕 Dlanov E M, Mamyshev P V. Opt. Lett., 1989(14): 1008
〔83〕 Gredeskul S A, Kivshar Y S. Opt. Lett., 1989(14): 1289

第 二 部 分

〔1〕 Temerin M, et al.. Phys. Rev. Lett., 1982(48): 1175
〔2〕 Segdeev R Z. Reviews of Plasma Physics Consultants Bereau, New York: 1966(3): 23
〔3〕 Widier M, Alexeff I, et al.. Phys. Fluids, 1970(13): 2532
〔4〕 Ikezi H. Phys. Fluids, 1973(16): 1668
〔5〕 Washimi H, Taniuti T. Phys. Rev. Lett., 1966(17): 996
〔6〕 Witl E, Lotko W. Phys. Fluids, 1983(26): 2176
〔7〕 Hudson M, et al.. Journal Geophys. Res., 1983(A88): 916
〔8〕 Shukla P K, et al.. J. Math. Phys., 1978(19): 2506
〔9〕 Ray D. Phy. Fluids, 1979(22): 2037
〔11〕 Sons L T. ISSP'86, Beijing, 1986: 9–005
〔12〕 Zabusky N J, Kruskal M D. Phys. Rev. Lett., 1965(15): 240
〔13〕 Miles J. Wave Motion, 1985(7): 291
〔14〕 Miles J. J. Fluid Mech., 1976(75): 419
〔15〕 Miles J. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser., 1967(A297): 459

〔16〕 Miles J. J. Fluid Mech., 1984(149): 15
〔17〕 Miles J. J. Fluid Mech., 1984(146): 285
〔18〕 Segur H. J. Math. Phys., 1976(17): 714
〔19〕 Segur H, Ablowtz M J. J. Math. Phys., 1976(17): 710
〔20〕 Ablowtz M J, et al.. Phys. Rev. Lett., 1975(35): 1185
〔21〕 Ablowtz M J, et al.. Stud. Appl. Math., 1974(53): 249
〔22〕 Ablowtz M J, et al.. Lett. Nuovo Cimento, 1978(23): 333
〔23〕 Ablowtz M J, Sadtsuma J. J. Math. Phys., 1978(19): 2180
〔24〕 Ablowtz M J, Segur H. Phys. Rev. Lett., 1977(38): 1103
〔25〕 Whitham G B. J. Fluid Mech., 1976(74): 353
〔26〕 Whitham G B. Linear and nonlinear Waves. Interscience, 1974
〔27〕 Minzoni A A. J. Fluid Mech., 1976(74): 369.
〔28〕 Gu X M Sethna P R. J. Fluid Mech., 1987(183): 543
〔29〕 Jones A F. J. Fluid Mech., 1984(138): 53
〔30〕 Radder A C, et al.. Wave Motion, 1985(7): 473
〔31〕 陈学宏，刘应中. 力学学报, 1989(21): 539
〔32〕 邹光远，陈耀松. 力学学报, 1989(21): 1
〔33〕 吕秋强，刘应中. 力学学报, 1989(21): 161
〔34〕 王本仁，Apfel R E. 中国科学, 1992(A): 52
〔35〕 吕秋强. 计算物理, 1989(6): 335
〔36〕 Wu J, Keolian R, Rudnick I. Phys. Rev. Lett., 1984(52): 1421
〔37〕 Wu J, Rudnick I. Phys, Rev. Lett., 1985(55): 204
〔38〕 Wu J, Ph. D. Dissertation. Univ. of California, Los Angeles, 1985
〔39〕 Larraz A, Putterman S. Phys. Lett., 1984(103A): 15: J. Fluid Mech., 1984(148): 443
〔40〕 Aranha J A , Yue D K, Mei C C. J. Fluid Mech., 1982(121): 465
〔41〕 Miles J W. J. Fluid Mech., 1984(148): 451
〔42〕 黄国翔，颜家壬，戴显熹. 物理学报, 1990(39): 1234
〔43〕 崔洪农，杨学群等. 水动力学研究与进展, 1988(3): 46
〔44〕 颜家壬，黄国翔. 应用数学和力学, 1987(8): 925
〔45〕 Wang B R , Wei R J. Chinese Phys. Lett., 1987(6): 397
〔46〕 Yan J R , Huang G X. Chinese Phys. Lett., 1988(5): 305
〔47〕 Wang B R, Wei R J, et al.. Chinese Phys. Lett., 1986(3): 213
〔48〕 Xu Y, Wei R J. J. A Coust. Soc. Am., 1992(91) 2576
〔49〕 Denardo B, Wright W, Putterma S, Larraza A. Phys. Rev. Lett., 1990(64): 1518
〔50〕 Ablowitz M J, Segur H. J. Fluid Mech., 1979(92): 691
〔51〕 Yuen H C, Lake B M. Am. Rev. Fluid Mech., 1980(12): 303
〔52〕 Hammack J, Segur H. J. Fluid Mech., 1974(65): 209
〔53〕 Hammack J, Segur H. J. Fluid Mech., 1978(84): 337
〔54〕 Yuen H C, Lake B M. Phys. Fluids, 1975(18): 958

〔55〕 Kadomtsev B, Petviashili V. Sov. Phys. Dokl, 1970(15): 539
〔56〕 Zaharbv V E. Sov. Phys. JAMTP, 1968(4): 86
〔58〕 Hayes W D. Proc. Roy. Soc., 1973(A332): 199
〔59〕 Davey A, Stewartson K. Proc.Roy. Soc., 1974(A388): 191
〔60〕 Djordjevic V D, Redekepp L G. J. Fluid Mech., 1977(79): 703
〔61〕 Benney D J, Roskes G J. Stud. Appl. Math., 1969(48): 377
〔62〕 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 西安电子科技大学学报，1991(18): 15
〔63〕 郭柏灵，庞小峰. 孤立子(第一章). 北京: 科学出版社，1987
〔64〕 李政道. 粒子物理和场论简引(上册). 北京: 科学出版社，1984
〔65〕 倪皖荪，魏荣爵. 中国科学, 1991(A11): 1207
〔66〕 Ni W S, Wei R J. Science in China., 1992(35A): 626
〔67〕 Bondeson A, Anderson D, Lisak M. Phys. Scr., 1970(20): 479
〔68〕 Anderson D, Lisak M. Phys. Rev., 1985(A,32): 2270
〔69〕 Anderson D, Lisak M, Opt. Lett., 1986(11): 174
〔70〕 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 物理学报, 1992(41): 1745
陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 物理学报, 1994(44): No.6
Chen Lujun, Liang Changhong, Wu Hongshi. Phys. Rev., 1993(E48): 2690
〔71〕 Karpmann V I, Solov′ev V V. Physica, 1981(D3): 487
〔72〕 Landau L D, Lifsitz E M. Fluid Mechamics Pergamon. London: 1959
〔73〕 Kivshar Y S, Madlomed B A. Rev. Mod. Phys., 1989(61): 763
〔74〕 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 光学学报, 1994(14): 113
〔75〕 Nayfeh A H. Phys. Fluids, 1987(30): 2976
〔76〕 戴世强等. 中国科学, 1990(A2): 153
〔77〕 周显初等. 中国科学, 1992(A12): 1269
〔78〕 Zakharov V E, Shabat A B. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1973(64)[Sov.Phys.—JETP, 1973(37): 823]
〔79〕 Zakharov V E, Shabat A B. Sov. Phys—JETP, 1972(34): 62
〔80〕 Hasegawa A H, Tappert F. Appl. Phys. Lett., 1973(23): 171
〔81〕 Ronagnoli M, et al.. Opt. and Quantum Electr., 1992(24): 1237
〔82〕 Muraki D, Kath W L. Physica, 1991(D48): 53
〔83〕 David D, Tratnik M V. Physica, 1991(D51): 308
〔84〕 Malomed B A. Phys. Rev., 1991(A43): 410
〔85〕 Rongjue Wei, et al.. J.Acoust. Sco. Am., 1990(88): 469

第 三 部 分

〔1〕 Askar′yan G A. Sov. Phys.—JETP, 1962(15): 1088
〔2〕 Akhmanov S A, Sukhorukov A P, Khokhlov R V. Sov. Phys.—JETP, 1962(23): 1025
〔3〕 Zakharov V E , Sov. Phys.,—JETP, 1972(35): 908

〔4〕 Hercher M. J. Opt. Soc. Am., 1964(54): 563
〔5〕 Chiao R Y, Garmire E, et al.. Phys. Rev. Lett., 1964(13): 479
〔6〕 Giuliano C R, Marhurger J H. Phys. Rev. Lett., 1971(27): 905
〔7〕 Shen Y R. Light Scattering in solids, edited by M.Cardona. Springer–Verlag, Berlin, 1975: 275
〔8〕 Shen Y R, Shaham Y J. Phys. Rev. Lett., 1965(15): 1010
〔9〕 Garmire E, Chiao R Y, Townes G H. Phys. Rev. Lett., 1966(16): 347
〔10〕 McCall S L, Hahn E L. Phys. Rev.Lett., 1967(18): 908
〔11〕 McCall S L, Hahn E L. Phys. Rev., 1969(183): 457
〔12〕 Slusher R E, Gibbs H M. Phys. Rev., 1972(A5): 1634
〔13〕 Scott A C, Chu F Y F, et al.. Proc. IEEE, 1973(61): 1443
〔14〕 Nozaki K. J. Phys. soc. Japan, 1974(37): 206
〔15〕 李福利. 高等激光物理学(第一版). 合肥: 中国科技大学出版社， 1992
〔16〕 Shen Y R. The principles of nonlinear optics (Vol.2). John Wiley & Sons, Inc., 1984.
〔17〕 Nozaki K, Taniuti T. J. Phys. Soc. Japan, 1973(34): 796
〔18〕 Nishikawa K, et al.. Phys. Rev. Lett., 1974(33): 148
〔19〕 Nishikawa K. J. Phys. Soc. Japan, 1974(37): 1124.
〔20〕 Nishikawa K. J. Phys. Soc. Japan, 1975(39): 803
〔21〕 Taniuti T, Yajima N. J. Math. Phys., 1973(14): 1389
〔22〕 Hasegawa A, Tappert F. Appl. Phys. Lett., 1973(23): 147
〔23〕 Kodama Y, Hasegawa A. IEEE–QE, 1987(23): 510
〔24〕 Kodama Y. J. Stat. Phys., 1985(39): 597
〔25〕 郭旗， 周国生， 林为干. 中国科学 A, 1991: 200
〔26〕 Kumar A. J. Mod. Opt., 1991(38): 11
〔27〕 Kumar A. Phys. Rev., 1991(A44): 2130
〔28〕 Chen Y. Phys. Rev., 1992(A45): 5215
〔29〕 Karlsson M. Phys Rev., 1992(A46): 2726
〔30〕 Christodoulides D N, Joseph R I. Appl. Phys. Lett., 1985(47): 76
〔31〕 Stolen R H, Lee C, et al.. J. Opt. Soc. Am., 1984(B1): 652
〔32〕 Islam M N, et al.. J. Opt. Soc. Am., 1989(B6): 1149
〔33〕 Hong B J, Yang C C. Opt. Lett., 1990(15): 1061
〔34〕 Stolen R H, Gordon J P, et al.. J. Opt. Soc. Am., 1991(B6): 1159
〔35〕 Hong B J, Yang C C. J. Opt. Soc. Am., 1991(B8): 1114
〔36〕 Agrawal G P. Opt. Lett., 1990(15): 224
〔37〕 Mamyshew P V, et al.. Opt. Lett., 1990(15): 1076
〔38〕 Gagnon L, Belanger P A. Phys. Rev., 1991(A43): 6187
〔39〕 Mollenaur L F, et al.. Phys. Rev.Lett., 1980(45): 1095
〔40〕 Mollenaur L F, et al.. Elect. Lett., 1991(22)
〔41〕 Hakazaur H, et al.. Lasera & Optru., 1991(10): 6

〔42〕 Silderberg Y, et al.. Appl.Phys.Lett., 1987(50): 801
〔43〕 De Sterke C M. J.O.S.A. 1990(A,7): 636
〔44〕 Wabnitz S, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 1071
〔45〕 Trillo S, et al.. IEEE−QE, 1989(25): 104
〔46〕 Firth W J, et al.. J.O.S.A., 1990(B7): 1087
〔47〕 Law C T, et al.. J.O.S.A., 1990(B8): 58
〔48〕 Luther G G, et al.. J.O.S.A., 1990(B7): 1125
〔49〕 Aceves A B, et al.. Phys.Lett., 1989(A141): 37
〔50〕 Andrusliko L M, et al.. Electron, 1989(32): 427
〔51〕 Trillo S, et al.. Opt.Lett., 1988(13): 672
〔52〕 Abdulaev F K, et al.. 1989(14): 131
〔53〕 Mollenauer L F, et al.. IEEE−QE, 1986(22): 157
〔54〕 Mollenauer L F, et al.. Opt.Lett., 1989(13): 567
〔55〕 Karn L, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 134
〔56〕 Kodam Y, et al.. Opt. Lett., 1991(16): 208
〔57〕 Crosignani B, et al.. Opt. Lett., 1981(6): 329
〔58〕 Belanger P A, et al.. Phys. Rev., 1990(A41): 5245
〔59〕 Ueda T, et al.. Phys. Rev., 1990(A42): 563
〔60〕 Marting C, et al.. Phys.Rev., 1990(A42): 550
〔61〕 Menyuk C R, et al.. IEEE−QE, 1987(23): 174
〔62〕 Menyuk C R, et al.. IEEE−QE, 1989(2512): 2674
〔63〕 Christodoulides D N, et al.. Opt. Lett., 1991(16): 446
〔64〕 Christodoulides D N, et al.. Opt. Lett., 1988(13): 53
〔65〕 Wai P K, et al.. Opt. Lett., 1991(16): 1231
〔66〕 Malomed B A , Phys. Rev., 1991(A113): 410
〔67〕 Trantnik M V. Opt. Lett., 1992(17): 917; J.O.S.A., 1990(B7): 2204
〔68〕 Christodoulides D N, et al.. Opt. Lett., 1988(13): 53; Opt. Lett., 1991(16): 566
〔69〕 David D, et al.. Physica, 1991(D51), 308
〔70〕 Robert B D, Sipe J E. J.O.S.A., 1991(B8): 786; Physica, 1991(D48): 53
〔71〕 Gagnon L. J.O.S.A., 1990(B7): 1098
〔72〕 Derbov V L, et al.. J.O.S.A., 1990(B7): 1079
〔73〕 Agrawal G P. J.O.S.A., 1990(B7): 1072
〔74〕 Gordon J P, Haus H A. Opt. Lett., 1986(11): 665
〔75〕 Iwatsuki K, et al.. IOOC'89
〔76〕 Olsson N A, et al.. Elect. Lett., 1991(27): 695
〔77〕 Nakazawa N, et al.. ECOC'91: 150
〔78〕 Mollenauer L F, Stolen R H. Opt. Lett., 1984(9): 13
〔79〕 Mollenauer L F, et al.. Lasers & its Appl., 1985: 106
〔80〕 Molenauer L F. Phil.Trans. Roy. Soc. Lond., 1985(A315): 437

〔81〕 Mitschke F M, Mollenaner L M. Opt. Lett., 1987(12): 355, 407
〔82〕 Islam M N, et al.. Opt. Lett., 1987(12): 814
〔83〕 Kafka J D, et al.. Opt. Lett., 1987(12): 181
〔84〕 Valdmanis J A. Opt. Lett., 1985(10): 131
〔85〕 Hasegawa A. Appl. Opt., 1984(23): 3302
〔86〕 Mukai T, et al.. Elect. Lett., 1987(239): 216
〔87〕 Aoki Y. IEEE J. Lightwave Technol., 1988(6): 1225
〔88〕 Shimizu M, et al.. Elect. Lett., 1990(26): 1641
〔89〕 Horiguchi M, et al.. Elect. Lett., 1990(26): 1758
〔90〕 Urquhart P. Appl. Opt., 1989(28): 3759
〔91〕 Miniscalco W J. IEEE J. Lightwave Technol., 1991(9): 234
〔92〕 董孝义. 量子电子学, 1989(6), 1990,1(7): 1
〔93〕 董孝义. 光通信技术, 1989(13), 1990, 32(14): 3
〔94〕 董孝义. 激光与红外, 1990(20), 1990, 4(20): 28
〔95〕 Hermansson B, Yevik D. Elect. Lett., 1983(19): 570
〔96〕 Chu P L, Desem C. Elect. Lett., 1985(21): 1133
〔97〕 Chu P L, Desem C. IOOC'83, Tokyo.
〔98〕 Blow K J, Doran N J. Elect. Lett., 1983(19): 429
〔99〕 Gordon J P. Opt. Lett., 1983(8): 596
〔100〕 杨祥林, 赵阳. 物理学报, 1989(38): 745
〔101〕 杨祥林, 赵阳. 通信学报, 1990(11): 33
〔102〕 杨祥林, 赵阳, 单雪康. 中国科学, 1989(A): 974
〔103〕 刘颂豪, 郭旗, 廖常俊, 金怀诚. 科学通报, 1992(3): 193
〔104〕 郭旗等. 自然杂志, 1991(14): 405
〔106〕 廖常俊. 高速摄影与光子学, 1991(20): 253
〔107〕 刘颂豪, 廖常俊, 金怀成. 物理学进展, 1989(9): 324
〔108〕 Zakharov V E, Shabat A B. Sov. Phys. JETP, 1972(34): 62
〔109〕 Satsuma J, Yajima N. Suppl. Prog. Theor. Phys., 1974(55): 284
〔110〕 Kivshar Y S, Malomed B A. Rev. Mod. Phys., 1989(61): 763
〔111〕 郭旗, 周国生等. 光学学报, 1990(10): 652
〔112〕 Desem C, Chu P L. Opt. Lett., 1987(12): 349
〔113〕 Chu P L, Desem C. Elect. Lett., 1985(21): 228
〔114〕 Tai K, Hasegawa A. Opt. Lett., 1988(13): 392
〔115〕 Gatz S, Herrman J. Opt.Lett., 1992(17): 484
〔116〕 Tajima K. Opt.Lett., 1987(2): 54
〔117〕 Kuehl H H. J. Opt. Soc Am., 1988(B5): 709
〔118〕 Ren Q, Hsu H. IEEE J. Quantum Electron, 1988(24): 2059
〔119〕 陈陆君, 梁昌洪, 吴鸿适. 光学学报, 1994(14): 113
〔120〕 陈陆君, 梁昌洪, 吴鸿适. 物理学报, 1992(41): 1746

〔121〕 Hasegawa A, Tappert F. Appl. Phys. Lett., 1973(23): 171
〔122〕 Zhao W, Bourkoff E. Opt. Lett., 1989(14): 703
〔123〕 Dianov E M, Mamyshev P V, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 1008
〔124〕 Gredeskul S A, Kivsher Y S. Opt. Lett., 1989(14): 1281
〔125〕 Zhao W, Bourkoff E. Opt. Lett., 1987(14): 1371
〔126〕 Zhao W, Bourkoff E. Opt. Lett., 1990(15): 405
〔127〕 Cotter D. Electron. Lett., 1986(22): 693
〔128〕 Najafi S I, Belanger M, et al.. Appl. Opt., 1988(27): 806
〔129〕 Ainslie B J, Girdelstore H P, Cotter D. Elect. Lett., 1987(23): 405
〔130〕 Cotter D, Ironside C N, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 986
〔131〕 Islam M N, Sunderman E R, Stolen R H, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 811
〔132〕 Krokel D, Halas N J, et al.. Phys. Rev. Lett., 1988(60): 29
〔133〕 Weiner A M, Thurston R N, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 868
〔134〕 Mursegke F M, Mollenauer L F. Opt. Lett., 1986(11): 659; 12(1987): 355
〔135〕 Gordon J P. Opt. Lett., 1986(11): 662
〔136〕 Kivshar Y. Opt. Lett., 1990(42): 1757
〔137〕 Kivsnar Y. Opt. Lett., 1991(16): 285
〔138〕 Zakharov V E, Shabat A B. Sov. Phys.—JETP, 1973(37): 823[Zh. Eksp. Teor. Fiz, 1973(64): 162]
〔139〕 Agrawal G P. Opt. Lett., 1991(16): 226
〔140〕 Tzoar N, Jain M. Phys. Rev. 1981(A23): 1266
〔141〕 Agrawal G P, Heaedley Ⅲ C. Phys. Rev., 1992(A46): 1537
〔142〕 Ohkuma K, Ichikawa Y H, Abe Y. Opt. Lett., 1987(12): 516
〔143〕 陈宗蕴, 黄念宁. 科学通报, 1989(21): 1614
〔144〕 Golovchenko E A, Dianov E M, et al.. JETP Lett., 1985(42): 88
〔145〕 Liang C H (梁昌洪). Wu H S (吴鸿适), Chen L J (陈陆君). ACTA Physica Sinica, 1993,2(5)
〔146〕 Aceves A B, Moloney J V, Newell A C. J. Opt. Soc. Am., 1988(B5): 559
〔147〕 Aceves A B, Moloney J V, Newell A C. Opt. Lett., 1988(13): 1002
〔148〕 Anderson D, Lisak M. Phys.Rev. 1985(A, 32): 2270; Opt. Lett., 1986(11): 174
陈陆君, 梁昌洪, 吴鸿适. 物理学报, 1992(41), 243
陈陆君,梁昌洪, 吴鸿适. 光学学报, 1993(10)
〔149〕 副岛俊雄, 贝渊俊二. 光纤通信基础. 李先源等译. 北京: 人民邮电出版社, 1988: 74
〔150〕 Kuehl H H. J. Opt. Soc. Am., 1988(B5): 709
〔151〕 大越孝敬, 冈本胜就. 通信光纤. 刘时衡等译. 北京: 人民邮电出版社, 1989: 77, 80, 82
〔152〕 Aceves A B, Moloney J V, Newell A C. Phys. Rev., 1989(A39): 1809
〔153〕 Aceves A B, Moloney J V, Newell A C. Phys. Rev., 1989(A39): 1828
〔154〕 Kosevich A M. Physica, 1990(D41): 253

〔155〕 Boardman A D, Cooper G S. J. Opt. Soc. Am., 1988(B5): 403
〔156〕 Muraki D J, Kath W L. Physica, 1991(D48): 53
〔157〕 Malomed B A. Phys. Rev., 1992(A45): 8321
〔158〕 Malomed B A. Phys. Rev., 1991(A43): 410
〔159〕 Menyuk C R. Opt. Lett., 1987(12): 614
〔160〕 De Angelis C. Opt.Lett., 1992(17): 850
〔161〕 Menyuk C R. J. Opt. Soc. Am., 1988(B5): 392
〔162〕 Menyuk C R, Islam M N, Goron J P. Opt. Lett., 1991(16): 566
〔163〕 Chen C J, Wai P K A, Menyuk C R. Opt. Lett., 1990(15): 477
〔164〕 Islam M N, Menyuk C R, Chen C J. Opt.Lett, 1991(16): 215
〔165〕 Blow K J, Doran N J, Wood D. Opt. Lett., 1987(12): 202
〔166〕 Kaminow I D. IEEE–QE, 1981(17): 15
〔167〕 Desem C, Chu P L. Electron. Lett., 1987(23): 260.
〔168〕 shiojiri E, Fujii Y. Appl. Opt., 1985(24): 358.
〔169〕 Dianov E M, Nikonova Z S, Serkin V N. Sov. J. Quantum Electron, 1986(16): 1148.
〔170〕 Desem C, Chu P L. IEE–Part J, 1987(134): 145.
〔171〕 Karpman V I, Solovev V V. Physica, 1981(D3): 487.
〔172〕 Kodama Y, Nozaki K. Opt. Lett., 1987(12): 1038.
〔173〕 Hasegawa A. Opt. Lett., 1983(8): 650
〔174〕 Gordon J P, Haus H A. Opt. Lett., 1986(11): 665
〔175〕 Mollenauer L F, Smith F. Opt. Lett., 1988(13): 675
〔176〕 Anderson D, Bonnedal M. Phys. Fluids, 1979(22): 105
〔177〕 Chen Y. Opt. Lett., 1991(16): 4
〔178〕 Kaplan A E. Phys. Rev. Lett., 1985(55): 1291
〔179〕 Zakharov V E, Shabat A B. Sov. Phys. (JETP), 1973(37): 823
〔180〕 Chen Y, Atai J. Opt. Lett., 1991(16): 1933
〔181〕 Chen Y, Phys. Rev., 1992(A45): 6922
〔182〕 Malomed B A. Phys. Rev., 1991(A44): 6954
〔183〕 Maker P D, Terhune R W, et al.. Phys. Rev. Lett., 1964(12): 507
〔184〕 Maker P D, Terhune R W. Phys. Rev., 1965(A137): A801
〔185〕 Mayer G, Gires F. Compt. Rend. Acad. Sci., 1964(258): 2039
〔186〕 Duguay M A, Hansen J W. Appl. Phys. Lett., 1969(15): 192
〔187〕 Owyoung A, Hellwarth R W, et al.. Phys. Rev., 1972(B5): 628
〔188〕 Duguay M A. Progress in Optics, 1976(14): 163(Ed. by E.Wolf, North–Holland, Amsterdam, 1976)
〔189〕 Hellwarth R W. Prog. Quantum Electron, 1977(5): 1
〔190〕 Phu–Xuan N G, Rivoire G. Opt. Acta(光学学报), 1978(25): 233
〔191〕 Stolen R H, Ashkin A. Appl. Phys. Lett., 1973(22): 294

〔192〕 Agrawdl G P. 非线性光纤光学. 胡国峰，黄超译. 天津：天津大学出版社，1992
〔193〕 Blow K J, Doran N J, et al.. J. Opt. Soc. Am., 1988(B5): 381
〔194〕 Lattes A, Haus H A, Leonberger F J, et al.. IEEE–QE, 1983(19): 1718
〔195〕 LaGasse M J, Wong D L, et al.. Opt. Lett., 1989(14): 311
〔196〕 Kitayama K, Kimura Y, et al.. Appl. Phys. Lett., 1985(46): 317
〔197〕 Morioka T, Saruwatari M, et al.. Electron. Lett., 1987(23): 453
〔198〕 Halas N J, Krokes D, et al.. Appl. Phys. Lett., 1987(50): 886
〔199〕 Doran N J, Wood D. Opt. Lett., 1988(13): 56
〔200〕 Trillo S, Wabnitz S, et al.. Opt. Lett., 1988(13): 672
〔201〕 Manakov S V. Sov. Phys. JETP, 1974(38): 248
〔202〕 Ablowitz M J, Seger H. Solitons and the Inverse scattering Transform. Philadelphia PA: SIAM, 1981
〔203〕 Ulrich R, Simon A. Appl. Opt., 1979(18): 2241
〔204〕 Payne D N, Barlow A J, et al.. IEEE–QE, 1982(18): 477
〔205〕 Rashleigh S C. J. Lightwave Technol., 1983(1): 312
〔206〕 Mitschke F M, Mollenauer L F. Opt. Lett., 1986(11): 659
〔207〕 Blow K J, Doran N J, Wood D. Opt. Lett., 1987(12): 202
〔208〕 Trillo S, Wanbnitz S, Stolen R H. Appl. Phys. Lett., 49(1986): 1224
〔209〕 Friberg S R, et al.. Appl. Phys. Lett., 1987(15): 1135
〔210〕 Romagnoli M, et al.. Opt. Quamtum Electron., 1992(24): S1237
〔211〕 Crosignani B, et al.. Opt. Lett., 1981(6): 329
〔212〕 Jensen S M. IEEE–QE, 1982(18): 1580
〔213〕 陈陆君, 梁昌洪, 吴鸿适. 水槽中驻波的参量激励分析. 物理学报, 1994, 43(6)
〔214〕 David D, Tratnik M V. Physica, 1991(D51): 308
〔215〕 Muraki D J, et al.. Physica, 1991(D48): 53
〔216〕 Kivshar Y S, J. Opt. Soc. Am., 1990(B7): 2204
〔217〕 Winful H G. Opt. Lett., 1986(11): 33
〔218〕 Gregori H G, et al.. Phys. Rev. Lett., 1986(56): 600
〔219〕 Trillo S, et al.. Appl. Phys. Lett., 1986(49): 1224
〔220〕 Kimura Y, et al.. Japn. J. Appl. Phys., 1987(26): 1503
〔221〕 Christoulides D N et al.. Opt. Lett., 1988(13): 53
〔222〕 Chraplyvy A R, et al.. J. Lightwave Techol., 1984(LT–2): 6
〔223〕 Chraplyvy A R, et al.. Electron. Lett., 1984(20): 996
〔224〕 Agrawal G P. IEEE–QE, 1982(18): 214
〔225〕 Silberberg Y, et al.. J. Opt. Soc. Am., 1984(B1): 662
〔226〕 Nakatsuka H, et al.. Phys. Rev. Lett., 1983(50): 109
〔227〕 Bergh R A, et al.. Opt. Lett., 1982(7): 563
〔228〕 Petermann K. Opt. Lett., 1982(7): 623
〔229〕 Frigo N J, et al.. Opt. Lett., 1983(8): 119

〔230〕 Ezekicl S, et al.. Opt. Lett., 1982(7): 457
〔231〕 Kravtsov N V, et al.. Sov. J. Quantum Electron., 1983(13): 111
〔232〕 Bergh R A, et al.. J. Lightwave Tech., 1984(LT−2): 91
〔233〕 Bergh R A, et al.. Opt. Lett., 1982(7): 282
〔234〕 Crosignani B, et al.. J. Lightwave Tech., 1985(LT−3): 914
〔235〕 Lugiato L A. Progress in Optics, Ed. by E. Wolf North−Holland, Amsterdam, 1984(21)
〔236〕 Gibbs H M. Optical Bistability: Controlling Light with Light. Academic Orlanlo, 1985
〔237〕 Lamb G L. Elements of Soliton Theory. New York:Wiley, 1980: 34−38
〔238〕 Wang Q, Wei P K A, et al.. Opt. Lett., 1992(17): 1265

本书主要引用文献

1. Chen L J, Liang C H, Wu H S. Interaction of two liquid solitary waves in trough resonator. Phys. Rev. E(原 Phys. Rev. A 15), 1993, 48(4): 2690.
2. Liang C H, Wu H S, Chen L J. The transmission properties of soliton on the CW background near the zero−dispersion wavelength. Acta physica sinica, 1993 (5): 356
3. Chen L J, Liang C H, Wu H S. Equivalent particle theory for optical solitons. 1993 OSA Annual Meeting, Oct. 3～8, 1993. Toronto, Canada
4. 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 水槽中孤波相互作用的微扰变分分析. 物理学报，1992 (11): 1746
5. 宋 戈, 陈陆君. 光纤暗孤子序列的相互作用. 通信学报，1994(3)
6. 陈陆君，梁昌洪. 二阶光孤子的相互作用. 计算物理，1992(4): 700
7. 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 水槽中孤波的参数激励分析. 物理学报，刊于1994(6): 933
8. 孟升卫，陈陆君. 反相混合孤子序列的相互作用与通信应用. 西安电子科技大学学报，1993, 20(4): 38
9. 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 光孤子相互作用的等价粒子理论. 光学学报，1994, 14(2): 113
10. 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 超短光孤脉冲在突变面上的反射. 光学学报，1994, 14(1): 8
11. 陈陆君, 梁昌洪等. 双源耦合注入二阶孤子及其通信应用. 计算物理, 1994, 11(2): 225
12. 陈陆君, 梁昌洪，吴鸿适. 双参量孤子细胞自动机. 物理学报, 1993, 42(12): 1895
13. 陈陆君, 梁昌洪等. 饱和型半导体掺杂光纤中孤波行波解. 物理学报, 1994, 43(4): 591
14. 陈陆君, 梁昌洪等. 光纤非常色散区自变陡效应支持的小幅孤波. 物理学报, 1994(11): 1803
15. 俞重远, 陈陆君. 增益色散及双光子吸收所支持的小振幅孤波. 光学学报, 已录用。
16. 陈陆君, 俞重远. 孤子等价粒子理论(I)——单分量方程. 光子学报, 1994(z4): 19
17. 陈陆君, 俞重远. 孤子等价粒子理论(II)——多分量方程. 光子学报, 1994(z4): 27
18. Yu Zhongyuan, Chen Lujun. Small−Amplitude Soliton in Nonlinear Saturation Glass Fibers. Chinese J. of Lasers, 1994(12)

19. Chen Lujun. High Mode Soliton and Kink Arrays in Rectangular Trough, International Workshop on Modern Acoustics. Sep.4～8, 1994, Nanjing University, China.
20. Chen Lujun, Guo Yiao, Liang C H. The Propagating and Interaction Properties of Soliton in Nonlinearity Saturation Optical Fibers. Optical Engineering (USA), 被光学学报推荐为该刊的刊登文章。
21. 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 光纤孤波在媒质实变界面的反射与透射.物理学报，1992, 41(2): 244
1992被美国英文译刊 Chinese Physics(USA) 登载于Vol.12, No.4, p.795–805, 1992(全文摘录)。
22. 陈陆君，梁昌洪，吴鸿适. 倾斜水槽中非传播孤波的移动. 西安电子科技大学学报, 1991,18(3): 15
23. 陈陆君等. 饱和光纤中的各阶孤子及孤子相互作用. 光学学报, 1995, 15(5)
24. 非等幅线性极化孤子的耦合及其应用(待发表的作者论文)
25. 光纤耦合孤波相互作用(待发表的作者论文)
26. 水槽耦合孤波实验观察及其理论分析(待发表的作者论文)
27. 倾斜水槽中的孤波传播和等价粒子分析(待发表的作者论文)
28. Observation of coupled soliton in a coupled liquid trough(待发表的作者论文)
29. Theory of coupled soliton in a coupled liquid trough(待发表的作者论文)
30. 陈陆君. 孤子和非线性理论中的若干新论题. 西安电子科技大学, 博士论文, 1993.6
31. 郭旗. 寥常俊编. 光纤孤子通信基础讲习班讲义集. 1992.10.21～28, 广州。
32. Drazin P G, Johnson R S. Solitons: an introduction. Cambrige Univ. Press, 1989
33. Menyuk C R. Pulse Propagation in an Elliptical Birefringent Kerr Medium. IEEE–QE, 25(12): 2674
34. Agrawal G P. Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, 1989
(中译本:非线性光纤光学. 胡国峰, 黄超译. 天津: 天津大学出版社出版, 1992)
35. 黄宁念，陈宗蕴. 光纤孤子理论基础. 武汉: 武汉大学出版社，1991
36. 郭柏灵, 庞小峰. 孤立子. 北京: 科学出版社，1987
37. 谷内俊弥，西原功修. 非线性波动. 徐福元等译. 北京: 原子能出版社，1981
38. 杨祥林, 赵阳等. 中国科学, 1989(A): 974
39. 刘颂豪, 郭旗, 寥常俊, 金怀诚. 科学通报, 1992(3): 193

作者就此机会一并向上述被引用文献的作者或译者表示致谢。

[General Information]
书名=孤立子理论及其应用——光孤子理论及光孤子通信
作者=陈陆君　梁昌洪著
页数=337
SS号=10831902
DX号=
出版日期=1997年07月第1版
出版社=西安电子科技大学出版社